

第十二章 直 线

第一节 两个基本公式

一、主要内容

(1) 两点间的距离公式:

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 为坐标平面上任意两点, 则 A 与 B 的距离为

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

(2) 线段中点坐标的计算公式:

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 是平面直角坐标系内的任意两点, 点 $M(x_0, y_0)$ 是线段 AB 的中点, 则

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}, y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

二、巩固训练

1. 求下列两点间的距离:

(1) $A(1, -2), B(3, 5)$;

(2) $A(4, -3), B(12, 3)$.

2. 求下列两点的中点坐标:

(1) $A(4, -2), B(6, 4)$;

(2) $A(1, -1), B(3, 7)$.

3. 有一线段 AB , 它的中点坐标是 $(4, 2)$, 端点 A 的坐标是 $(-2, 3)$, 求另一端点 B 的坐标.

4. 已知点 $A(2, -1), B(a, 4)$, 并且 $|AB| = \sqrt{41}$, 求 a 的值.

5. 已知 $\triangle ABC$ 三个顶点的坐标分别为 $A(-a, 0)$, $B(a, 0)$, $C(0, \sqrt{3}a)$.

(1) 求证: $\triangle ABC$ 是等边三角形;

(2) 求这个三角形的中线长.

三、自我检测

1. 求下列两点之间的距离:

(1) $A(0, -2)$, $B(3, 0)$;

(2) $A(-3, 1)$, $B(2, 4)$;

(3) $A(4, -2)$, $B(1, 2)$;

(4) $A(5, -2)$, $B(-1, 6)$;

2. 求线段 AB 的中点坐标:

(1) $A(2, -1), B(3, 4)$;

(2) $A(0, -3), B(5, 0)$;

(3) $A(3, -\frac{5}{3}), B(4, -\frac{2}{3})$;

(4) $A(6, 1), B(3, 3)$.

3. 已知线段 MN 的中点坐标为 $(-5, 8)$, 点 M 的坐标为 $(0, 3)$, 求点 N 的坐标.

4. 如果点 $A(0, -2)$ 与点 B 关于点 $P(3, -5)$ 对称, 求点 B 的坐标.

5. 已知点 $M(8, -1)$, $N(2, 5)$, 现将线段 MN 分成四等份, 试求出各分点的坐标.

6. 已知点 $M(2, 2)$ 是线段 AB 的中点, 且点 A, B 的坐标分别为 $(m, 8)$, $(2, n)$, 求 m, n 的值.

7. 已知 $\triangle ABC$ 的顶点分别为 $A(3,4), B(-1,3), C(4,0)$,求 $\triangle ABC$ 的面积.

第二节 直线的方程

一、主要内容

(1)**倾斜角**:直线 l 在直角坐标系中与两个坐标轴有不同的夹角,其中直线 l 向上的方向与 x 轴的正方向所成的最小正角,叫作直线 l 的**倾斜角**.

(2)**斜率**:直线 l 的倾斜角为 $\alpha(\alpha \neq 90^\circ)$,则 α 的正切值叫作这条直线的**斜率**.

(3)**斜率计算公式**:设点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 为直线 l 上的任意两点,则直线 l 的斜率为

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x_1 \neq x_2).$$

(4)**点斜式方程**:斜率为 k ,并且经过点 $P_0(x_0, y_0)$ 的直线的点斜式方程为 $y - y_0 = k(x - x_0)$.

(5)**截距**:直线 l 与 x 轴交于点 $A(a, 0)$,与 y 轴交于点 $B(0, b)$.则 a 叫作直线 l 在 x 轴上的**截距**(或**横截距**); b 叫作直线 l 在 y 轴上的**截距**(或**纵截距**).

(6)**斜截式方程**:斜率为 k ,在 y 轴上的截距为 b 的直线的斜截式方程为 $y = kx + b$.

(7)**一般式方程**:方程 $Ax + By + C = 0$ (其中 A, B 不全为零)叫作直线的一般式方程.

D. 经过任意两个不同的点 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ 的直线都可以用方程 $(y-y_1)(x_2-x_1)=(x-x_1)(y_2-y_1)$ 表示

2. 填空题:

(1) 已知直线的倾斜角为 135° , 则此直线的斜率是_____.

