

结构力学是土木工程等专业的技术基础课,是研究工程结构力学性能的学科,是结构设计的基础。将复杂的实际结构简化为既能分析又符合工程特征的计算简图至关重要。

本章主要介绍结构力学的研究对象和任务、结构的计算简图等。

0.1 结构的概念及结构力学的研究对象与任务

0.1.1 结构的概念

所谓结构,是指建筑物和工程设施中承受、传递荷载而起骨架作用的部分,如房屋建筑中的梁柱体系(见图 0-1)、道路工程中的桥梁(见图 0-2)和隧洞、水利工程中的水坝和渡槽等。

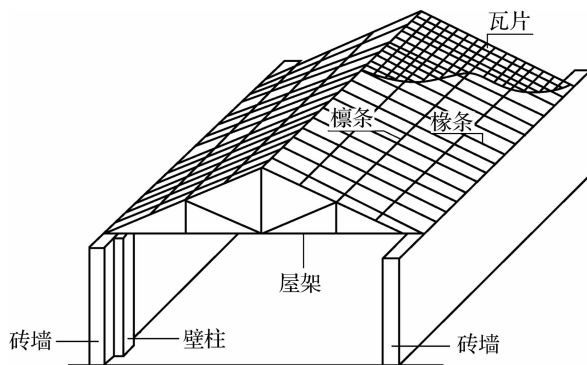


图 0-1 房屋建筑中的梁柱体系



图 0-2 道路工程中的桥梁

工程中结构的形式多种多样,根据在空间的几何形状,可将结构分为实体结构、板壳结构和杆件结构。

(1)实体结构。结构的三维尺度大小相仿,这样的结构形式称为实体结构,如建筑工程中的基础等。

(2)板壳结构。结构的一维尺度比另外两维尺度小得多,这样的结构形式称为板壳结构,如房屋中的楼板和屋盖、水工建筑中的拱坝等。

(3)杆件结构。结构的一维尺度比另外两维尺度大得多,这样的结构形式称为杆件,如房屋中的梁、柱,桥梁和隧洞中的拱等。由杆件组成的结构体系称为杆件结构(杆系结构)。

0.1.2 结构力学的研究对象与任务

结构力学的研究对象以杆件结构为主,结构力学中的结构通常指的是杆件结构。

力学的任务是根据力学原理研究在荷载等外界因素作用下物体的力学性能,如理论力学讨论物体机械运动的基本规律,材料力学讨论构件的强度、刚度、稳定性等问题。

结构力学的任务是研究在荷载等外界因素作用下结构的内力和变形,讨论结构的强度、刚度、稳定性和动力响应,以及结构的组成规律,具体包括以下三个方面:

(1)讨论结构的组成规律和合理形式,以及结构计算简图的合理选择。

(2)讨论结构内力和变形的计算方法,进行结构的强度和刚度验算。

(3)讨论结构在动力荷载作用下的动力响应及结构的稳定性。

结构力学根据力学的基本原理,应用力系平衡条件(平衡方程)、运动和变形连续条件(几何方程)、应力与变形间的物理条件(本构方程)三个方面的内容,主要从理论上分析结构的上述力学性能。应力与变形间的物理条件(本构方程)由结构试验获得。

0.2 结构的简化

0.2.1 由实际结构到计算简图

在实际工程中,结构的形式多种多样,完全按照结构的真实情况进行力学分析比较困难。在对实际结构进行力学计算以前,应对结构加以分析,抓住主要特征,略去次要因素,用一个简化的图形来代替实际结构,这种图形称为结构的计算简图。

对实际结构进行简化,使计算简图能反映实际结构的主要性能,同时便于计算,是力学分析的基础和工程应用的关键。结构计算简图的抽象包括材料的简化、结构的简化、荷载的简化。

在结构计算中,一般假设构件的材料为连续的、均匀的、各向同性的、完全弹性或弹塑性的。上述假设在小变形条件下,对于金属材料是符合实际情况的,对于混凝土、砖石等材料近似满足,对于木材等具有纹理性质的材料有较大误差。

一般结构都是空间结构,各部分相互连接成为一个空间体系,以承受各个方向的荷载。在多数情况下,常忽略一些次要约束而将实际结构分解为平面结构,或将结构简化到特征面上讨论,使计算得以简化。本教材主要讨论平面结构的计算问题,对空间结构只做简略介绍。

0.2.2 平面结构的简化

1. 杆件的简化

杆件的截面尺寸(宽度、高度)一般比杆件的长度小得多,截面上的应力根据截面的内力(弯矩、轴力、剪力)来确定。因此,在计算简图中,杆件用其轴线来表示,杆件间的连接区用结点来表示,杆长用结点间的距离来表示,而荷载的作用点也平移到轴线上。当杆件的截面尺寸较大(超过长度的 $1/4$)时,杆件的简化存在较大的误差。

2. 杆件间连接的简化

杆件间的连接区简化为结点。结点通常简化为以下两种形式:

(1)刚结点。图 0-3(a)为现浇钢筋混凝土梁柱连接点,被连接的杆件在连接处既不能产生相对移动,也不能相对转动,即杆件间不仅可以传递力,也可以传递力矩。这种情况可简化为图 0-3(b)所示的刚结点。

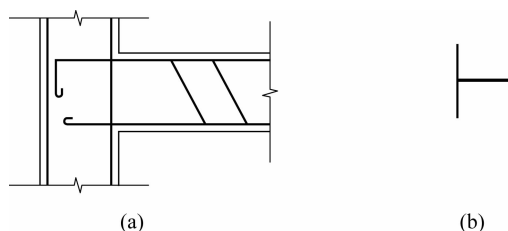


图 0-3 现浇钢筋混凝土梁柱连接点和刚结点

(2)铰接点。图 0-4(a)为木屋架的连接点,被连接的杆件在连接处不能产生相对移动,可以发生微小的相对转动,即杆件间只能传递力,不能传递力矩。这种情况可简化为图 0-4(b)所示的铰接点。此外,预制钢筋混凝土构件的连接及钢结构的栓接一般也可简化为铰接点。铰接点是一种理想情况,分析简便,一般能满足工程误差的要求。

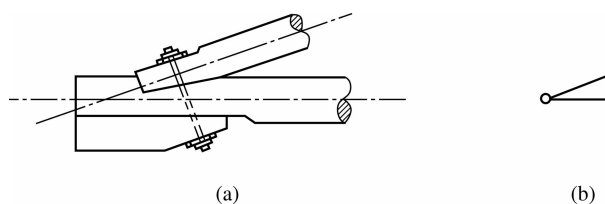


图 0-4 木屋架的连接点和铰接点

3. 结构与基础间连接的简化

结构与基础的连接区简化为支座。按其受力特征,一般简化为以下四种情形:

(1)固定支座。结构被基础完全固定[见图 0-5(a)],结构既不能移动,也不能转动,基础对结构施加三个约束反力 F_x 、 F_y 和 M 。固定支座在计算简图中可按图 0-5(b)表示。

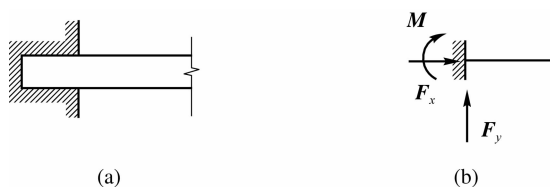


图 0-5 固定支座

(2) 铰支座。结构被支承的部分相对基础不能移动,但可以转动[见图 0-6(a)],基础能提供两个反力 F_x 和 F_y 。铰支座在计算简图中用两根相交的支杆来表示,如图 0-6(b)所示。

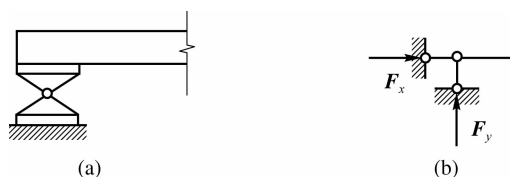


图 0-6 铰 支 座

(3) 滚轴支座。结构被支承的部分相对基础可以转动和水平移动,不能竖向移动[见图 0-7(a)],基础所提供的反力只有竖向反力 F_y 。滚轴支座在计算简图中用一根支杆来表示,如图 0-7(b)所示。

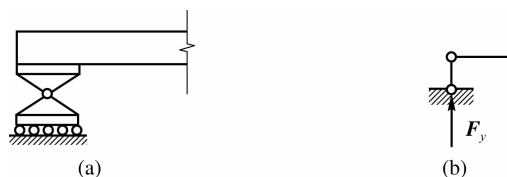


图 0-7 滚 轴 支 座

(4) 定向支座。结构被支承的部分相对基础不能转动,但可沿一个方向平行滑动[见图 0-8(a)],基础只能提供反力矩 M 和一个反力 F_y 。定向支座在计算简图中用两根平行支杆来表示,如图 0-8(b)所示。

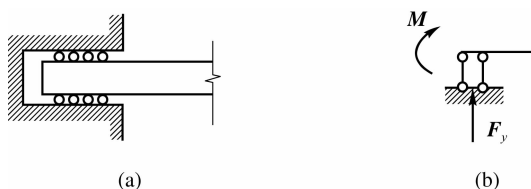


图 0-8 定 向 支 座

在实际结构中,如果基础的约束能力达不到上述理想状态,则在被限制的方向上可产生部分位移,且约束反力与位移量有关,构成弹性支座。

0.2.3 杆件结构的分类

杆件结构的分类,实际上是指结构计算简图的分类。

1. 按受力和变形特性分类

按受力和变形特性,杆件结构可分为梁、刚架、桁架、组合结构、拱等。

(1)梁。梁是一种受弯构件,其轴线通常为直线。梁可以是单跨的,也可以是多跨的[见图 0-9(a)]。

(2)刚架。刚架是由梁和柱组成的结构[见图 0-9(b)],其结点通常为刚结点。

(3)桁架。桁架是由直杆组成的结构[见图 0-9(c)],其所有结点都为铰接点。在平面结点力的作用下,各杆受轴向力作用。

(4)组合结构。组合结构是由桁架和梁或刚架组合在一起而形成的结构[见图 0-9(d)],其中含有组合结点。

(5)拱。拱轴线多为曲线,其力学特点是在竖向荷载作用下能产生水平支座反力(推力),截面内既有弯曲内力,又有轴向力,如图 0-9(e)所示。

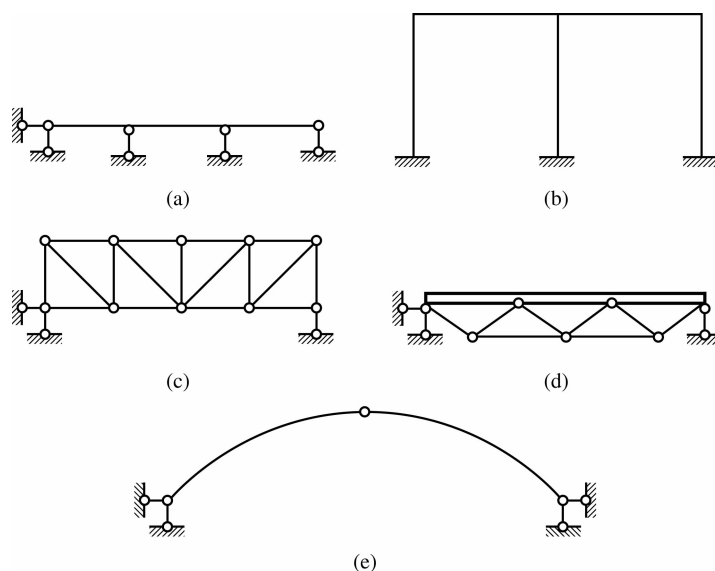


图 0-9 杆件结构的分类

2. 按几何特性分类

按几何特性,杆件结构可分为平面结构和空间结构。在平面结构中,各杆的轴线和外力的作用线都在同一平面内,图 0-10 为一平面桁架结构。若各杆轴线和外力作用线不在同一平面内,则此结构称为空间结构,图 0-11 为一空间刚架结构。大多数结构在设计中通常是按平面结构进行计算的。在有些情况下,必须考虑结构的空

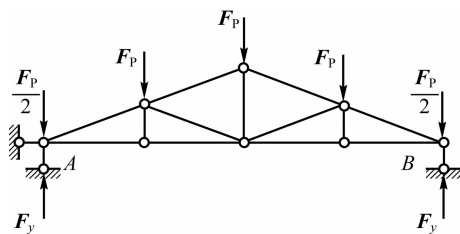


图 0-10 平面桁架结构

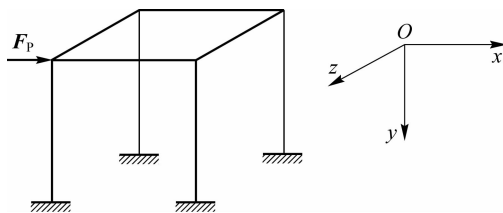


图 0-11 空间刚架结构

3. 按计算特性分类

按计算特性,杆件结构可分为静定结构和超静定结构。如果结构的杆件内力(包括反力)可由平衡条件唯一确定,则此结构称为静定结构。如果杆件内力不能由平衡条件唯一确定,而必须同时考虑变形条件才能唯一确定,则此结构称为超静定结构。

0.2.4 结构简化实例

如图 0-1 所示的屋架结构,上部物体的重力荷载通过椽条和檩条作用在屋架上,当进行重力作用分析时,可以将结构和荷载简化到平面内。若结构由木结构构成,则特征面内的计算简图如图 0-10 所示。若为现浇混凝土结构,则结构可简化为图 0-12 所示的形式,但这样计算就复杂得多。

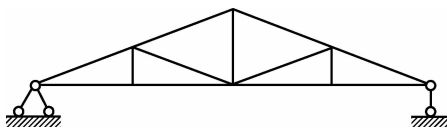


图 0-12 现浇混凝土结构简化

如图 0-2 所示的桥梁结构,因为结构和荷载有一个对称面,所以既可以将结构简化到对称面上进行分析,也可以取半结构在平面内进行分析,其计算模型可以简化为图 0-13 所示的形式。

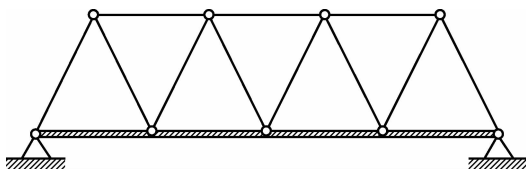


图 0-13 桥梁结构的计算模型

应该指出,确定结构的计算简图,特别是确定复杂结构的计算简图,不是一件容易的事情。它需要有一定的专业知识和实际经验,并对结构各部分的构造、相互作用和受力情况有正确的判断。有时需要借助模型试验或现场实测来确定合理的计算简图。一般情况下,在初步设计中采用较简单的计算简图,在最终设计中改用计算精确的计算简图。计算机的应用为采用较精确的计算简图提供了更多的可能性。

0.3 荷载的简化及分类

荷载是主动作用于结构的外力,如结构的自重、加于结构的土压力等。除了外力,还有其他因素可以使结构产生内力或变形,如温度变化、基础沉陷、材料收缩等。从广义上说,这些因素也可以称为荷载。

对结构进行计算以前,必须先确定结构所受的荷载。荷载的确定在结构设计中极为重要。荷载如果估计过大,则设计的结构会过于笨重,造成浪费;荷载如果估计过小,则设计的结构将不够安全。荷载的精确确定常常是比较复杂的。荷载规范总结了以往的设计经验和科学研究成果,可供设计者参考应用。但在不少情况下,设计者需要结合实际情况进行调查研究,才能合理地确定荷载。

0.3.1 荷载的简化

结构承受的荷载可分为体积力和表面力两大类。体积力是指其他物体作用于结构中每点的力,如重力、惯性力等;表面力是指由其他物体通过接触面传递给结构的作用力,如土压力、车辆的车轮压力等。在杆件结构中把杆件简化为轴线,因此不管是体积力还是表面力,都可以简化为作用在杆件轴线上的力。荷载按其分布情况可简化为集中荷载和分布荷载。

0.3.2 荷载的分类

1. 按荷载作用时间的长短分类

按荷载作用在结构上的时间长短,荷载可分为恒载和活载。

(1)恒载。恒载是指长期作用在结构上的不变荷载,如结构的自重或土压力。

(2)活载。活载是指在建筑物施工和使用期间短期存在的荷载,如楼面荷载、吊车荷载、风荷载和雨雪等屋顶荷载等。

2. 按荷载作用的位置分类

按荷载作用在结构上的位置,荷载可分为固定荷载和移动荷载。

(1)固定荷载。进行结构计算时,恒载和大部分活载(如雪荷载、风荷载)在结构上作用的位置可以认为是固定的,这种荷载称为固定荷载。

(2)移动荷载。有些活载在结构上的位置是移动的,如吊车梁上的吊重、桥梁上的车辆,这种荷载称为移动荷载。

3. 按荷载作用的性质分类

按荷载作用的性质,荷载可分为静力荷载和动力荷载。

(1)静力荷载。静力荷载的量值、方向和位置不随时间变化或变化极为缓慢,不使结构产生显著的加速度,因而惯性力的影响可以忽略。例如,结构的自重和其他恒载就是静力荷载。

(2)动力荷载。动力荷载是随时间迅速变化或在短暂时段内突然作用或消失的荷载,使结构产生显著的加速度,因而惯性力的影响不能忽略。例如,动力机械运转时产生的荷载或冲击波的压力就是动力荷载。

在设计中通常将车辆荷载、风荷载和地震荷载简化为静力荷载,但在特殊情况下要按动力荷载考虑。

0.4 结构力学的学习要求与学习方法

0.4.1 结构力学的学习要求

结构力学利用力学的基本原理研究结构的力学性能。在分析的过程中,既要用到高等数学(几何变形条件)、理论力学(平衡条件)、材料力学(物理条件)等基础课程的知识,又要为以后学习专业课程及从事实际工作提供理论基础和计算方法,所以“结构力学课程教学基本要求”对分析能力、计算能力、判断能力和自学能力的培养均提出要求。

1. 分析能力

分析能力是指对常用的杆件结构具有选择计算简图的初步能力,并能根据具体问题选择恰当的计算方法。

分析能力主要包含选择计算简图和选择计算方法:对实际结构进行简化,确定计算简图,这是进行结构力学计算的第一步;根据具体问题选择恰当的计算方法,进行力系平衡分析和结构变形分析,这是结构力学的基本要求。

2. 计算能力

计算能力是指具有对各种静定、超静定结构进行计算的能力,初步具有使用结构计算程序的能力。

针对不同的结构确定计算步骤,实施具体计算。在计算能力中,具体计算是基础,应达到正确、熟练、灵活运用水平;计算机的发展对结构力学学科产生了巨大的影响。不会使用计算机的人无法计算大型结构问题,无法提高计算效率,也就无法胜任新时期的工作。

3. 判断能力

判断能力是指具有对计算结果进行校核、对内力分布的合理性作出定性判断的能力。

对计算结果进行校核,具有定性判断能力,可以用简略的办法确定计算结果的合理性。设计书、计算书的正确,既能代表作者的水平,也能体现作者的严谨作风,这是未来工程师应该具有的基本素质。校核是用另外一种方法进行核算,要求校核者通晓结构分析的多种算法。

4. 自学能力

自学能力是指具有自学和阅读结构力学教学参考书的能力。

自学能力就是发挥自身主观能动性把知识变成自己的一种能力。自学应包含两个方面:一是学习新知识,二是消化已学知识。学习是一个摄取的过程,就是逐步扩大自己的知识面,增加知识积累。消化就是把已学的知识变成自己的,把书本上的结论按照自己的思路来整理,把丰富的内容概括成提纲,用自己的话来表述,让所学知识落地生根。

0.4.2 结构力学的学习方法

根据结构力学的课程特点和学习要求,要学好结构力学,必须有好的学习方法,多提问、勤练习,具有创新意识。

1. 多摄取,厚积薄发

要学好结构力学,首先要讲究学习方法,既要学会,更要会学。有人把人脑比作笔记本,学习知识应“由薄到厚,再由厚到薄”。

(1)由薄到厚。由薄到厚是指知识的摄取和积累过程。

①摄取知识是培养能力的基础,没有知识的积累就无从培养任何能力。

②在积累知识的过程中,要用心梳理,将知识点连通起来,形成一个脉络清晰的知识网。

③将摄取的知识变成自己的,将新学的知识融入自己已有的知识结构中。

(2)由厚到薄。由厚到薄是指知识的提炼过程,就是要用概括、简化、提纲挈领的方法,将每章的内容概括成三言两语,理出一门课程的主要脉络。结构力学中有许多知识点,要能够抓住贯穿全书的基本思路。学习中要培养透过现象发现规律、通过具体问题提炼一般原理的能力。

2. 多设问,深思解惑

学习中要多提问,多提问能促进多思考,多思考能出大智慧。学问,既要学又要问。做学问,不仅要会学,还要会问。要问老师、问别人,更要问自己。

老师上课注意启发,为学生留出思考的空间。首先,学生学习时要勤于思考,为自己开辟思考的空间。思考中要敢于提出问题,学习是解惑的过程,善于提出问题是解决问题的重要一步;正确地提出科学问题,是创新的开端。其次,从提出的问题中可以了解自己的学习程度,发现问题是好事,说明学习正在逐步深化。最后,对提出的问题要抓住不放,把深层次的问题解决了,才能真正掌握这部分知识。

3. 多练习,“实用”创新

学习是“学”和“习”的全过程,所谓“习”,就是实践,也就是应用。

“习”是“学”的继续和深化:刚刚学到的知识往往是呆板的,应用过的知识就变灵活了,熟能生巧;用所学知识解决各式各样的问题,可以加深理解基本规律的多种表现形式;反复应用学过的知识可以加深记忆,经久不忘;处理问题时,往往要应用多种方法和知识,“用”能提高自身综合分析能力。“用”是对“学”的直接检验:学到的知识是否真的掌握了,做几道题就可以看出来。认认真真地学,勤勤恳恳地用,“学”可以获得知识,“用”可以培养能力。

结构力学课程中的直接实践是做练习题,不做一定数量的习题,很难理解结构力学的基本概念和方法,很难达到课程所提出的能力培养要求。培养结构力学课程教学基本要求提出的四种能力,要从作业开始:作业要整洁、清晰,养成严谨的学习习惯。

做题、练习是学好结构力学的重要环节。做题时要步骤分明,思路清楚,图形简明,数据准确。练习应在理解的基础上做题,通过做题来加深理解,要养成校核的习惯,学会判断、抓错和改错。

特别是计算机被引入结构力学后,增强了分析大型结构的能力。在大型结构分析计算中,不会作出定性判断,不会抓错、改错是不行的。计算机并不排斥理论,而是要求我们更深、更活地掌握力学理论。

平面体系的几何构成分析

由杆件所组成的平面体系分为几何不变体系和几何可变体系,只有几何不变体系才能作为结构。几何不变体系分为无多余约束几何不变体系和有多余约束几何不变体系。

本章对平面体系的几何构成进行分析,从理论上确定体系属于哪种几何构成形式,这既是平面杆系内力计算的先决条件,也是用力法分析超静定结构的基础。

1.1 几何构成分析的几个概念

1.1.1 刚体与变形体

1. 刚体

刚体是指在外力作用下不发生形状变化的理想构件或结构。刚体是理论上的理想构件,形状不变是相对的。在平面体系中,刚体又被称为刚片。

2. 变形体

变形体是指在外力作用下发生形状变化的构件或结构。实际结构构件都是变形体。

注意:本章只分析结构的几何构成性质,不涉及外力,因此将构件视为刚体。

1.1.2 几何不变体系与几何可变体系

三角形具有稳定性,是几何不变体系的基础。

1. 三角形的稳定性

图 1-1(a)为由杆 AC、杆 BC 和基础三个刚片两两铰接组成的三角形,C 点既在杆 AC 上,又在杆 BC 上。假设基础不动,分析 C 点的运动状态。当只有杆 AC,没有杆 BC 时,C 点将以 A 点为圆心,以 AC 为半径转动,运动轨迹为 I;当只有杆 BC,没有杆 AC 时,C 点将以 B 点为圆心,以 BC 为半径转动,运动轨迹为 II;当杆 AC 和杆 BC 同时存在时,C 点应该沿轨迹 I 和轨迹 II 的共同部分运动,而轨迹 I 与轨迹 II 交于 C 点,故 C 点为不动点,如图 1-1(b)所示。因此,铰接组成的 $\triangle ABC$ 具有稳定性。

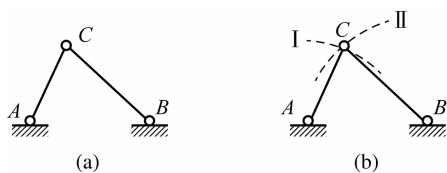


图 1-1 三角形的稳定性

2. 几何不变体系

在外部因素作用下,由刚片组成的体系不发生杆件位置和体系形状的改变,这样的体系称为几何不变体系,如图 1-1(a)所示。

3. 几何可变体系

在外部因素作用下,由刚片组成的体系可发生杆件位置和体系形状的改变,这样的体系称为几何可变体系,如图 1-2 所示。

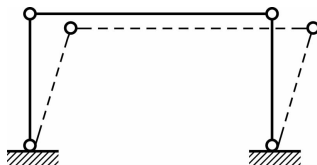


图 1-2 几何可变体系

1.1.3 自由度

自由度是指刚片或由刚片组成的体系所具有的独立运动方式的个数或确定体系位置所需的独立坐标的数目。

1. 点的自由度

在平面内,一个点有两个自由度。如图 1-3(a)所示, A 点移动到 A' 点可以通过 Δx 和 Δy 两种运动方式或两个独立坐标参数来描述。

2. 刚片的自由度

在平面内,一个刚片有三个自由度。如图 1-3(b)所示,刚片从 AB 移动到 $A'B'$ 可以通过 Δx 、 Δy 和 θ 三种运动方式或三个独立坐标参数来描述。

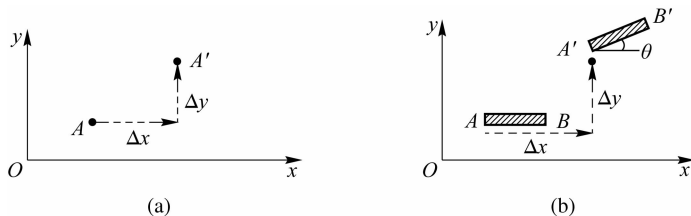


图 1-3 自 由 度

1.1.4 约束

约束是指减少自由度的装置。可以减少一个自由度的装置是一个约束。这些装置主要有链杆、铰接点(铰支座)、刚结点(固定端支座)及虚铰等。

1. 链杆

一根链杆相当于一个约束。如图 1-4 所示,刚片在平面内有三个自由度,在 A 点加一根链杆与基础相连,当钢片从 AB 变化到 $A'B'$ 时,可以理解为有一个水平位移后又有一个转角;也可以理解为既绕 O 点转动,又绕 A 点转动。可见,链杆约束后刚片还有两个自由度,因此一根链杆起到了一个约束的作用。

2. 铰接点

一个铰接点相当于两个约束。如图 1-5 所示,刚片 I 和刚片 II 由铰 O 连接,连接前,一个刚片的自由度为 3,两个刚片的自由度为 6,经铰连接后,刚片 I 和刚片 II 共同运动,同时刚片 I 和刚片 II 可以发生绕 O 点的相对转动,则自由度为 $3+1=4$ 。因此,一个铰的约束数量为 $6-4=2$,一个铰相当于两个约束。

3. 刚结点

一个刚结点相当于三个约束。如图 1-6 所示,刚片 I 和刚片 II 经刚结点 A 连接后形成一个新的刚片,可以完全共同运动,因此,自由度由 6 降为 3,表明一个刚结点的约束数量为 3。

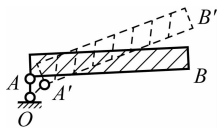


图 1-4 链杆

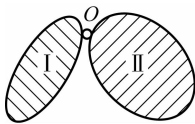


图 1-5 铰接点

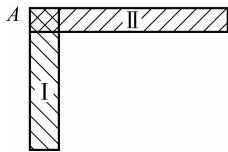


图 1-6 刚结点

4. 虚铰

如图 1-7(a)所示,刚片 I 相对于基础有三个自由度,当刚片 I 与基础由两根链杆相连时,每根链杆相当于一个约束,则刚片 I 相对于基础还有一个自由度。由于 B 点既在刚片 I 上又在杆 AB 上,所以 B 点的运动方向垂直于杆 AB 。同理, D 点的运动方向也垂直于杆 CD 。因此,刚片 I 相对于基础的运动为绕着链杆 AB 和链杆 CD 的交点 O 转动,称 O 点为虚铰。在刚片 I 的转动过程中,链杆 AB 和链杆 CD 的角度发生变化,交点 O 的位置也随之变化,所以 O 点也称为瞬铰。

如图 1-7(b)所示,刚片 I 和刚片 II 由链杆 AB 及链杆 CD 连接,刚片 I 相对于刚片 II 仍为绕 O 点转动, O 点为虚铰。

如图 1-7(c)所示,当连接刚片 I 和刚片 II 的链杆 AB 与链杆 CD 在 O 点有交叉时, O 点为虚铰。

如图 1-7(d)所示,当连接刚片 I 和刚片 II 的链杆 AB 与链杆 CD 平行时,可视为在无穷远处形成虚铰。

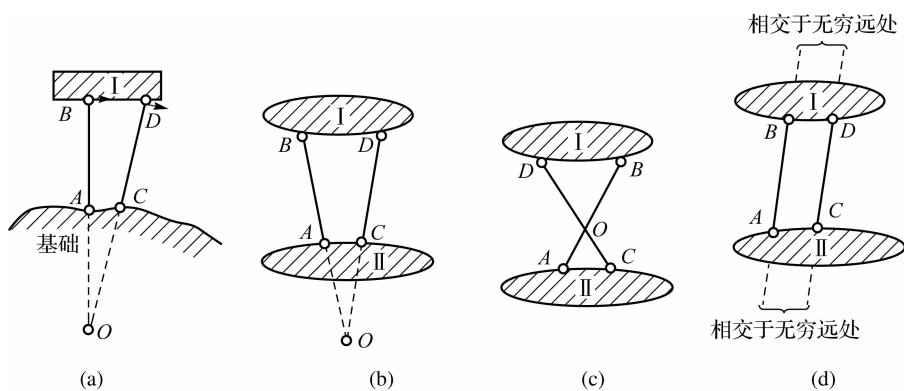


图 1-7 虚 铰

从约束效力上看,由两根链杆组成的虚铰等同于实铰,可减少两个自由度,相当于两个约束。反过来说,一个实铰也可以用两根链杆来代替。

1.1.5 多余约束和必要约束

如果体系增加或去掉约束后自由度不变,这样的约束称为多余约束。

如图 1-8(a)所示,刚片 AB 由铰 A 及链杆 1 与基础相连接。连接前,钢片 AB 相对于基础有三个自由度;连接后,体系的自由度为零。如图 1-8(b)所示,增加了链杆 2,体系的自由度仍然为零,则称链杆 2 为一个多余约束。



图 1-8 多 余 约 束

如果体系增加或去掉约束后自由度发生改变,这样的约束称为必要约束。显然图 1-8(b)所示的体系中,水平链杆为必要约束,而三根竖向链杆中的任意一根都可被视为多余约束。

1.1.6 几何瞬变体系

在某一特定位置满足几何可变体系的条件,但经微量运动后,成为几何不变体系,这样的体系称为几何瞬变体系。

如图 1-9(a)所示,A 点在平面中相对于基础有两个自由度,由链杆 AB 和链杆 AC 与基础相连,此时三个铰在一条直线上。当只有链杆 AB,没有链杆 AC 时,A 点以链杆 AB 为半径绕 B 点转动,运动轨迹为 I;当只有链杆 AC,没有链杆 AB 时,A 点以链杆 AC 为半径绕 C 点转动,运动轨迹为 II;当链杆 AB 和链杆 AC 同时存在时,A 点应该在轨迹 I 和轨迹 II 的共同部分运动,而轨迹 I 和轨迹 II 正好在 A 点相切[见图 1-9(b)],则 A 点可以沿切线方向有一个微量运动,微量运动后,组成铰接三角形,成为几何不变体系,如图 1-9(c)所示。

三铰共线的体系为几何瞬变体系,几何瞬变体系也属于几何可变体系,不能作为土木工程中的结构体系。

如图 1-9(d)所示,当 A 点受一个集中力 F_P 时,取隔离体如图 1-9(e)所示。

由 $\sum F_y = 0$, 有

$$F_P - (F_N \sin \theta + F_N \sin \theta) = 0$$

所以

$$F_N = \frac{F_P}{2 \sin \theta}$$

由于 θ 很小,当 $\theta \rightarrow 0$ 时, $\sin \theta \rightarrow 0$, 所以 $F_N \rightarrow \infty$ 。

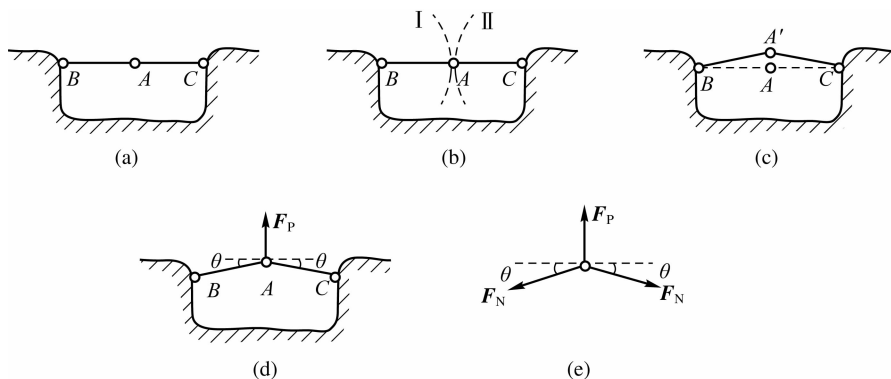


图 1-9 几何瞬变体系

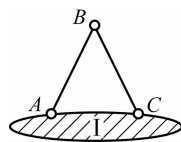
1.2 几何不变体系的组成规律

几何不变体系的组成规律可由铰接三角形的稳定性演变而来,铰接三角形的稳定性是体系几何构成分析的基础。

1.2.1 点与刚片的连接

规律 1: 一个点与一个刚片由不共线的两根链杆相连,组成无多余约束的几何不变体系。

如图 1-10 所示,点 B 与刚片 I 由链杆 AB 和链杆 BC 相连组成几何不变体系。它的本质是在铰接三角形中,将其中的一根链杆视为刚片 I。



如图 1-10 所示的不共线的链杆 AB 和链杆 BC,称为二元体。在一个体系上加二元体或减二元体不影响这个体系的几何构成性质。

图 1-10 点与刚片的连接

在规律 1 中强调两根链杆不共线,实质上是为了避免出现瞬变体系。

1.2.2 两个刚片之间的连接

规律 2: 两个刚片由一个铰和一根链杆相连,且三个铰不共线,组成无多余约束的几何不变体系。

如图 1-11 所示,刚片 I 与刚片 II 由铰 A 及链杆 1 相连组成几何不变体系,它的本质是在铰接三角形中,将其中的两根链杆改为刚片。

规律 2 中强调的三个铰不共线与规律 1 中强调的两根链杆不共线说的是同一个问题。

推论 1: 两个刚片由不完全平行也不全交于一点的三根链杆相连, 组成无多余约束的几何不变体系。

如图 1-12 所示, 刚片 I 与刚片 II 由链杆 1、链杆 2 和链杆 3 相连组成无多余约束的几何不变体系。这里相当于用瞬铰的概念将图 1-11 中的铰 A 替换为链杆 2 和链杆 3。