(2) 把直线 l 的一般式方程 $2x-y+6=0$ 化成斜截式方程是_____.

(3) 直线 $l: \frac{x}{-2} + \frac{y}{-3} = 1$ 在 x 轴上的截距是_____.

3. 把直线 l 的一般式方程 $x-2y+6=0$ 化成斜截式方程, 求出直线 l 的斜率和在 x 轴与 y 轴上的截距, 并画图.

4. 根据下列各条件写出直线的方程, 并且化成一般式方程:

(1) 经过点 $A(6, -4)$, 斜率为 $-\frac{4}{3}$;

(2) 经过点 $B(4, 2)$, 平行于 x 轴;

(3) 在 x 轴和 y 轴上的截距分别是 $\frac{3}{2}, -3$;

(4) 经过两点 $P_1(3, -2), P_2(5, 4)$.

5. 已知 $\triangle ABC$ 的三个顶点是 $A(3, -4)$, $B(0, 3)$, $C(-6, 0)$, 求它的三条边所在的直线方程.

三、自我检测

1. 填空题:

(1) 若直线 l 经过原点和点 $(3, 4)$, 则直线 l 的斜率为_____, 倾斜角为_____.

(2) 倾斜角为 60° , 且在 y 轴上截距为 -6 的直线方程为_____.

(3) 经过点 $A(0, 2)$, $B(-3, 0)$ 的直线方程为_____, 化为斜截式方程为_____.

2. 选择题:

(1) 过点 $(-1, 1)$ 和 $(1, 1)$ 的直线的斜率为().

A. 0

B. 不存在

C. 2

D. 0

(2) 经过点 $(4, -2)$ 且倾斜角为 $\frac{5\pi}{6}$ 的直线方程为().

A. $y - 2 = -\sqrt{3}(x - 4)$

B. $y - 4 = -\sqrt{3}(x + 2)$

C. $y - 2 = \sqrt{3}(x - 4)$

D. $y + 2 = -\sqrt{3}(x - 4)$

(3) 直线 $x + y + 1 = 0$ 的倾斜角为().

A. 45°

B. -45°

C. 135°

D. -135°

3. 根据下列条件, 写出直线的一般式方程.

(1) 过点 $A(-1, 5)$, 倾斜角为 $\frac{3\pi}{4}$;

(2) 倾斜角为 $\frac{\pi}{6}$, 且在 y 轴上的截距为 4;

(3) 过点 $A(3, 8), B(0, 3)$.

4. 一条直线与 x 轴相交于点 $(2, 0)$, 它的倾斜角的正弦为 $\frac{4}{5}$, 求这条直线的方程.

5. 已知直线 l 的方程为 $kx - y + b = 0$, 且过点 $M(4, 2), N(-1, 3)$, 求 k, b 的值.

6. 求与两坐标轴围成的三角形周长为 24, 且斜率为 $-\frac{1}{2}$ 的直线方程.

7. 若 $A(-4, 0), B(0, 8), C(n, 4)$ 三点共线, 求实数 n 的值.

第三节 两直线的位置关系

一、主要内容

(1) 求两条直线的交点坐标, 就是求由这两条直线构成的方程组的解.

(2) 已知两条直线分别为 $l_1: y = k_1x + b_1, l_2: y = k_2x + b_2$, 那么

① 如果 $k_1 \neq k_2$, 则两条直线 l_1, l_2 相交;

②如果 $k_1=k_2$, 当 $b_1=b_2$ 时, 则两条直线 l_1, l_2 重合;

③如果 $k_1=k_2$, 当 $b_1 \neq b_2$ 时, 则两条直线 l_1, l_2 平行; 反之, 如果两条直线 l_1, l_2 平行, 则 $k_1=k_2$, 且 $b_1 \neq b_2$, 即 $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow k_1=k_2$ 且 $b_1 \neq b_2$.

(3) 判断两条直线是否垂直, 首先要看这两条直线的斜率是否都存在:

①如果两条直线的斜率都存在且不为 0, 设两直线分别为 $l_1: y=k_1x+b_1, l_2: y=k_2x+b_2$, 则 $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1 \cdot k_2 = -1$.

②如果一条直线的斜率为 0, 另一条直线的斜率不存在, 则两条直线垂直.