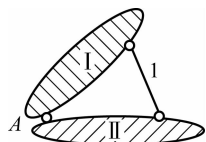


图 1-11 规律 2

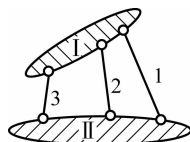
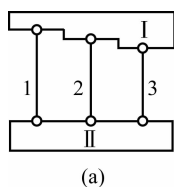


图 1-12 推论 1

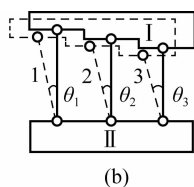
在推论 1 中强调三根链杆不完全平行。三根链杆平行分为以下两种情况:

情况 1: 三根链杆不完全等长, 但平行。如图 1-13(a) 所示, 假设刚片 II 不动, 由于链杆 1、2、3 平行, 则刚片 I 可以产生水平运动; 如图 1-13(b) 所示, 当产生一个微小的水平位移后, 链杆 1、2、3 则不再保持平行, 原体系变为几何不变体系, 因此原体系为瞬变体系。

情况 2: 三个链杆等长且平行。如图 1-14(a) 所示, 假设刚片 II 不动, 则刚片 I 可以发生水平运动; 如图 1-14(b) 所示, 当产生一个微小位移后, 链杆 1、2、3 仍然保持平行, 刚片 I 还可继续做水平运动, 因此该体系为常变体系。

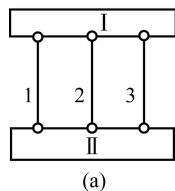


(a)

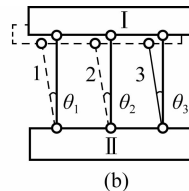


(b)

图 1-13 情况 1



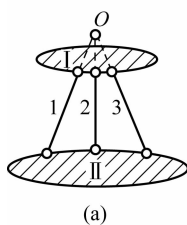
(a)



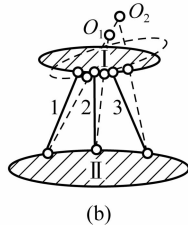
(b)

图 1-14 情况 2

在推论 1 中强调三根链杆不能交于一点。如图 1-15(a) 所示, 由于链杆 1、2、3 交于 O 点, 假设刚片 II 不动, 则刚片 I 可以绕 O 点转动; 如图 1-15(b) 所示, 当发生微小转动后, 链杆 1、2、3 不再交于同一点, 则体系为瞬变体系。



(a)



(b)

图 1-15 三根链杆交于一点

1.2.3 三个刚片之间的连接

规律 3: 三个刚片由不共线的三个铰两两相连, 组成无多余约束的几何不变体系。

如图 1-16(a) 所示, 三个刚片由铰 A、铰 B 和铰 C 相连组成几何不变体系。它的本质是

将铰接三角形中的三根杆均视为刚片。

推论 2: 根据连接两个刚片的两根链杆可以组成一个虚铰的条件, 三个刚片之间可以由两个铰和两根链杆、一个铰和四根链杆或六根链杆相连, 分别如图 1-16(b)、(c)、(d) 所示。此时, 特别注意虚铰的相互位置。

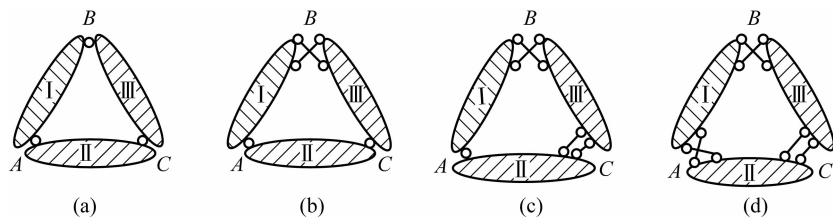


图 1-16 三个刚片之间的连接

对于推论 2, 应特别注意虚铰在无穷远处时的特性。

(1) 如图 1-17(a) 所示, 刚片 I 和刚片 II 由两根平行的链杆相连, 虚铰为 $O_{I\text{II}}$ 。当铰 A 与铰 B 的连线与 $O_{I\text{II}}$ 同方向时, 为瞬变体系; 否则为无多余约束的几何不变体系。

(2) 如图 1-17(b) 所示, 虚铰 $O_{I\text{II}}$ 、 $O_{I\text{III}}$ 和 $O_{II\text{III}}$ 都在无穷远处, 可理解为三铰共线于无穷远处, 为瞬变体系。

(3) 如图 1-17(c) 所示, 虚铰 $O_{I\text{III}}$ 与 $O_{II\text{III}}$ 都在无穷远处, 但方向不同, 而虚铰 $O_{I\text{II}}$ 不在无穷远处, 可理解为三铰不共线, 为无多余约束的几何不变体系。

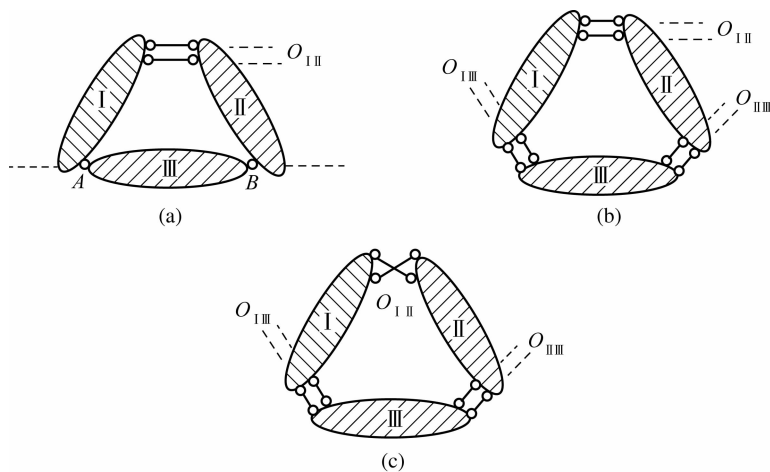


图 1-17 虚铰在无穷远处时的特性

1.3 计算自由度与复约束

1.3.1 计算自由度

1. 计算自由度的公式

计算自由度是对体系进行几何构成分析的辅助工具, 是将各研究对象的自由度总数减

去全部约束总数而得到的。

计算自由度=各研究对象的自由度之和-全部约束的数量 (1-1)

(1)选择刚片为研究对象。在平面杆件体系中,若刚片和刚片之间、刚片和基础之间通过链杆、铰接点和刚结点进行连接,则可按式(1-2)得到计算自由度。

$$W=3m-(r_1+2r_2+3r_3) \quad (1-2)$$

式中, W 为计算自由度; m 为自由度为 3 的刚片的数量; r_1 为约束为 1 的简单链杆的数量; r_2 为约束为 2 的简单铰接点或较支座的数量; r_3 为约束为 3 的简单刚结点或固定支座的数量。

(2)选择点为研究对象。在平面杆件体系中,若所有杆件之间均视为铰接,则可按式(1-3)得到计算自由度。

$$W=2j-r_1 \quad (1-3)$$

式中, W 为计算自由度; j 为铰接点的数量; r_1 为简单链杆的数量。

2. 计算自由度的三种情况

体系的计算自由度与实际自由度既有联系又有不同,在式(1-2)和式(1-3)中没有考虑局部有多余约束的情况。

对于如图 1-18 所示的体系,利用式(1-2)得到的计算自由度为

$$W=3 \times 2 - (1 + 2 \times 1 + 3) = 0$$

但图 1-18(a)为无多余约束的几何不变体系;图 1-18(b)为几何可变体系,由于在 AB 段有多余约束,因此 BC 段为可变体系。



图 1-18 计算自由度

如图 1-19 所示,图 1-19(a)为无多余约束的几何不变体系,图 1-19(b)为有一个多余约束的几何不变体系,图 1-19(c)为有两个多余约束的几何不变体系,图 1-19(d)为有三个多余约束的几何不变体系。

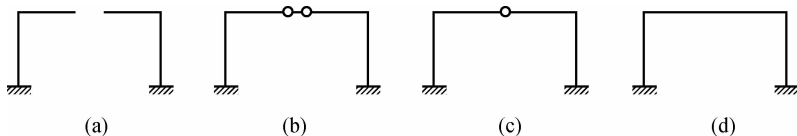


图 1-19 几何不变体系

计算自由度有如下三种情况:

- (1) $W > 0$, 说明体系一定有自由度,几何可变,但不能断定体系有无多余约束。
 - (2) $W < 0$, 说明体系一定有多余约束,但不能断定体系有没有自由度。
 - (3) $W = 0$, 当无多余约束时,为几何不变体系;当有多余约束时,为几何可变体系。
- 瞬变体系的实质是有自由度,有多余约束。

1.3.2 复约束

1. 复链杆

如图 1-20(a)所示,连接两个铰的链杆为简单链杆。如图 1-20(b)、(c)所示,连接三个或三个以上铰的链杆为复链杆。

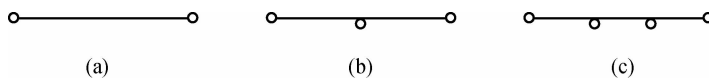


图 1-20 简单链杆和复链杆

复链杆换算为简单链杆的公式为 $2j-3$, j 为结点数。以图 1-20(b)为例,三个结点有六个自由度,由一根链杆连在一起后,还剩三个自由度,说明相当于三个约束。

2. 复铰

如图 1-21(a)所示,连接两根杆件的铰为简单铰。如图 1-21(b)所示,同时连接两根以上杆件的铰为复铰。复铰换算为简单铰的公式为 $m-1$, m 为杆件数。



图 1-21 简单铰和复铰

3. 复刚结点

如图 1-22(a)所示,连接两根杆件的刚结点为简单刚结点。如图 1-22(b)所示,连接超过两根杆件的刚结点为复刚结点。复刚结点换算为简单刚结点的公式为 $m-1$, m 为杆件数。



图 1-22 简单刚结点和复刚结点

1.4 几何构成分析示例

【例 1-1】 计算图 1-23 所示体系的自由度,并对其进行几何构成分析。

【解】 (1) 计算自由度。在图 1-23(a)中,选 A 、 B 、 C 、 D 、 E 、 F 点为研究对象,杆为约束,利用式(1-3),得

$$W = 2j - r_1 = 2 \times 6 - (8 + 4) = 0$$

在图 1-23(b)中,选 A 、 B 、 C 、 D 、 E 、 F 、 G 点为研究对象,杆为约束,利用式(1-3),得

$$W = 2j - r_1 = 2 \times 7 - (11 + 3) = 0$$

在式(1-2)和式(1-3)中, r_1 、 r_2 、 r_3 指的是简单约束;如果是复约束,则要换算为简单约束。本例中的链杆均为简单链杆。

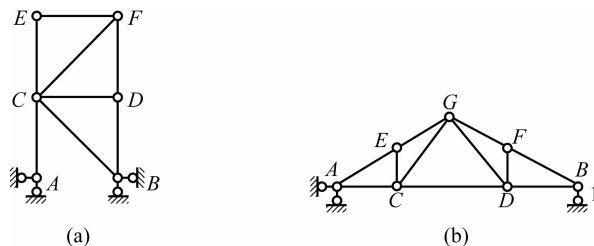


图 1-23 【例 1-1】图

(2) 几何构成分析。

①图 1-23(a)所示体系的几何构成分析。

方法一：以基础为刚片，依次增加二元体 ACB 、二元体 CDB 、二元体 CFD 、二元体 CEF ，由规律 1 可知，整个体系几何不变，无多余约束。

方法二：从 E 点、 F 点、 D 点依次去掉二元体 CEF 、二元体 CFD 、二元体 CDB 后，剩余的刚片 AC 、刚片 BC 与基础之间两两铰接，且三铰不共线，几何不变，无多余约束，则整个体系几何不变，无多余约束。

方法三： $\triangle CDB$ 与基础由铰 B 及链杆 AC 相连，且铰 A 、 C 、 B 不共线，几何不变，无多余约束，成为扩大的基础； $\triangle CEF$ 与扩大的基础由铰 C 和不过铰 C 的链杆 DF 相连，构成无多余约束的几何不变体系，即整个体系几何不变，无多余约束。

方法四： $\triangle EFC$ 、 $\triangle CDB$ 和链杆 DF 作为三个刚片，由不共线的三个铰 C 、 D 、 F 两两相连，无多余约束，几何不变。上部结构 $BCDEF$ 、链杆 AC 和基础作为三个刚片，由不共线的三个铰 A 、 B 、 C 两两相连，道理与结论同上。因此，整个体系几何不变，无多余约束。

②图 1-23(b)所示体系的几何构成分析。

方法一：从 $\triangle ACE$ 开始依次增加二元体 EGC 、 CDG 、 GFD 、 FBD ，上部体系几何不变，无多余约束。上部体系与基础由铰 A 及不过铰 A 的链杆 1 连接，满足两个刚片之间的连接规律，几何不变，无多余约束。因此，整个体系几何不变，无多余约束。

方法二： $\triangle ACE$ 加二元体 EGC ，则 $ACGE$ 几何不变，无多余约束。对于 $BDGF$ ，道理与结论同上。刚片 $ACGE$ 与刚片 $BDGF$ 由铰 G 和不过铰 G 的链杆 CD 相连，几何不变，无多余约束。同理，上部体系与基础相连，几何不变，无多余约束。因此，整个体系几何不变，无多余约束。

【例 1-2】 计算图 1-24 所示体系的自由度，并对其进行几何构成分析。

【解】 (1) 计算自由度。在图 1-24(a)中，选 ABC 和 CD 为研究对象，其余为约束，利用式(1-2)，得

$$W = 3m - (r_1 + 2r_2 + 3r_3) = 3 \times 2 - (4 + 2 \times 1 + 3 \times 0) = 0$$

在图 1-24(b)中，选 AB 和 BCD 为研究对象，其余为约束，利用式(1-2)，得

$$W = 3m - (r_1 + 2r_2 + 3r_3) = 3 \times 2 - (4 + 2 \times 1 + 3 \times 0) = 0$$

在图 1-24(c)中，选 AB 和 CD 为研究对象，其余为约束，利用式(1-2)，得

$$W = 3m - (r_1 + 2r_2 + 3r_3) = 3 \times 2 - (2 + 2 \times 1 + 3 \times 1) = -1$$

在图 1-24(d)中，选 AC 和 CD 为研究对象，其余为约束，利用式(1-2)，得

$$W = 3m - (r_1 + 2r_2 + 3r_3) = 3 \times 2 - (4 + 2 \times 1 + 3 \times 0) = 0$$

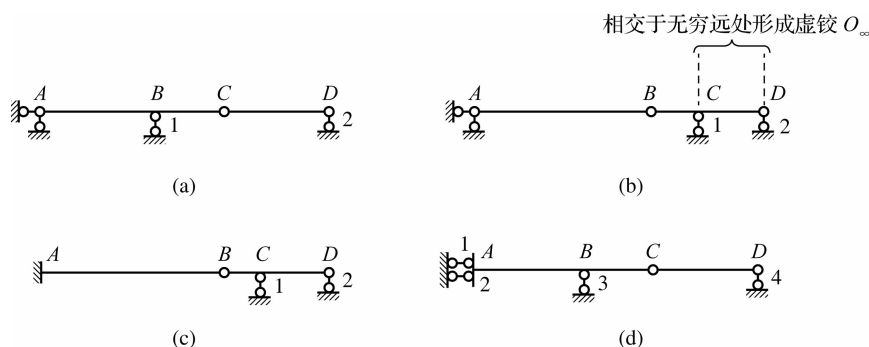


图 1-24 【例 1-2】图

(2) 几何构成分析。

①图 1-24(a)所示体系的几何构成分析。刚片 ABC 与基础由铰 A 和不过铰 A 的链杆 1 相连,几何不变,无多余约束;扩大的基础与 CD 由铰 C 和不过铰 C 的链杆 2 相连,几何不变,无多余约束。因此,整个体系几何不变,无多余约束。

②图 1-24(b)所示体系的几何构成分析。将 AB、BCD 和基础作为三个刚片,AB 与基础由铰 A 相连,AB 与 BCD 由铰 B 相连,BCD 与基础由链杆 1 和链杆 2 在无穷远处形成的虚铰 O_∞ 相连,铰 A 和铰 B 的连线与虚铰 O_∞ 的方向不同,即铰 A、铰 B 和虚铰 O_∞ 不在同一条直线上,因此,整个体系几何不变,无多余约束。

③图 1-24(c)所示体系的几何构成分析。AB 与基础由固定端 A 相连,几何不变,无多余约束,成为扩大的基础;BCD 与扩大的基础由铰 B 及链杆 1 和链杆 2 相连,有一个多余约束。因此,整个体系几何不变,有一个多余约束。

④图 1-24(d)所示体系的几何构成分析。刚片 ABC 与基础由不完全平行,也不完全相交的链杆 1、2、3 相连,几何不变,无多余约束。CD 与扩大的基础由铰 C 和不过铰 C 的链杆 4 相连,几何不变,无多余约束。因此,整个体系几何不变,无多余约束。

【例 1-3】 对图 1-25(a)、(b)所示体系进行几何构成分析。

【解】 (1)图 1-25(a)所示体系的几何构成分析。AB 为刚片 I, CD 为刚片 II, EF 为刚片 III, 如图 1-25(c)所示。刚片 I 与刚片 II 由链杆 AC 和链杆 BD 形成的虚铰 O_1 相连,刚片 I 与刚片 III 由链杆 AF 和链杆 BE 形成的虚铰 O_2 相连,刚片 II 与刚片 III 由链杆 CE 和链杆 DF 在无穷远处形成的虚铰 O_∞ 相连,虚铰 O_1 和虚铰 O_2 的连线与虚铰 O_∞ 在同一条直线上,则整个体系为瞬变体系。另外,由于体系与基础没有连接,在平面内,整个体系又有三个自由度。

(2)图 1-25(b)所示体系的几何构成分析。选择 $\triangle ADF$ 为刚片 I, $\triangle CEF$ 为刚片 II, 基础为刚片 III, 如图 1-25(d)所示。刚片 I 与刚片 II 由铰 F 相连,刚片 I 与刚片 III 由链杆 1 和链杆 BD 在 D 点形成的虚铰相连,刚片 II 与刚片 III 由链杆 2 和链杆 BE 在 E 点形成的虚铰相连,铰 F、虚铰 D 和虚铰 E 不在同一条直线上,因此整个体系为无多余约束的几何不变体系。

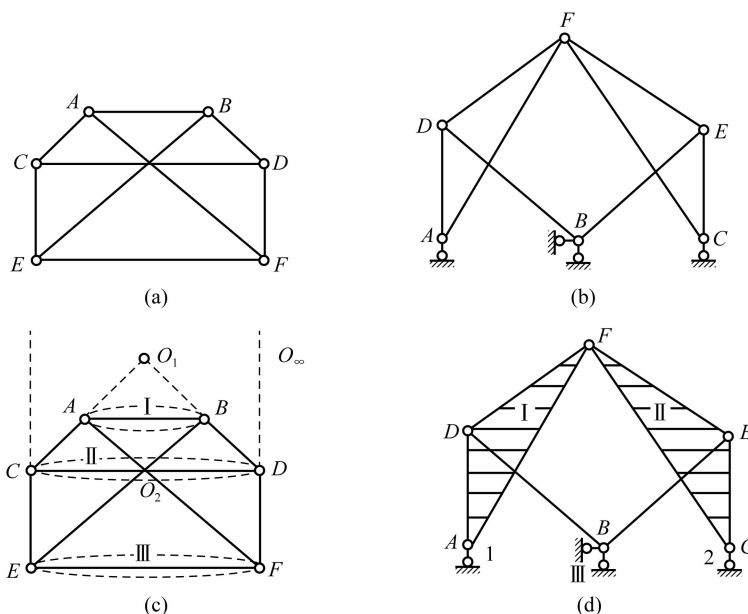


图 1-25 【例 1-3】图

【例 1-4】 对图 1-26(a)所示体系进行几何构成分析。

【解】 在几何构成分析中,可以将两端为铰的曲线链杆和折线链杆用两端连线的直链杆代替,如图 1-26(b)中的虚线链杆 AB 和 ED ,选择 $FBCD$ 和基础为研究对象,由于链杆 1 和虚线链杆 AB 、 ED 交于 O 点,因此该体系为瞬变体系。

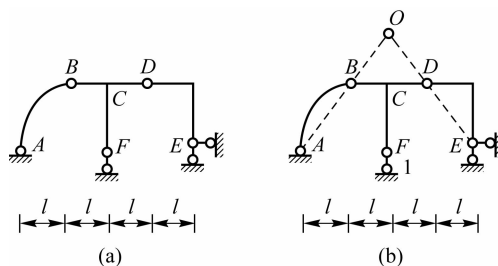


图 1-26 【例 1-4】图

思考与练习

1. 简答题

- (1) 在体系几何构成分析中,静定结构与超静定结构有什么不同?
- (2) 在体系几何构成分析中,构件是按刚体考虑的,还是按变形体考虑的?
- (3) 实铰与虚铰有什么不同?
- (4) 瞬变体系的特点是什么?
- (5) 瞬变体系可以作为土木工程中的结构体系吗?
- (6) 为什么说几何不变体系组成规律的基础是铰接三角形的稳定性?

- (7)在体系几何构成分析中,将一个构件既作为研究对象,又作为约束条件,可以吗?
 (8)各种简单约束与复约束有什么不同?如何将复约束换算为简单约束?
 (9)利用式(1-2)和式(1-3)一定能准确计算出结构的自由度吗?
 (10)当体系的计算自由度 $W \leq 0$ 时,能说明该体系是几何不变体系吗?

2. 计算题

(1)对图 1-27 所示体系进行几何构成分析。

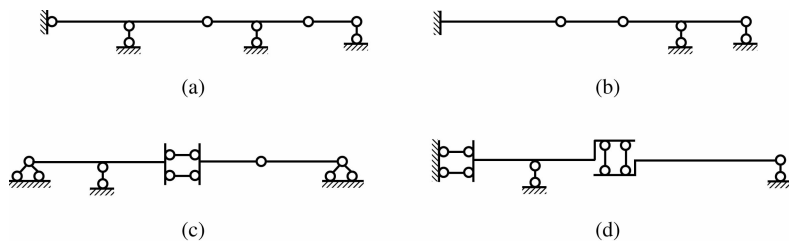


图 1-27 计算题(1)图

(2)对图 1-28 所示体系进行几何构成分析。

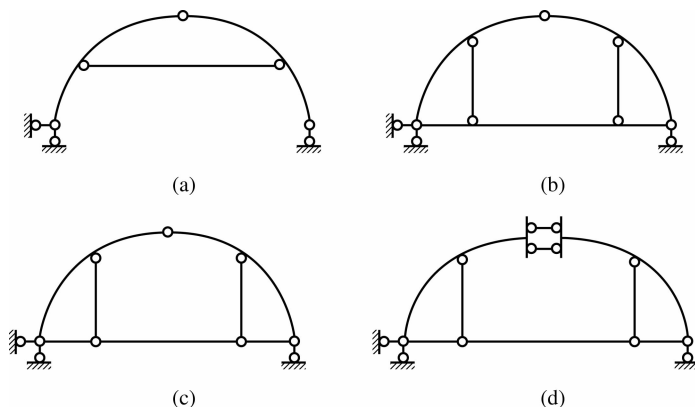


图 1-28 计算题(2)图

(3)对图 1-29 所示体系进行几何构成分析。

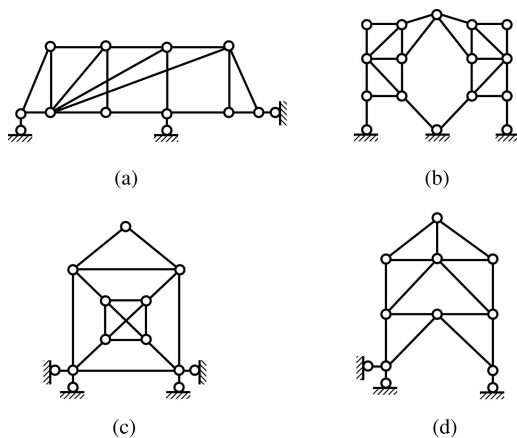


图 1-29 计算题(3)图

(4) 对图 1-30 所示体系进行几何构成分析。

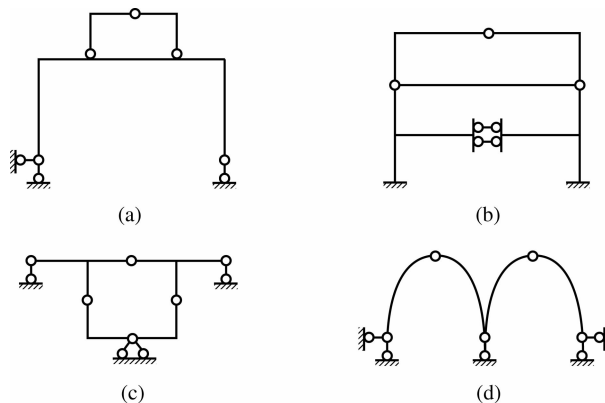


图 1-30 计算题(4)图

(5) 对图 1-31 所示体系进行几何构成分析。

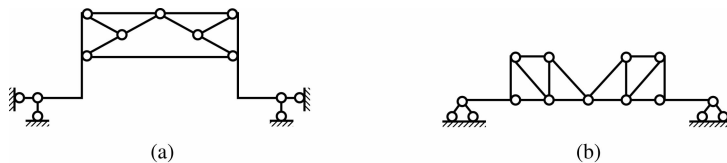


图 1-31 计算题(5)图

(6) 对图 1-32 所示体系进行几何构成分析。

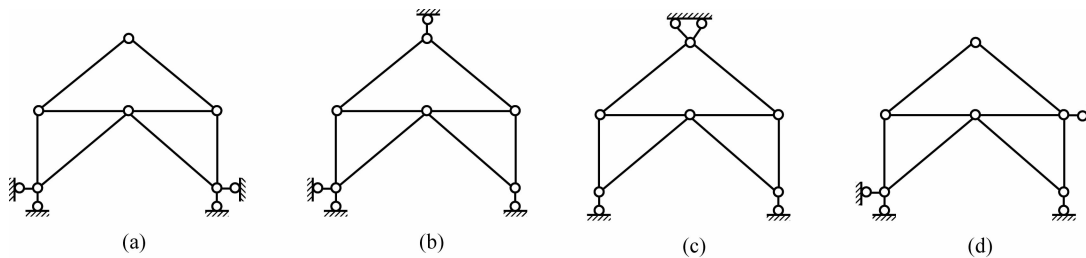


图 1-32 计算题(6)图

(7) 判断图 1-33 所示体系多余约束的数量。

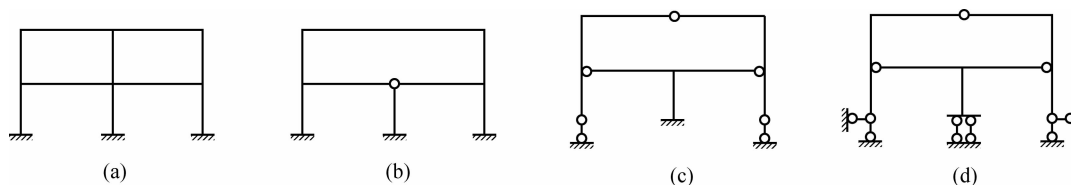


图 1-33 计算题(7)图

(8) 求图 1-27、图 1-30 和图 1-32 所示体系的计算自由度。

静定结构的内力分析

静定结构已广泛地应用于实际工程中,同时静定结构分析是超静定结构分析的基础。静定结构是无多余约束的杆件体系,可由平衡条件求出其全部反力和内力。

本章依次分析梁、刚架、桁架、组合结构和拱等结构的受力特征。为避免求解高阶联立方程,根据不同结构的几何构成特点,合理选取分析单元(隔离体),恰当建立平衡方程,确定支座反力和杆件内力,迅捷作出结构内力图。

2.1 截面内力计算及内力图特征

2.1.1 截面内力计算

1. 截面内力及其正负号的规定

在平面杆件的任意一个截面上,一般有三个内力分量:轴力 F_N 、剪力 F_Q 和弯矩 M 。

轴力和剪力的正负号规定与材料力学相同,轴力以拉力为正,压力为负;剪力使该截面所在隔离体有顺时针转动的趋势为正,反之为负。如图 2-1 所示的截面轴力和剪力均为正。在梁中,弯矩使下部受拉时为正,图 2-1(a)所示的截面弯矩为正。在刚架中,弯矩一般不做正负号规定。但一定要记住,作弯矩图时,弯矩纵标画在杆件的受拉侧,不用标明正负号;而轴力图 and 剪力图可画在杆件的任意侧,但要标明正负号。

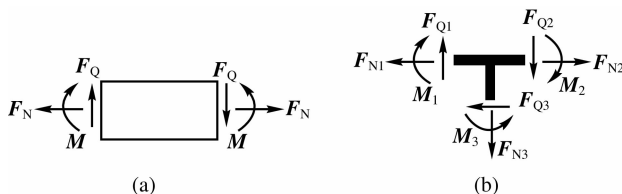


图 2-1 截面内力

2. 截面内力的计算方法

(1) 截面法。计算截面内力的基本方法是截面法,即用一个假想截面沿所求内力截面切

开,取截面一侧部分作为隔离体,利用隔离体的平衡方程求出三个内力分量。

例如,求结构[见图 2-2(a)]B 截面的内力。取 B 截面以右为隔离体,画出隔离体的受力图[见图 2-2(b)],列平衡方程,即可求出内力。

由

$$\sum F_x = F_{P2} \cos 45^\circ - F_{NB} = 0$$

求出

$$F_{NB} = 100(\text{kN})$$

由

$$\sum F_y = F_{P2} \sin 45^\circ + F_{QB} - F_{P1} - 5q = 0$$

求出

$$F_{QB} = -F_{P2} \sin 45^\circ + F_{P1} + 5q = -25(\text{kN})$$

由

$$\sum M_B = 10F_{P2} \cos 45^\circ + M - 5F_{P1} - 5 \times 2.5q - M_B = 0$$

求出

$$M_B = 10F_{P2} \cos 45^\circ + M - 5F_{P1} - 5 \times 2.5q = 812.5(\text{kN} \cdot \text{m}) (\text{下侧受拉})$$

(2)直接计算法。由截面法可以得出由外力求内力的直接计算法。

①截面轴力等于该截面一侧所有外力沿杆轴切线方向的投影代数和。若外力拉截面,则其投影取正;反之取负。

②截面剪力等于该截面一侧所有外力沿杆轴法线方向的投影代数和。若外力绕截面形心有顺时针转动的趋势,则其投影取正;反之取负。

③截面弯矩等于该截面一侧所有外力对截面形心产生的外力矩的代数和。截面弯矩与外力矩的代数和,不仅值相等,而且产生相同的受拉侧。计算外力矩时,先以正负号区分外力矩是绕截面形心顺时针转动还是逆时针转动,然后再由转向确定受拉侧。

例如,在如图 2-2 所示的结构中,A 截面的轴力等于 A 截面以下的外力 F_{P1} 、 F_{P2} 和 M 沿 A 截面的轴向(竖向)投影之和。其中, F_{P1} 拉 A 截面,投影取正; F_{P2} 压 A 截面,投影取负; M 无投影。所以

$$F_{NA} = 50 - 141.4 \times \sin 45^\circ = -50(\text{kN})$$

A 截面的剪力等于 A 截面以下的外力 F_{P1} 、 F_{P2} 和 M 沿 A 截面的切向(水平方向)投影之和。其中, F_{P2} 绕 A 截面有逆时针转动的趋势,其投影取负; F_{P1} 和 M 沿水平方向的投影为零。所以

$$F_{QA} = -141.4 \times \cos 45^\circ = -100(\text{kN})$$

同理,可以求得 B 截面的轴力和剪力分别为

$$F_{NB} = 141.4 \times \cos 45^\circ = 100(\text{kN})$$

$$F_{QB} = 5 \times 5 + 50 - 141.4 \times \sin 45^\circ = -25(\text{kN})$$

A 截面的弯矩等于 A 截面以下的外力 F_{P1} 、 F_{P2} 和 M 对 A 截面形心产生的外力矩的代数和。若取顺时针转动的外力矩为正,则 F_{P1} 对 A 截面形心产生顺时针转动的外力矩,取正; F_{P2} 和 M 对 A 截面形心产生逆时针转动的外力矩,取负。所以,A 截面以下的外力对 A 截面形心产生的外力矩的代数和为

$$\sum M_{A_F}^{\text{外}} = 50 \times 5 - 125 - 141.4 \times \cos 45^\circ \times 5 = -375 (\text{kN} \cdot \text{m})$$

所得结果为负,说明 A 截面以下的外力矩之和绕 A 截面形心逆时针转动[见图 2-2(c)],使杆件左侧受拉。所以, A 截面的弯矩 $M_A = 375 \text{ kN} \cdot \text{m}$ (左侧受拉)。同理, B 截面以右的外力对 B 截面形心产生的外力矩的代数和为

$$\sum M_{B_F}^{\text{外}} = 5 \times 5 \times 2.5 + 50 \times 5 - 125 - 141.4 \times \cos 45^\circ \times 10 = -812.5 (\text{kN} \cdot \text{m})$$

所得结果为负,说明 B 截面以右的外力矩之和绕 B 截面形心逆时针转动[见图 2-2(d)],使杆件下侧受拉。所以, B 截面的弯矩 $M_B = 812.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$ (下侧受拉)。