二、巩固训练

1. 选择题:

(1) 直线 $3x+y+1=0$ 和直线 $6x+2y+1=0$ 的位置关系是().

- A. 重合
B. 平行
C. 垂直
D. 相交但不垂直

(2) 如果直线 $ax+2y+1=0$ 与直线 $x+y-2=0$ 互相垂直, 那么 a 的值等于().

- A. 1
B. $-\frac{1}{3}$
C. $-\frac{2}{3}$
D. -2

(3) 两条直线 $A_1x+B_1y+C_1=0$ 及 $A_2x+B_2y+C_2=0$ 垂直的充要条件是().

- A. $A_1A_2+B_1B_2=0$
B. $A_1A_2=B_1B_2$
C. $\frac{A_1A_2}{B_1B_2}=-1$
D. $\frac{A_1A_2}{B_1B_2}=1$

(4) 下列各组中的两个方程表示两条直线:

- ① $y=\frac{1}{3}x, y=3x$; ② $3x+2y=0, 2x+3y=0$;
③ $2x+3y=0, 6x-4y+1=0$; ④ $2x=-1, 2y=1$.

其中互相垂直的组数有().

- A. 1
B. 2
C. 3
D. 4

(5) 过点 $(-1, 3)$ 且平行于直线 $x-2y+3=0$ 的直线方程为().

A. $x-2y+7=0$

B. $2x+y-1=0$

C. $x-2y-5=0$

D. $2x+y-5=0$

2. 填空题:

(1) 两条直线 $2x+3y-k=0$ 和 $x-ky+12=0$ 的交点在 y 轴上, 则 k 的值是_____.

(2) 已知直线 $(a+2)x+(1-a)y-3=0$ 与 $(a-1)x+(2a+3)y+2=0$ 互相垂直, 则 $a=$ _____.

(3) 当 $a=$ _____时, 直线 $x+ay=2a+2$ 和 $ax+y=a+1$ 平行.

3. 求过直线 $x-y=0$ 和 $x+2y=3$ 的交点, 且斜率为 2 的直线方程.

4. 求经过两条直线 $x+y-4=0$ 和 $x-y+2=0$ 的交点, 且分别与直线 $2x-y-1=0$ 平行、垂直的直线方程.

5. 求与直线 $2x+3y+5=0$ 平行,且在两个坐标轴上的截距之和为 $\frac{5}{6}$ 的直线方程.

三、自我检测

1. 判断下列直线的位置关系. 如果垂直或相交,求出交点坐标.

(1) $l_1:2x+y-3=0, l_2:x+3y+1=0$;

(2) $l_1:5x-2y+2=0, l_2:10x-4y+3=0$;

$$(3) l_1: x + 3 = 0, l_2: 3y - 1 = 0;$$

$$(4) l_1: 4x - 2y + 1 = 0, l_2: 3x + 6y - 5 = 0.$$

2. 已知直线 $l_1: x + 2y - 3 = 0, l_2: x + my + n = 0$, 当 m, n 为何值时:

$$(1) l_1 // l_2; \quad (2) l_1 \perp l_2.$$

3. 若直线 $ax - y = 0$ 垂直于直线 $x - 2y - 3 = 0$, 求实数 a 的值.

4. 求证: 以 $A(3, 2), B(6, 5), C(1, 10)$ 为顶点的三角形是直角三角形.

5. 已知梯形 $ABCD$ 的顶点坐标为 $A(0, 0), B(m, 0), C(4, 4), D(2, 5)$.

(1) 求 m 的值;

(2) 求梯形中位线所在直线的方程.

6. 已知菱形 $ABCD$ 的两条对角线相交于点 $(1,1)$, 若其中一条对角线所在直线的方程为 $3x - 4y + 1 = 0$, 求另一条对角线所在直线的方程.

7. 若直线 $mx + y - n = 0$ 和 $x + my - 1 = 0$ 平行, 求 m, n 的取值范围.