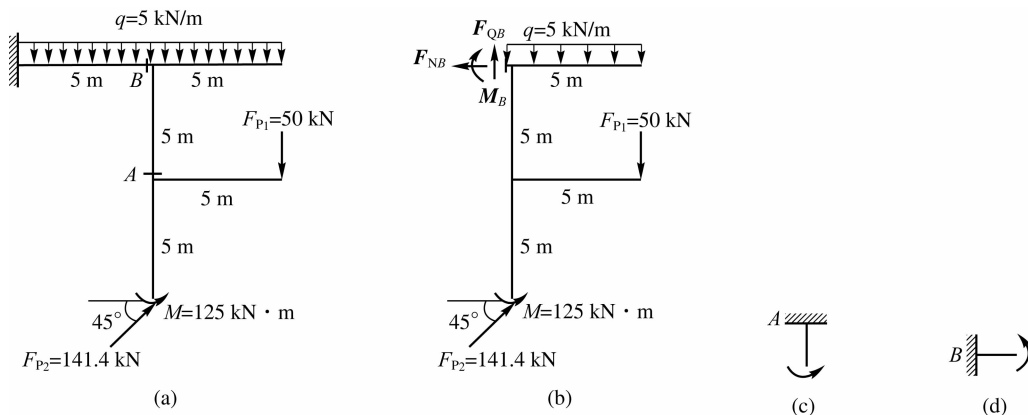


图 2-2 截面内力计算

2.1.2 荷载与内力之间的关系

1. 荷载与内力之间的微分关系

在荷载连续分布的直杆段内,取微段 dx 为隔离体,如图 2-3 所示。在图示荷载和坐标设置的情况下,由平衡条件可导出如下微分关系:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dF_Q}{dx} &= -q \\ \frac{dM}{dx} &= F_Q \\ \frac{d^2 M}{dx^2} &= -q \end{aligned} \right\} \quad (2-1)$$

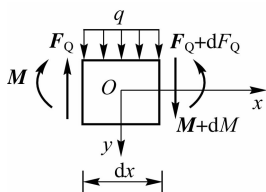


图 2-3 荷载与内力之间的微分关系

2. 荷载与内力之间的增量关系

在集中荷载作用处,取微段 dx 为隔离体,如图 2-4 所示。在图示荷载和坐标设置的情

况下,由平衡条件可导出集中荷载与内力之间的增量关系为

$$\left. \begin{aligned} \Delta F_Q &= -F_P \\ \Delta M &= M_0 \end{aligned} \right\} \quad (2-2)$$

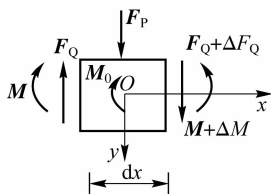


图 2-4 荷载与内力之间的增量关系

3. 荷载与内力之间的积分关系

从直杆中取出荷载连续分布的一段 AB(见图 2-5),由式(2-1)积分可得如下积分关系:

$$\left. \begin{aligned} F_{QB} &= F_{QA} - \int_{x_A}^{x_B} q dx \\ M_B &= M_A + \int_{x_A}^{x_B} F_Q dx \end{aligned} \right\} \quad (2-3)$$

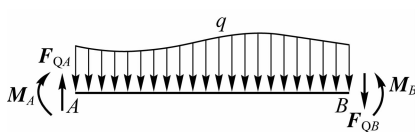


图 2-5 荷载与内力之间的积分关系

积分关系的几何意义如下:

(1)一段杆的右端截面剪力等于左端截面剪力减去该段杆上的横向荷载的合力。荷载向下为正。

(2)当一段杆上无集中力偶作用时,其右端截面弯矩等于左端截面弯矩加上该段剪力图的面积。正剪力其面积为正,负剪力其面积为负。

2.1.3 内力图的形状特征

(1)由微分关系可以得到两种区段上两种内力图的形状特征:零、平、斜、抛。

①无荷载($q=0$)区段,剪力图平行于轴线,弯矩图为一斜直线(零、平、斜)。如果这一段内各个截面的剪力均为零,则弯矩图平行于轴线,即各截面弯矩为一个常数。

②均布荷载(荷载图为平直线)区段,剪力图为一斜直线,弯矩图为一个抛物线(平、斜、抛),抛物线的凸向即荷载 q 的指向,剪力等于零处,弯矩达到极值。

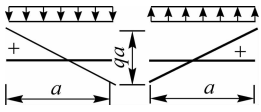
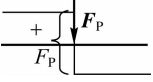
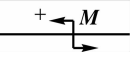
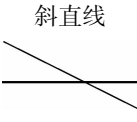
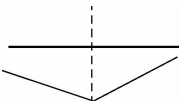
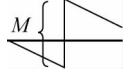
(2)由增量关系可以得到集中荷载作用处内力图的形状特征。

①集中力作用处,剪力图有突变,突变量等于集中力的值;弯矩图连续,但发生转折,形成尖角,尖角的指向与集中力的指向相同。

②集中力偶作用处,剪力图无变化;弯矩图有突变,突变量为该集中力偶的值。因为集中力偶作用处两侧的剪力值相等,所以集中力偶作用处两侧弯矩图应互相平行。

上述荷载与内力图形状之间的对应关系可由表 2-1 直观地给出。

表 2-1 荷载与内力图形状之间的对应关系

项 目	无荷载区段	均布荷载区段	集中力作用处	集中力偶作用处
剪力图	平行于杆轴 +	斜直线 	发生突变 突变方向即荷载指向 	无变化 
弯矩图	斜直线 	抛物线 抛物线凸向即荷载指向 	弯矩图发生拐折, 尖角方向即荷载指向 	弯矩图发生突变, 突变前后弯矩图平行 
备注	剪力等于零的区段, 弯矩图平行于杆轴	剪力等于零处, 弯矩达到极值	集中力作用的 截面剪力无定义	集中力偶作用的 截面弯矩无定义

由表 2-1 可以看到弯矩图的弯折方向与外力的指向相同。

③对于自由端、铰接杆端、铰支杆端,当无集中力偶作用时,这些截面弯矩均为零;当有集中力偶作用时,这些截面弯矩就等于该集中力偶。这些特殊的杆端常常是绘制弯矩图的切入点。

上述关于内力图的形状特征,对于绘制内力图和校核内力图都是十分有用的。

2.1.4 利用区段叠加法作弯矩图

先讨论图 2-6(a)所示简支梁的情况,荷载包括跨间荷载 q [见图 2-6(b)]和端部集中力偶 M_A 、 M_B [见图 2-6(c)]两部分,可分别作出两种荷载单独作用下的弯矩图 $\bar{M}$ 、 M^0 ,如图 2-6(d)、(e)所示。将这两种情况下的弯矩图的相应竖标相叠加,便得到两种荷载共同作用下的弯矩图,如图 2-6(f)所示。

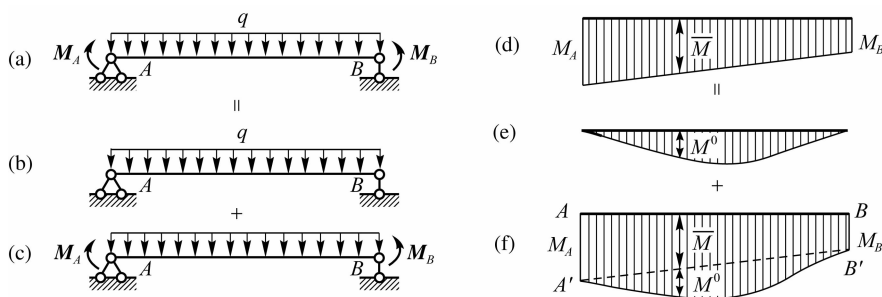


图 2-6 简支梁的弯矩图叠加法

再以图 2-7(a)中的杆段 AB 为例,讨论结构中任意直杆段的弯矩图叠加法。取杆段 AB 为隔离体 [见图 2-7(b)],隔离体上除作用有荷载 q 外,在杆端还有弯矩 M_A 和 M_B 、剪力 F_{QA}

和 F_{QB} 、轴力 F_{NA} 和 F_{NB} (由于在小变形的条件下, 杆端轴力对直杆的弯矩无影响, 故 F_{NA} 和 F_{NB} 省略不画)。为了说明杆段 AB 弯矩图的特性, 将其与图 2-7(c) 中的简支梁相比。设简支梁承受相同的荷载 q 和相同的杆端力偶 M_A 、 M_B 。在图 2-7(b)、(c) 中分别应用平衡方程求得 F_{QA} 、 F_{QB} 和 F_{yA} 、 F_{yB} , 可知 $F_{QA} = F_{yA}$ 、 $F_{QB} = F_{yB}$, 由于两者受力相同, 所以弯矩图也相同。这样, 作任意直杆段弯矩图的问题 [见图 2-7(b)] 就转化为作相应简支梁弯矩图的问题 [见图 2-7(c)], 采用叠加法即可作出弯矩图, 如图 2-7(d) 所示。具体做法如下: 先求出杆段的两杆端弯矩竖标, 并连一条虚线 ($\bar{M}$), 然后以该虚线为基线, 叠加相应简支梁在跨间荷载作用下的弯矩图 (M^0), 得到的图线与杆轴线间所围成的图形即为实际弯矩图 M 。

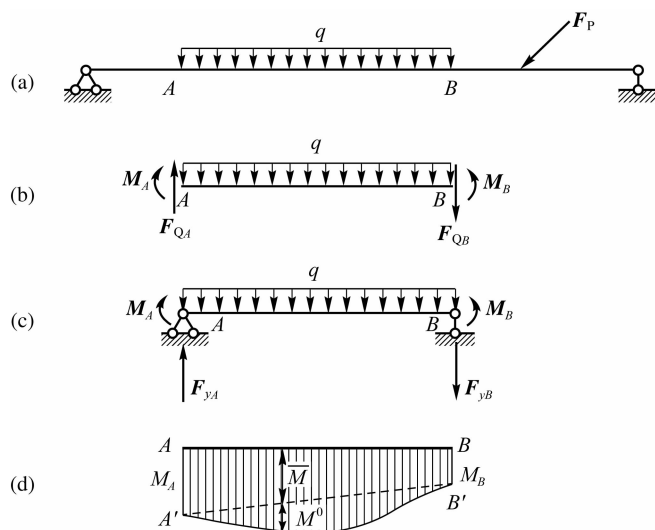


图 2-7 任意直杆段的弯矩图叠加法

(1) 应用区段叠加法的注意事项。

① 弯矩图叠加是指竖标相加, 而不是图形的简单拼合。图 2-7(d) 中的竖标 M^0 , 如同 $\bar{M}$, 也是垂直于杆轴 AB 的, 而不是垂直于图中虚线 $A'B'$ 的。

② 为了顺利地利用叠加法绘制弯矩图, 应牢记简支梁在跨中荷载作用下的弯矩图, 如图 2-8 所示。

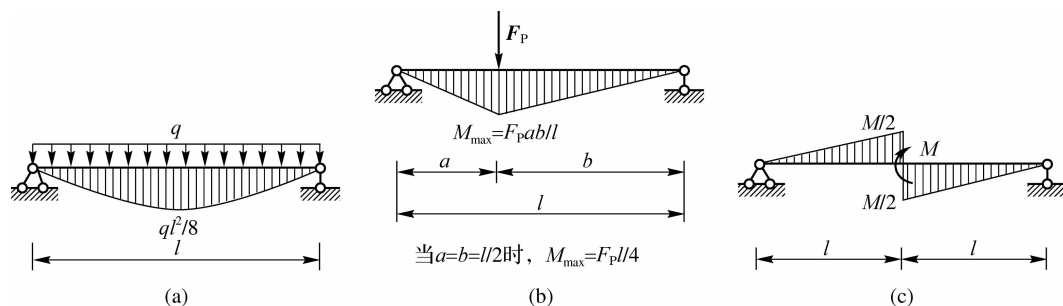


图 2-8 简支梁在跨中荷载作用下的弯矩图

③ 利用叠加法绘制弯矩图可以少求一些控制截面的弯矩值, 少求甚至不求支座反力, 方

便作图。而且对以后利用图乘法求位移,也提供了把复杂图形分解为简单图形的方法。

④对于任意直杆段,不论其内力是静定的还是超静定的;不论是等截面杆还是变截面杆;不论该杆段内各相邻截面间是连续的还是定向联结的,或是铰联结的,弯矩图叠加法均适用。

(2)利用区段叠加法绘制弯矩图的步骤。

①分段。选定外力不连续点(如集中力作用点、集中力偶作用点、分布荷载的起点和终点)为分段点(控制截面)。

②定形。根据每段内的荷载情况,判定出弯矩图的形状。

③求值。由截面法或内力直接算式求出控制截面的弯矩值。

④作图。对无荷载区段,由两端控制截面的弯矩值,作出直线弯矩图。对有荷载作用区段,用叠加法作出弯矩图。

【例 2-1】 作如图 2-9(a)所示简支梁的内力图。

【解】 (1)求支座反力。由整体平衡条件可求出支座反力。

$$\sum M_A = 0, F_{RF} \times 8 - 16 - 4 \times 4 \times 4 - 8 \times 7 = 0, F_{RF} = 17 \text{ kN} (\uparrow)$$

$$\sum F_y = 0, F_{RF} + F_{RA} - 4 \times 4 - 8 = 0, F_{RA} = 7 \text{ kN} (\uparrow)$$

(2)作剪力图。因为在集中力作用处,剪力图发生突变,如将正剪力画在基线上侧,突变的方向即集中力的指向。当支座反力求出以后,可直接根据荷载和支座反力的指向作静定梁的剪力图。

对本例,如图 2-9(b)所示,先从 A 点开始向上突变 7 kN,以平直线到 C 点(集中力偶作用处剪力图无变化);CD 段的剪力图为斜直线,荷载向下,剪力图向右下斜,由积分关系得到 $F_{QD} = F_{QC} - CD$ 段分布荷载的合力 $= 7 - 4 \times 4 = -9 \text{ kN}$;从 D 点开始以平直线到 E 点,然后向下突变 8 kN,再按 17 kN 以平直线到 F 点,从 F 点向上突变 17 kN 正好回到基线,这表明所有外力均满足竖向投影平衡。按这种作剪力图的方法若最后不能回到基线零点,则说明计算过程中有错误,因此这种方法能自动检验计算结果的正确性。

(3)作弯矩图。选 A、B_左、B_右、C、D、E 和 F 为控制截面。由截面以左的外力直接求得:

$$M_A = 0$$

$$M_{B_{左}} = F_{RA} \times 1 = 7 (\text{kN} \cdot \text{m})$$

$$M_{B_{右}} = F_{RA} \times 1 + 16 = 23 (\text{kN} \cdot \text{m})$$

$$M_C = F_{RA} \times 2 + 16 = 30 (\text{kN} \cdot \text{m})$$

由截面以右的外力直接求得:

$$M_F = 0$$

$$M_E = F_{RF} \times 1 = 17 (\text{kN} \cdot \text{m})$$

$$M_D = 2F_{RF} - 8 \times 1 = 26 (\text{kN} \cdot \text{m})$$

将各控制截面弯矩值按同一比例画在梁的受拉侧,如图 2-9(c)所示。因为 AB、BC、DE、EF 段无荷载作用,所以这些段内的弯矩图为斜直线,将相邻控制截面弯矩竖标连成直线,即得这些段的弯矩图。

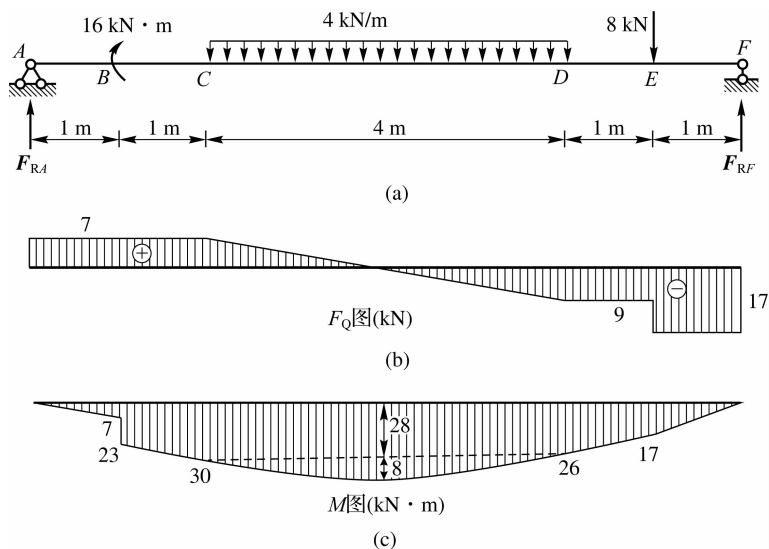


图 2-9 【例 2-1】图

作 CD 段弯矩图时,先用虚直线连接两杆端控制截面弯矩竖标 $30 \text{ kN} \cdot \text{m}$ 和 $26 \text{ kN} \cdot \text{m}$,然后以该虚线为基线,叠加上以 CD 为跨度的简支梁在均布荷载作用下的弯矩图。 CD 段中点的截面弯矩为

$$\frac{M_C + M_D}{2} + \frac{ql^2}{8} = \frac{30 + 26}{2} + \frac{4 \times 4^2}{8} = 36 (\text{kN} \cdot \text{m})$$

注意:均布荷载区段内的最大弯矩并不一定发生在区段的中点处。由剪力为零不难求出最大弯矩所在处并求出最大弯矩为 $36.1 \text{ kN} \cdot \text{m}$,它与区段中点处的弯矩相差 0.28% 。因此,以后作承受均布荷载区段的弯矩图时,不一定要求出该区段的最大弯矩,也可通过区段中点弯矩值来作弯矩图。有时也用均布荷载区段的中点弯矩近似代替该区段的最大弯矩。

2.2 多跨静定梁的内力分析

多跨静定梁是由若干根单跨静定梁(悬臂梁、简支梁、外伸梁)用铰联结而成的静定结构。多跨静定梁常用于预制装配桥梁结构和房屋建筑中的檩条。图 2-10(a)为用于公路桥的钢筋混凝土多跨静定梁。 C 、 D 为连接点,通常是在两构件端部伸出钢筋,吊装完毕后焊接在一起,再浇上混凝土。由于这些结点抵抗转动的能力较差,所以计算时可简化为光滑铰接点,其计算简图如图 2-10(b)所示。

从几何构成上看,多跨静定梁可分为基本部分和附属部分。不依赖于其他部分,本身就能承受荷载并保持平衡的部分称为基本部分,需依靠其他部分才能承受荷载的部分称为附属部分。

为了分辨基本部分和附属部分,将相互连接的铰 C 、 D 切开[见图 2-10(c)],由上述定义可知,梁 AC 和梁 DB 可以独立承受作用于其上的竖向荷载,是基本部分(尽管梁 DB 在水平方向上少一个约束)。而梁 CD 离开了基本部分就不能单独平衡作用于其上的竖向荷载,是附属部分。

为了更清楚地表示各部分之间的关系,把附属部分放在基本部分的上面,把联结铰用附属部分的两根支杆代替[见图 2-10(d)],这种表示力的传递路线的图形称为层次图。需要说明的是,在层次图上有的梁只有两根支杆,有的梁却有四根支杆,实际上,附属梁 CD 在整个梁中起到了水平约束的作用,整个体系是几何不变的。

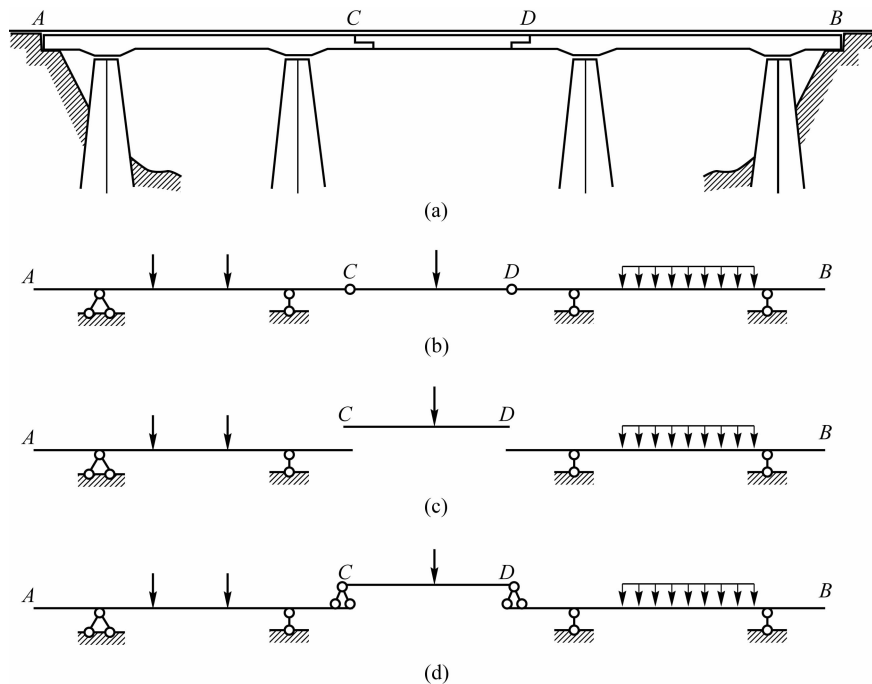


图 2-10 公路桥的钢筋混凝土多跨静定梁及其计算简图

由层次图可以清楚地看到,多跨静定梁的组成次序是先固定基本部分,后固定附属部分。

多跨静定梁的受力特点是:当外力作用在基本部分上时,附属部分不受力,只有基本部分受力;当外力作用在附属部分上时,附属部分和基本部分均受力。

因此,计算多跨静定梁应遵循的原则是:先计算附属部分,将附属部分的支座反力反向加在基本部分上,然后再计算基本部分。也就是说,当结构是由基本部分出发,逐次连接附属部分而组成时,应该采用相反的次序进行内力分析,即后装的先算,先装的后算。不仅对多跨静定梁如此,对以后要学到的多跨静定刚架等主从结构也是如此。

【例 2-2】 作如图 2-11(a)所示多跨静定梁的内力图。

【解】 (1)分析几何构成。切断铰 C 、 F 即可看出中间部分是基本部分,两侧部分是附属部分,其层次图如图 2-11(b)所示。

(2)先算附属部分,求得支座反力,作出弯矩图如图 2-11(c)所示。

(3)将附属部分的相应支座反力反向作用在基本部分上,算得基本部分的支座反力,作出弯矩图如图 2-11(d)所示。

(4)将各梁的弯矩图合并即得全梁的弯矩图,如图 2-11(e)所示。值得注意的是,铰 C 、 F 处的弯矩为零, BCD 段、 EFG 段上无外荷载作用,弯矩图应为一条斜直线。

(5)可直接根据荷载和支座反力的指向作多跨静定梁的剪力图,如图 2-11(f)所示。先

从 A 点开始向下突变 ql , 平直线到 B 点; 向上突变 $2ql$, 平直线到 D 点; 向下突变 $3ql/4$, DE 段的剪力图为一条向右下斜的直线, 由积分关系得到 $F_{QED} = F_{QDE} - 2ql = ql/4 - 2ql = -7ql/4$; 向上突变 $9ql/4$, 平直线到 G 点; 向下突变 ql , 平直线到 H 点; 向上突变 $ql/2$, 正好回到基线, 这表明所有外力满足竖向投影平衡。

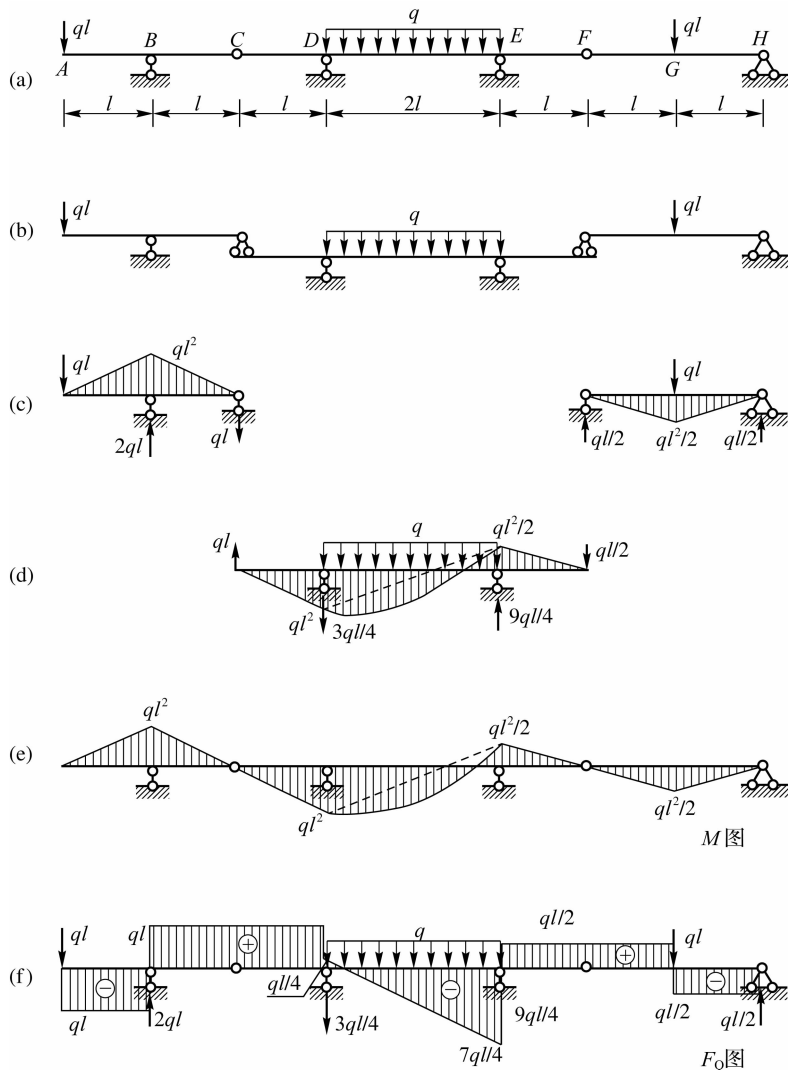


图 2-11 【例 2-2】图

在设计多跨静定梁时,适当选择铰的安放位置,可以使弯矩分布均匀而弯矩峰值大为降低。下面举例说明。

【例 2-3】 如图 2-12(a)所示,两跨静定梁承受均布荷载 q 。求梁中正负弯矩峰值相等时,铰 D 放在何处。

【解】 以 x 表示铰 D 与支座 B 之间的距离。AD 段内的最大弯矩在中点 E,即

$$M_E = \frac{q}{8} (l-x)^2, F_{QE} = 0$$

取隔离体如图 2-12(b)所示,由 B 截面以左求得 B 截面弯矩的绝对值为

$$|M_B| = \frac{q}{2} \left(\frac{l+x}{2} \right)^2 - M_E$$

令正、负弯矩峰值相等,即

$$\frac{q}{2} \left(\frac{l+x}{2} \right)^2 - \frac{q}{8} (l-x)^2 = \frac{q}{8} (l-x)^2$$

得

$$x = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} l = 0.172l$$

铰 D 的位置确定以后,可作出弯矩图[见图 2-12(c)],其中正、负弯矩峰值均为 $0.086ql^2$ 。如果改用两个跨度为 l 的简支梁,则弯矩图如图 2-12(d)所示,其最大弯矩为 $0.125ql^2$,为本例最大弯矩的 1.45 倍。

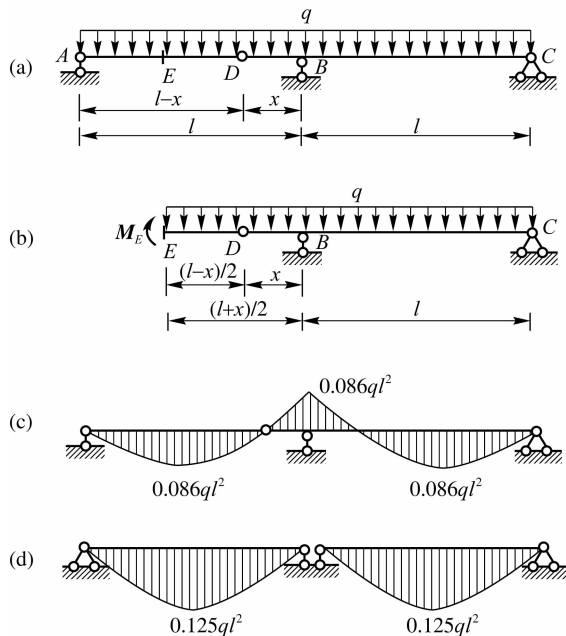


图 2-12 【例 2-3】图

由于多跨静定梁设置了带伸臂的基本部分,这不仅使中间支座处产生了负弯矩,降低了跨中正弯矩;而且还减小了附属部分的跨度。因此,多跨静定梁比相应的多个简支梁弯矩分布均匀,节省材料,但其构造要复杂一些。

2.3 静定平面刚架的内力分析

2.3.1 刚架的组成及其特点

图 2-13(a)为一个几何可变的铰接体系,使它成为几何不变体系的方法有两种:一是增设斜杆,使其成为桁架结构[见图 2-13(b)];二是把原来的铰接点 D 和 E 改为刚结点,使其

成为刚架结构[见图 2-13(c)]。由此可见,刚架和桁架都是由直杆组成的结构,两者的区别是:桁架中的结点全部都是铰接点,刚架中的结点全部或部分为刚结点。刚架中由于具有刚结点,因而不需要用斜杆也可组成几何不变体系,使结构内部具有较大的空间,便于使用。

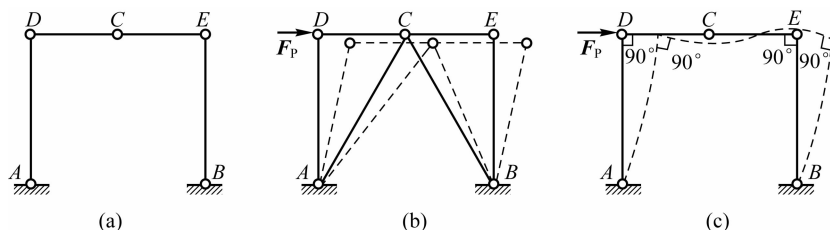


图 2-13 几何可变的铰接体系转变为结构

与铰接点不同的是,刚结点不仅约束各杆段不能发生相对移动,也不能发生相对转动。因而,当结构变形时,各杆件的夹角始终保持不变,如图 2-13(c)所示;而铰接点各杆件的夹角则随之变化,如图 2-13(b)所示。从受力角度来看,刚结点可以承受和传递弯矩,因而刚架中的主要内力是弯矩;而桁架中的各杆弯矩为零。

为了将刚架与简支梁加以比较,给出两者在均布荷载作用下的弯矩图和变形图,如图 2-14 所示。由此可见,刚架的梁、柱被刚结点刚性地连成一个整体,不仅增强了结构的刚度,而且使其内力分布和变形分布更为均匀、合理,故比较节省材料。刚架的这些优点,使其在建筑工程中得到广泛的应用。

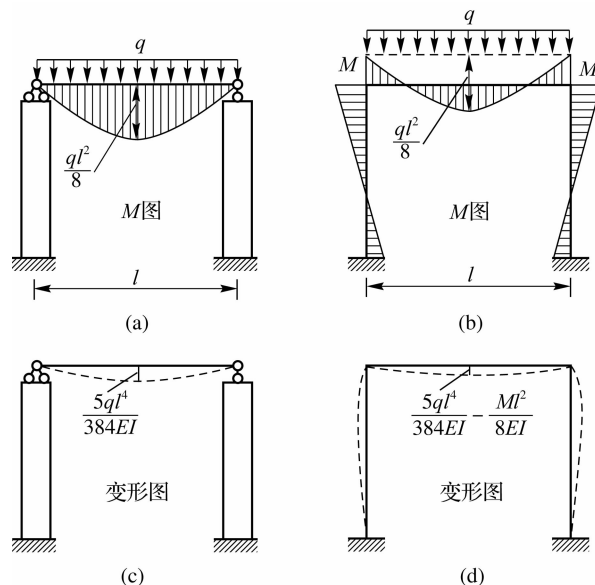


图 2-14 刚接和铰接的对比

各杆轴线都在同一平面内且外力也可简化到该平面内的刚架,称为平面刚架;而各杆轴线或外力不能简化到同一平面内的刚架,则称为空间刚架。若刚架的全部反力和内力仅由静力平衡条件就能完全确定,则这样的刚架称为静定刚架。

静定平面刚架的基本形式有悬臂刚架[见图 2-15(a)]、简支刚架[见图 2-15(b)]和三铰刚架[见图 2-15(c)]。将这三种基本形式进行组合,可得到复合刚架。如图 2-15(d)所示的复合刚架就是由三铰刚架 ABC 及简支刚架 DE 和 FG 组合而成的,其中 ABC 部分是基本部分, DE 部分和 FG 部分是附属部分。

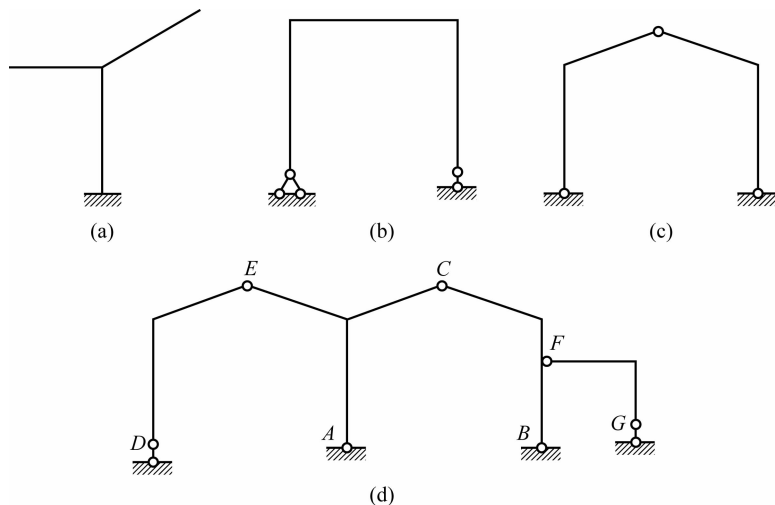


图 2-15 静定平面刚架的基本形式

2.3.2 刚架的支座反力

在静定平面刚架的受力分析中,通常先由刚架的整体或局部的平衡条件求出各支座反力,并校核正确无误,然后再求控制截面的内力,最后作内力图。

(1)对于悬臂刚架和简支刚架,只有三个支座反力,可由刚架的三个整体平衡方程直接求出全部支座反力。比较简单,这里不再赘述。

(2)三铰刚架求支座反力,除了利用三个整体平衡方程,还必须取刚架的一部分为隔离体,由其平衡条件建立补充方程,才能求出全部支座反力。

【例 2-4】 求如图 2-16(a)所示三铰刚架的支座反力。

【解】 取整体对左支座建立力矩平衡方程,即

$$\sum M_A = 0, F_{yB} \cdot 2l + F_{xB} \cdot l - 2ql \cdot l - ql \cdot 2l = 0 \quad (1)$$