8. 求满足下列条件的直线方程:

(1) 过点 $(2, 3)$, 且平行于直线 $3x - 2y + 5 = 0$;

(2) 过点 $(-2, 3)$, 且垂直于直线 $3x + 2y + 1 = 0$;

(3) 过点 $(1, 1)$, 且过直线 $x + y + 4 = 0$ 和 $2x - 4y + 2 = 0$ 的交点;

(4)过点 $(-1,2)$,且与原点的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$;

(5)过点 $(-1,2)$,且平行于直线 $y = 4$;

(6)过点 $(0,-5)$,且垂直于直线 $2x - 3y + 2 = 0$;

(7)过直线 $x - 2y + 1 = 0$ 和 $2x + y + 1 = 0$ 的交点,且垂直于直线 $x - y - 1 = 0$;

(8)过点 $(-1, 2)$,且平行于过点 $(-3, -1), (3, 5)$ 的直线.

9. 直线 $4x + 3y - 10 = 0$, $2x - y - 10 = 0$ 和直线 $ax + 2y + 8 = 0$ 相交于一点,求 a 的值.

第四节 点到直线的距离

一、主要内容

(1) **点到直线的距离**: 在直角坐标系中, 连结直线外一点和直线上的点所组成的线段中, 垂线段最短, 称为**点到直线的距离**.

(2) **点到直线的距离计算公式**:

设点 $P_0(x_0, y_0)$ 为直线 $Ax + By + C = 0$ 外一点, 则点到直线的距离为

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

二、巩固训练

1. 选择题:

(1) 点 $(2, 1)$ 到直线 $3x - 4y + 2 = 0$ 的距离是().

A. $\frac{4}{5}$

B. $\frac{5}{4}$

C. $\frac{4}{25}$

D. $\frac{25}{4}$

(2) 点 $(0, 5)$ 到直线 $y = 2x$ 的距离是().

A. $\frac{5}{2}$

B. $\sqrt{5}$

C. $\frac{3}{2}$

D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

2. 填空题:

(1) 原点到直线 $x + 2y - 5 = 0$ 的距离为_____.

(2) 两条平行直线 $4x + 3y + 8 = 0$ 与 $4x + 3y - 2 = 0$ 之间的距离为_____.

3. 已知点 $A(1,3), B(3,1), C(-1,0)$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

三、自我检测

1. 求点 $(1,2)$ 到下面直线的距离.

(1) $4x + 3y - 2 = 0$; (2) $3x + 4y - 2 = 0$.

2. 已知点 P 是 y 轴上一点, 且点 P 到直线 $3x - 4y + 6 = 0$ 的距离为 6, 求点 P 的值.

3. 求平行直线 $2x + y - 2 = 0$ 和 $4x + 2y + 1 = 0$ 间的距离.

单元自测题

一、选择题

1. 已知直线 l 经过原点和点 $(-1, -1)$, 则它的倾斜角是().

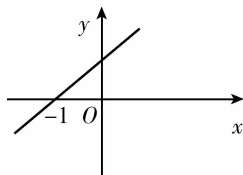
A. $\frac{\pi}{4}$

B. $\frac{5\pi}{4}$

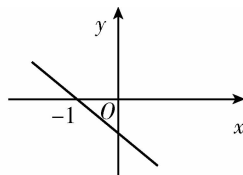
C. $\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{5\pi}{4}$

D. $-\frac{\pi}{4}$

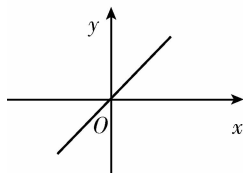
2. 直线 $y = ax + b (a + b = 0)$ 的图像可能是().



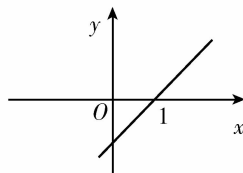
A.



B.



C.



D.

3. 已知直线经过点 $A(0,4)$ 和点 $B(1,2)$, 则直线 AB 的斜率为().