取右半边为隔离体[见图 2-16(b)],对 C 铰建立力矩平衡方程,即

$$\sum M_C = 0, F_{yB} \cdot l - F_{xB} \cdot l - ql \cdot 0.5l = 0 \quad (2)$$

解方程(1)和方程(2),求出右支座的两个反力分量为

$$F_{yB} = 1.5ql, F_{xB} = ql$$

再由整体

$$\sum F_x = 0, F_{xA} - F_{xB} + ql = 0, F_{xA} = 0$$

$$\sum F_y = 0, F_{yA} + F_{yB} - 2ql = 0, F_{yA} = 0.5ql$$

校核

$$\sum M_C = F_{xA} \cdot 2l - F_{yA} \cdot l - F_{xB} \cdot l + F_{yB} \cdot l = 0$$

反力计算无误。

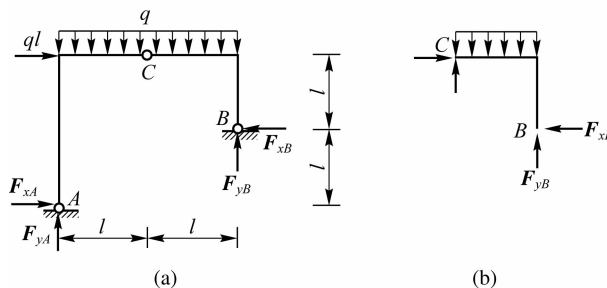


图 2-16 【例 2-4】图

也可以分别取左、右两部分为隔离体,对 A 点和 B 点建立两个力矩平衡方程,先求出连接左、右两部分的 C 铰的约束力,然后再求支座反力。

【例 2-5】 求如图 2-17(a)所示刚架的支座反力。

【解】 结构为三刚片体系,折杆 EGB 和 FHB 为二力杆,约束力沿两铰连线。取 AED 为隔离体[见图 2-17(b)],对 O_1 点建立力矩平衡方程,即

$$\sum M_{O_1} = 0, 8F_{yD} - 3F_{xD} = 0 \quad (1)$$

取 DFC 为隔离体[见图 2-17(c)],对 O_2 点建立力矩平衡方程,即

$$\sum M_{O_2} = 0, 8F_{yD} + 3F_{xD} + 10 \times 8 \times 4 = 0 \quad (2)$$

解方程(1)和方程(2),求得

$$F_{xD} = -\frac{160}{3} \text{ kN}, F_{yD} = -20 \text{ kN}$$

取 AED 为隔离体,则

$$\sum M_E = 0, F_{yA} = -20 \text{ kN} (\downarrow)$$

取 DFC 为隔离体,则

$$\sum M_F = 0, F_{yC} = 20 \text{ kN} (\uparrow)$$

再由整体得

$$\sum F_y = 0, F_{yA} + F_{yB} + F_{yC} - 80 = 0, F_{yB} = 80 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0, F_{xB} = 0$$

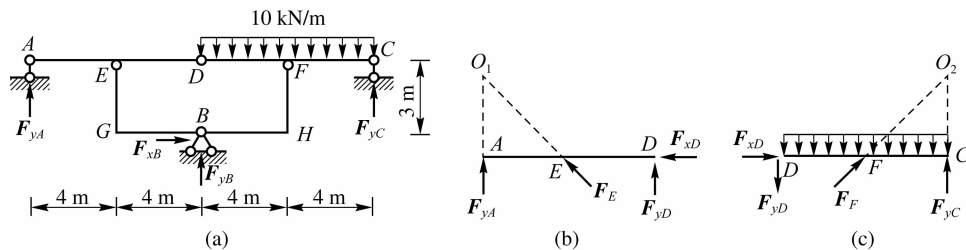


图 2-17 【例 2-5】图

(3)对于复合刚架,其支座反力计算与多跨静定梁相同。先进行几何构成分析,将刚架分为基本部分和附属部分,然后求出附属部分的约束力,并将此约束力反向施加在支承它的基本部分上,最后计算基本部分的支座反力。这样可避免求解联立方程的麻烦。

【例 2-6】 求如图 2-18(a)所示复合刚架的支座反力。

【解】 由几何构成分析可知,ABCD 为基本部分,CEF 为附属部分。

先考虑附属部分 CEF,如图 2-18(b)所示。

$$\sum M_C = 0, 4F_{yF} - 10 \times 4 \times 2 - 30 \times 2 = 0, F_{yF} = 35 \text{ kN}(\uparrow)$$

$$\sum F_x = 0, F_{xC} - 10 \times 4 = 0, F_{xC} = 40 \text{ kN}(\rightarrow)$$

$$\sum F_y = 0, F_{yC} + F_{yF} - 30 = 0, F_{yC} = -5 \text{ kN}(\downarrow)$$

将求出的 F_{xC} 和 F_{yC} 施加于基本部分上作出受力图,如图 2-18(c)所示。

$$\sum M_A = 0, 4F_{yD} - 4F_{yC} + 4F_{xC} - 30 \times 2 = 0, F_{yD} = -30 \text{ kN}(\downarrow)$$

$$\sum F_y = 0, F_{yA} + F_{yD} - F_{yC} - 30 = 0, F_{yA} = 55 \text{ kN}(\uparrow)$$

$$\sum F_x = 0, F_{xA} - F_{xC} = 0, F_{xA} = 40 \text{ kN}(\rightarrow)$$

或者由附属部分 CEF 求出 F_{yF} 后,由整体平衡方程求出 F_{xA} 、 F_{yA} 、 F_{yD} 。校核

$$\sum M_C = 4F_{yA} - 4F_{xA} - 30 \times 2 + 30 \times 2 + 10 \times 4 \times 2 - 4F_{yF} = 0$$

反力计算无误。

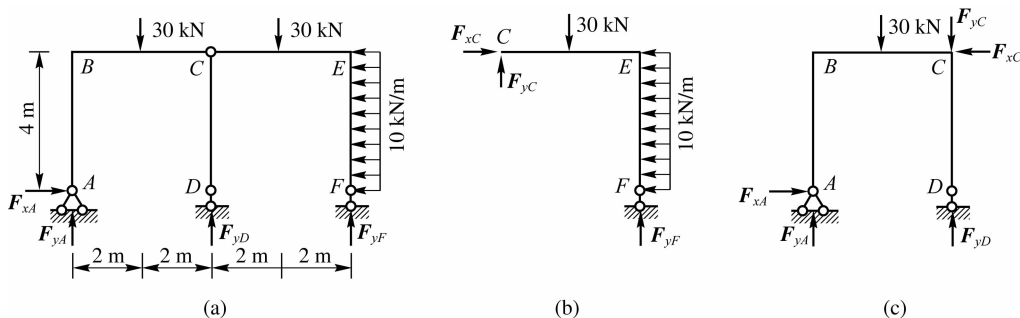


图 2-18 【例 2-6】图

2.3.3 静定平面刚架的内力计算和内力图绘制

当求出支座反力和铰接处的约束力后,刚架任意截面的内力均可由截面法计算出来,或由内力算式求出。若要绘制刚架内力图,则可先求出各杆杆端截面(控制截面)的内力值,然后再根据荷载情况,按内力图的形状特征及叠加法逐杆作出内力图。

刚架的弯矩图画在受拉侧,无须标明正负号;刚架的剪力图和轴力图可画在杆件的任意侧,但要标明正负号。剪力和轴力的正负规定与梁相同。

为了清楚地表示各杆杆端截面内力,在内力符号后引入两个脚标,第一个脚标表示某杆内力所属截面,第二个脚标表示该截面所属杆件的另一端。例如,在如图 2-19(a)所示的刚架中, M_{CA} 表示 CA 杆 C 端的弯矩, F_{QCD} 表示 CD 杆 C 端的剪力,等等。

下面结合图 2-19(a)所示刚架说明静定平面刚架内力计算和内力图的绘制方法,并归纳出绘制刚架内力图的具体步骤。

1. 静定平面刚架的内力计算和内力图绘制方法

(1)求支座反力。由刚架的整体平衡条件,得

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0, -F_{xA} + 8 \times 8 = 0, F_{xA} = 64 \text{ kN}(\leftarrow) \\ \sum M_A &= 0, 8F_{yB} - 8 \times 8 \times 4 = 0, F_{yB} = 32 \text{ kN}(\uparrow) \\ \sum F_y &= 0, -F_{yA} + F_{yB} = 0, F_{yA} = 32 \text{ kN}(\downarrow)\end{aligned}$$

校核

$$\sum M_D = 0, 4F_{yA} + 4F_{yB} - 4F_{xA} = 4 \times 32 + 4 \times 32 - 4 \times 64 = 0$$

反力计算无误。

(2)计算杆端弯矩,作弯矩图。

$$M_{AC} = 0, M_{BD} = 0, M_{ED} = 0$$

由 C 截面以左的外力直接求得

$$M_{CA} = 32 \times 4 = 128 (\text{kN} \cdot \text{m}) (\text{上侧受拉})$$

$$M_{CD} = 32 \times 4 = 128 (\text{kN} \cdot \text{m}) (\text{左侧受拉})$$

由 CD 杆 D 截面以上的外力直接求得

$$M_{CD} = 32 \times 4 - 8 \times 4 \times 2 = 64 (\text{kN} \cdot \text{m}) (\text{右侧受拉})$$

由 DE 杆 D 截面以上的外力直接求得

$$M_{DE} = 8 \times 4 \times 2 = 64 (\text{kN} \cdot \text{m}) (\text{左侧受拉})$$

由 DB 杆 D 截面以右的外力直接求得

$$M_{DB} = 32 \times 4 = 128 (\text{kN} \cdot \text{m}) (\text{下侧受拉})$$

作弯矩图,将各杆段的两杆端弯矩以适当的比例画在受拉侧,当杆段上无荷载时连一条直线,当杆段上有荷载时连一条虚线,再以该虚线为基线,叠加上相应的简支梁在跨间荷载作用下的弯矩图。图 2-19(b)为作出的弯矩图。

(3)求杆端剪力和轴力,作剪力图和轴力图。

由 CA 杆 C 截面以左的外力直接求得

$$F_{QCA} = -32 \text{ kN}, F_{NCA} = 64 \text{ kN}$$

由 CD 杆 C 截面以上的外力直接求得

$$F_{QCD} = 64 \text{ kN}, F_{NCD} = 32 \text{ kN}$$

由 CD 杆 D 截面以下的外力直接求得

$$F_{QDC} = 32 \text{ kN}, F_{NDC} = 32 \text{ kN}$$

由 DE 杆 D 截面以上的外力直接求得

$$F_{QDE} = 32 \text{ kN}, F_{NDE} = 0$$

由 DB 杆 D 截面以右的外力直接求得

$$F_{QDB} = -32 \text{ kN}, F_{NDB} = 0$$

图 2-19(c)、(d)为作出的剪力图和轴力图。

(4)校核。作出全部内力图以后,可截取刚架的任意一部分进行校核。当所取隔离体满

足平衡方程时,说明内力计算无误。

如取结点 C 为隔离体,将计算出的各杆端内力按实际的大小、方向标在隔离体上,得到的受力图如图 2-19(e)所示,由

$$\sum M_C = 128 - 128 = 0, \sum F_y = 32 - 32 = 0, \sum F_x = 64 - 64 = 0$$

可知,结点 C 满足平衡条件,所以内力计算是正确的。

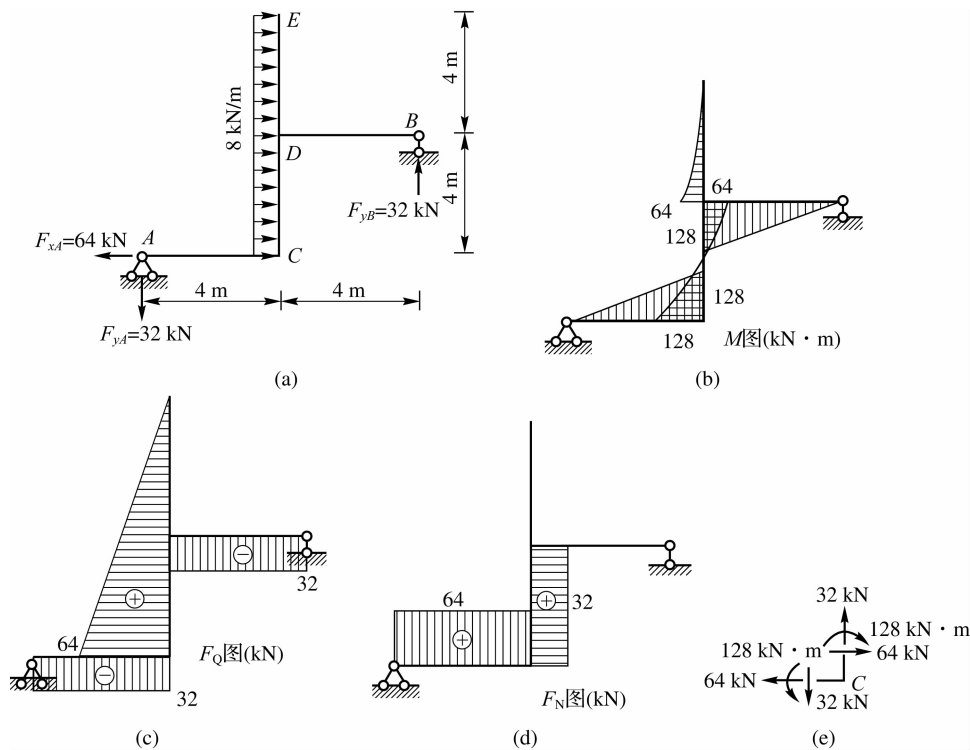


图 2-19 绘制刚架内力图的具体步骤

由图 2-19(e)可见,在刚结点上,不仅应满足力的投影平衡,各杆端弯矩和结点集中力偶还应满足结点的力矩平衡。尤其是,当两杆相交的刚结点上无外力偶作用时,两杆端弯矩等值,同侧(外侧或内侧)受拉。

作上述剪力图和轴力图时,杆端剪力和杆端轴力是根据截面一边的荷载和支座反力直接求出的。对于一些较复杂的情况(如外力比较多、带斜杆刚架或绘制超静定刚架的剪力图和轴力图),当不便利用上述方法计算时,可先利用已作出的弯矩图,取杆件为隔离体,建立力矩平衡方程,求出杆端剪力,作剪力图;然后取结点为隔离体,建立投影平衡方程,由已知的杆端剪力求出杆端轴力,作轴力图。

如本例要求 CD 杆的剪力,可取 CD 杆为隔离体,作用在隔离体上的外力和已知的杆端弯矩按实际方向标出,未知的杆端剪力按正方向标出,轴力忽略不画,如图 2-20(a)所示。建立力矩平衡方程,求剪力。

$$\sum M_D = F_{QCD} \times 4 - 128 - 8 \times 4 \times 2 - 64 = 0, F_{QCD} = 64 \text{ kN}$$

$$\sum M_C = F_{QDC} \times 4 - 128 + 8 \times 4 \times 2 - 64 = 0, F_{QDC} = 32 \text{ kN}$$

同理可以求出其他杆的剪力。作出刚架的剪力图后,分别取结点 C、D 为隔离体[见图 2-20(b)、(c)],利用投影平衡方程即可求出各杆轴力。

结点 C 平衡:

$$\sum F_y = F_{NCD} - 32 = 0, F_{NCD} = 32 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 64 - F_{NCA} = 0, F_{NCA} = 64 \text{ kN}$$

结点 D 平衡:

$$\sum F_y = F_{NDE} + 32 - 32 = 0, F_{NDE} = 0$$

$$\sum F_x = F_{NDB} + 32 - 32 = 0, F_{NDB} = 0$$

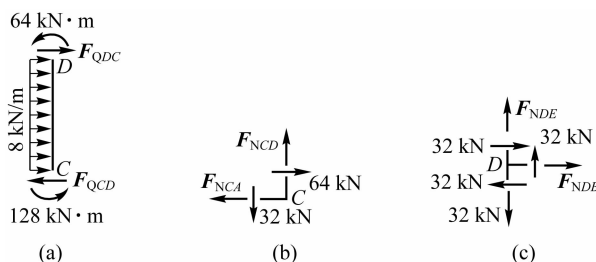


图 2-20 利用平衡条件求剪力和轴力

2. 绘制静定平面刚架内力图的具体步骤

(1)求支座反力。对于悬臂刚架可不求支座反力,由自由端开始作内力图。对于复合刚架,应先进行几何构成分析,然后再计算支座反力,计算顺序与几何构成顺序相反。

(2)求控制截面的内力。控制截面一般选在支承点、结点、集中荷载作用点、分布荷载不连续点。控制截面将刚架划分成受力简单的杆段。运用截面法或直接由截面一边的外力求出控制截面的内力值。

(3)根据每个杆段内的荷载情况,利用内力图的形状特征及叠加法作出内力图。

(4)求杆端截面剪力和轴力有两种方法:一是根据截面一边隔离体上的外力直接求得;二是先作出弯矩图,然后取杆件为隔离体,建立力矩平衡方程,由杆端弯矩求杆端剪力,最后取结点为隔离体,利用投影平衡方程由杆端剪力求杆端轴力。