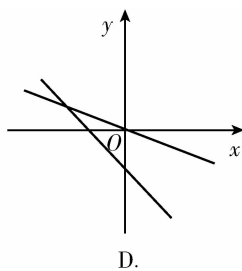
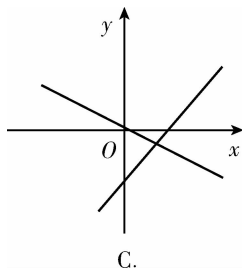
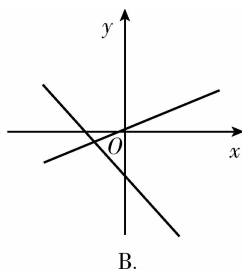
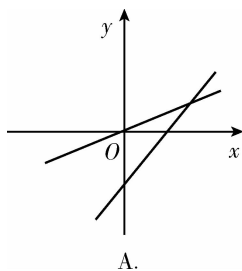
A. 3

B. -2

C. 2

D. 不存在

4. 在同一直角坐标系中, 表示直线 $y=ax$ 与 $y=x+a$ 的正确选项是().



5. 如果直线 $ax+2y+2=0$ 与直线 $3x-y-2=0$ 平行, 则 a 的值等于().

A. -3

B. -6

C. $-\frac{3}{2}$

D. $\frac{2}{3}$

6. 如果直线 $ax+2y+1=0$ 与直线 $x+y-2=0$ 互相垂直, 则 a 的值等于().

A. 1

B. $-\frac{1}{3}$

C. $-\frac{2}{3}$

D. -2

7. 直线 $x+3y+2=0$ 与直线 $3x+9y-4=0$ 的位置关系是().

A. 两条重合的直线

B. 两条互相平行的直线

C. 两条斜交的直线

D. 两条互相垂直的直线

8. 过点 $(-1,1)$ 和 $(3,9)$ 的直线在 x 轴上的截距是().

A. $-\frac{3}{2}$

B. $-\frac{2}{3}$

C. $\frac{2}{5}$

D. 2

9. 点 $P(-1, 2)$ 到直线 $8x - 6y + 15 = 0$ 的距离为().

A. 2

B. $\frac{1}{2}$

C. 1

D. $\frac{7}{2}$

二、填空题

1. 若直线过点 $(1, 2)$ 和 $(4, 2 + \sqrt{3})$, 则此直线的倾斜角是_____.

2. 经过点 $(3, 12)$ 和 $(9, 4)$ 的直线在两个坐标轴上的截距的和是_____.

3. 若直线 $x + ay + 2 = 0$ 和 $2x + 3y + 1 = 0$ 互相垂直, 则 $a =$ _____.

4. 直线 AB 的中点为 $(1, 2)$, 端点 A 为 $(3, 1)$, 则端点 B 的坐标为_____.

三、解答题

1. 已知三角形 ABC 的顶点坐标为 $A(-1, 5), B(-2, -1), C(4, 3)$, M 是 BC 边上的中点.

(1) 求 AB 边所在的直线方程;

(2) 求中线 AM 的长;

(3)求 AB 边的高所在直线方程.

2. 已知直线 l 满足下列两个条件:

(1)过直线 $y=-x+1$ 和 $y=2x+4$ 的交点;

(2)与直线 $x-3y+2=0$ 垂直.

求直线 l 的方程.

3. 求垂直于直线 $x+3y-5=0$, 且与点 $P(-1,0)$ 的距离是 $\frac{3\sqrt{10}}{5}$ 的直线的方程.

4. 求过直线 $x-2y+1=0$ 和 $3x+y+3=0$ 的交点, 且平行于直线 $5x-y+11=0$ 的直线方程.

5. 当 m, n 分别取何值时, 直线 $3x-my+1=0$ 和 $2x-y+n=0$:
(1) 平行; (2) 垂直.

6. 已知两条直线 $l_1: x + m^2y + 6 = 0$, $l_2: (m-2)x + 3my + 2m = 0$, 当实数 m 为何值时, 直线 l_1 与 l_2 :

(1) 相交; (2) 平行; (3) 重合.

7. 已知过原点的直线 l 与点 $(0, 3)$ 和 $(5, 0)$ 的距离相等, 求直线 l 的方程.

8. 若直线 $2ax + 3y - 1 = 0$ 与 $x - ay + 1 = 0$ 的交点在 x 轴上, 求 a 的值.

9. 已知直线 l 过两条直线 $4x + y - 10 = 0$ 和 $x - 4y + 6 = 0$ 的交点, 且垂直于直线 $3x + 6y + 2 = 0$, 求直线 l 的方程.

10. 在直线 $y = x$ 上求点 M , 使其到直线 $3x - 4y + 6 = 0$ 的距离为 2.