(5)取刚架的任意一部分为隔离体,验算其是否满足平衡条件。

【例 2-7】 作如图 2-21(a)所示三铰刚架的内力图。

【解】 (1)求支座反力。

由整体平衡条件 $\sum M_B = 0$, 得

$$F_{yA} = \frac{10 \times 6 \times 3 + 60 \times 9}{12} = 60 (\text{kN})$$

由整体平衡条件 $\sum M_A = 0$, 得

$$F_{yB} = \frac{10 \times 6 \times 9 + 60 \times 3}{12} = 60 (\text{kN})$$

取右半边为隔离体,对 C 铰建立力矩平衡方程:

$$\sum M_C = 6F_{yB} - 9F_{xB} - 10 \times 6 \times 3 = 0, F_{xB} = 20(\text{kN})$$

再由整体平衡条件 $\sum F_x = 0, F_{xA} - F_{xB} = 0$, 得 $F_{xA} = 20 \text{ kN}$ 。

(2) 求杆端弯矩, 作弯矩图。

$$M_{AD} = 0, M_{BE} = 0, M_{CD} = 0, M_{CE} = 0$$

由 D 截面以下的外力直接求得

$$M_{DA} = M_{DC} = 20 \times 6 = 120(\text{kN} \cdot \text{m}) (\text{外侧受拉})$$

由 E 截面以下的外力直接求得

$$M_{EB} = M_{EC} = 20 \times 6 = 120(\text{kN} \cdot \text{m}) (\text{外侧受拉})$$

作弯矩图, 将各杆段的两杆端弯矩以适当的比例画在受拉侧并连成一条直线; 当杆段上有荷载时, 以该直线为基线, 叠加上相应的简支梁在跨间荷载作用下的弯矩图。作出的弯矩图如图 2-21(b) 所示。

(3) 求杆端剪力, 作剪力图。对不同的杆件, 杆端剪力用不同的方法求得。对于 DA 杆和 EB 杆, 可用截面以下的外力直接求出杆端剪力: $F_{QDA} = -20 \text{ kN}, F_{QEB} = 20 \text{ kN}$ 。

对于 CD 杆和 CE 杆, 可取 CD 杆和 CE 杆为隔离体[见图 2-21(c)、(d)], 求出杆端剪力:

$$F_{QDC} = \frac{120 + 60 \times 3}{6.708} = 44.72 \text{ kN}, F_{QCD} = \frac{120 - 60 \times 3}{6.708} = -8.94 \text{ kN}$$

$$F_{QEC} = -\frac{120 + 10 \times 6 \times 3}{6.708} = -44.72 \text{ kN}, F_{QCE} = -\frac{120 - 10 \times 6 \times 3}{6.708} = 8.94 \text{ kN}$$

作出的剪力图如图 2-21(e) 所示。

(4) 求杆端轴力, 作轴力图。对不同的杆件, 杆端轴力用不同的方法求得。对于 DA 杆和 EB 杆, 可用截面以下的外力直接求出杆端轴力: $F_{NDA} = -60 \text{ kN}, F_{NEB} = -60 \text{ kN}$ 。

对于 CD 和 CE 两杆, 可取结点 D 和 E 为隔离体[见图 2-21(f)、(g)], 沿杆轴线列投影方程, 求出杆端轴力:

$$F_{NDC} + 20 \cos \beta + 60 \sin \beta = 0, F_{NDC} = -44.72 \text{ kN}$$

$$F_{NEC} + 20 \cos \beta + 60 \sin \beta = 0, F_{NEC} = -44.72 \text{ kN}$$

$$(\cos \beta = 2/\sqrt{5}, \sin \beta = 1/\sqrt{5})$$

为了求出 F_{NCD} 和 F_{NCE} , 可取结点 C 为隔离体, 如图 2-21(h) 所示。由

$$\sum F_x = F_{NCD} \cos \beta + 8.94 \sin \beta - 8.94 \sin \beta - F_{NCE} \cos \beta = 0$$

$$\sum F_y = F_{NCD} \sin \beta - 8.94 \cos \beta - 8.94 \cos \beta + F_{NCE} \sin \beta = 0$$

解得

$$F_{NCD} = F_{NCE} = 17.88(\text{kN}) (\text{压力})$$

作出的轴力图如图 2-21(i) 所示。

(5) 校核。取结点 D 为隔离体, 沿与杆轴线垂直的方向列投影方程:

$$44.72 + 20 \sin \beta - 60 \cos \beta = 44.72 + 8.94 - 53.64 \approx 0$$

满足平衡条件。

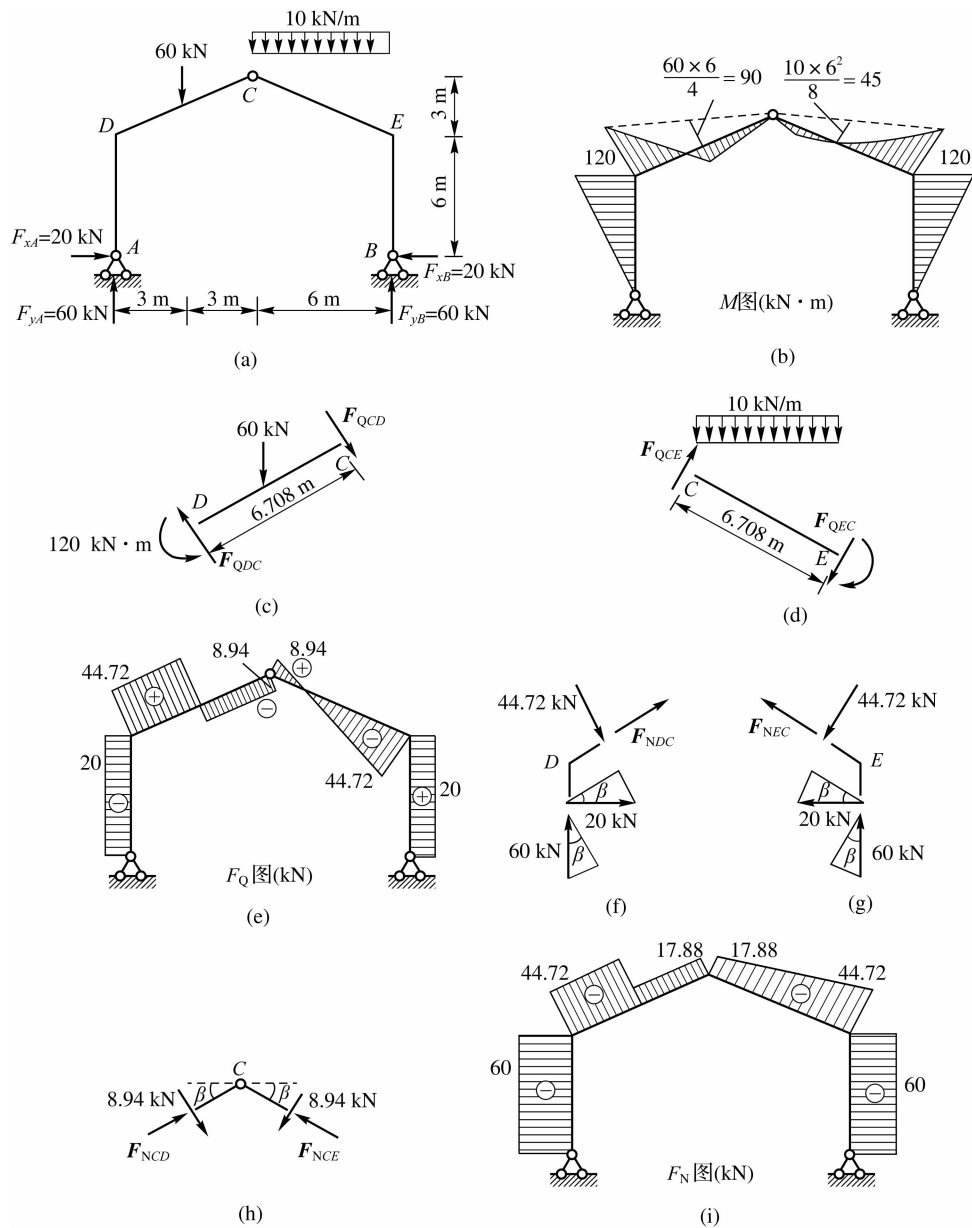


图 2-21 【例 2-7】图

【例 2-8】 作如图 2-22(a)所示刚架的弯矩图。

【解】 (1)求支座反力。该刚架是多跨静定刚架,应先进行几何构成分析,然后按先基本部分后附属部分的顺序计算约束力和支座反力。具体计算过程参见【例 2-6】,计算结果如图 2-22(b)、(c)所示。

当求出支座反力和约束力以后,原刚架实际上已转化为两个简单刚架。其内力计算和内力图的绘制方法与前述例题相同。

(2)计算杆端弯矩。

$$M_{FE}=0, M_{EF}=10 \times 4 \times 2=80(\text{kN} \cdot \text{m}) \text{ (右侧受拉)}$$

由结点 E 的力矩平衡,得

$$M_{EC} = M_{EF} = 80 \text{ kN} \cdot \text{m} (\text{上侧受拉}), M_{CE} = 0$$

CD 杆只有轴力,无弯矩,由结点 C 的力矩平衡,得 $M_{CB} = 0$ 。

AB 杆 B 截面弯矩可由 B 截面以下的外力求得:

$$M_{BA} = 40 \times 4 = 160 (\text{kN} \cdot \text{m}) (\text{左侧受拉})$$

由结点 B 的力矩平衡,得

$$M_{BC} = M_{BA} = 160 (\text{kN} \cdot \text{m}) (\text{上侧受拉})$$

(3)作弯矩图。利用求出的各杆端弯矩值和叠加法作出的弯矩图如图 2-22(d)所示。

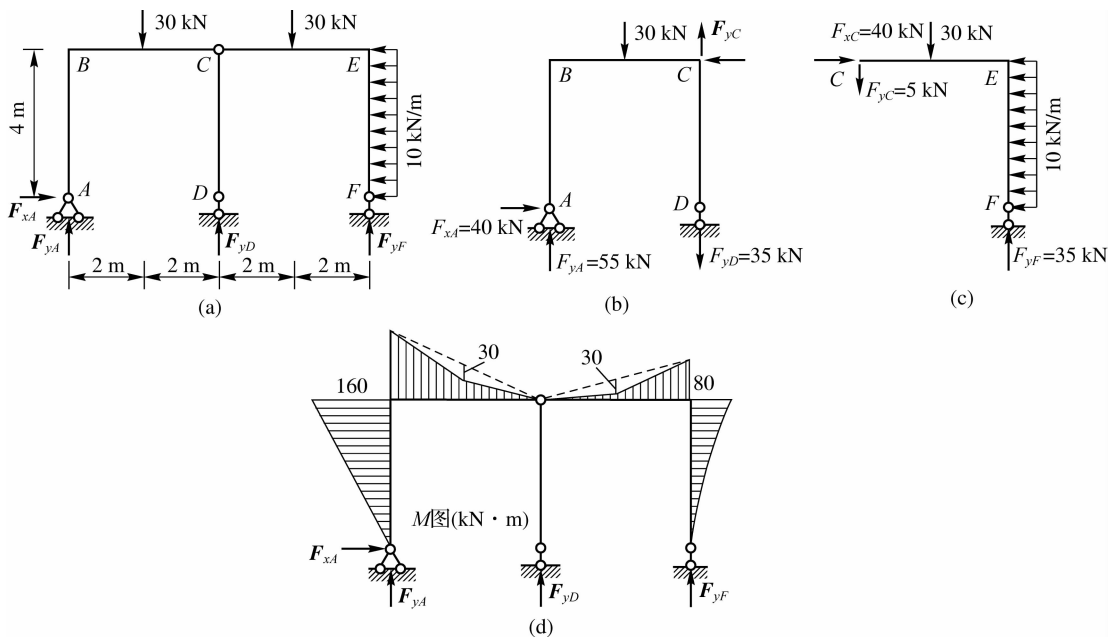


图 2-22 【例 2-8】图

2.4 不求或少求反力绘制弯矩图

静定结构弯矩图绘制是结构力学中最重要的基本内容,要求熟练掌握。根据结构特点和荷载特点,利用弯矩图与荷载、支承、联结之间的对应关系,可以不求或少求支座反力,迅速绘制出弯矩图。下面结合具体例子,说明快速绘制弯矩图的方法。

1. 绘制简支刚架的弯矩图

绘制简支刚架的弯矩图时,只需先求出与杆轴线垂直的支座反力,然后由支座开始作弯矩图即可。

【例 2-9】 作如图 2-23(a)所示刚架的弯矩图。

【解】 (1)先由整体竖向投影平衡,得

$$F_{yA} = 2 \times 2 + 4 = 8 (\text{kN}) (\uparrow)$$

(2)控制截面的弯矩为

$$M_{AD} = M_{BD} = M_{CD} = 0$$

由 DA 杆 D 截面以左的外力求得

$$M_{DA} = 8 \times 2 - 2 \times 2 \times 1 = 12 (\text{kN} \cdot \text{m}) \text{ (下侧受拉)}$$

由 DB 杆 D 截面以右的外力求得

$$M_{DB} = 4 \times 2 = 8 (\text{kN} \cdot \text{m}) \text{ (上侧受拉)}$$

由结点 D 的力矩平衡, 得

$$M_{DC} = 8 (\text{kN} \cdot \text{m}) \text{ (左侧受拉)}$$

(3) 利用已求出的杆端弯矩和叠加法作出弯矩图, 如图 2-23(b) 所示。

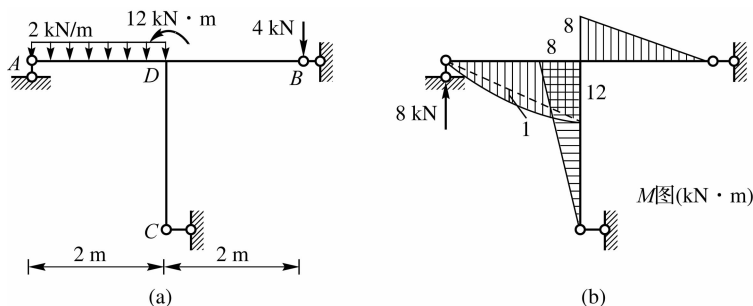


图 2-23 【例 2-9】图

注意: 定向支座处、定向连接处的剪力等于零, 剪力等于零的杆段的弯矩图平行于轴线。利用这个特点可以简化支座反力的计算和弯矩图的绘制。

【例 2-10】 作如图 2-24(a) 所示刚架的弯矩图。

【解】 (1) 求支座反力。首先考虑到 B 点的水平反力为零, 由整体平衡 $\sum F_x = 0$, 得 $F_{xA} = -qa$ ($\leftarrow$)。由 ADC 部分平衡 $\sum F_y = 0$, 得 $F_{yA} = 0$ 。

(2) 求控制截面的弯矩并作出弯矩图。由 F 截面以下的外力得到 $M_{FA} = qa^2$ (右侧受拉), 由 $M_A = 0$ 的点和 $M_{FA} = qa^2$ 点连成一条斜直线; FD 段的截面剪力可由截面以下外力求得为零, FD 段的弯矩图平行于轴线; 由 D 结点平衡得 $M_{DC} = M_{DF} = qa^2$ (下侧受拉), DC 段上的剪力等于零, 弯矩图平行于轴线; 由 E 截面以下的外力得到 $M_{EC} = 2qa^2 - qa^2 - qa^2/2 = qa^2/2$ (下侧受拉), EC 段上的均布荷载向下作用, 弯矩图为向下凸的抛物线, 且与 DC 段上的直线弯矩图相切; 由 E 结点平衡得 $M_{EB} = M_{EC} = qa^2/2$ (左侧受拉), EB 段上的剪力等于零, 弯矩图平行于轴线。作出的弯矩图如图 2-24(b) 所示。

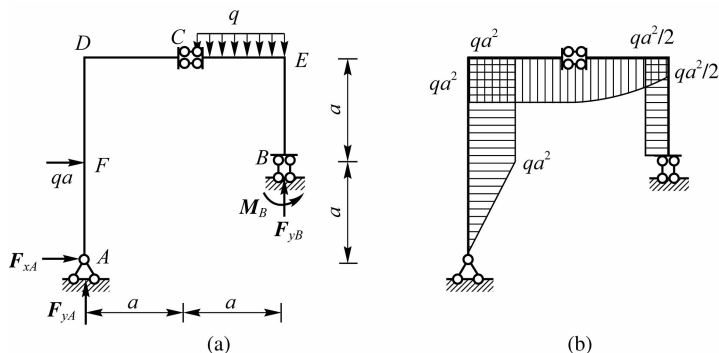


图 2-24 【例 2-10】图

2. 绘制三铰刚架的弯矩图

绘制三铰刚架的弯矩图,常常只需求出水平反力,然后由支座开始作弯矩图。

【例 2-11】 作如图 2-25(a)所示刚架的弯矩图。

【解】 (1)先求水平反力。由整体平衡方程 $\sum M_A=0$,得

$$4 \times 6 \times 3 - 6F_{yB} - 3F_{xB} = 0 \quad (1)$$

由 BC 部分的平衡方程 $\sum M_C=0$,得

$$3F_{yB} - 3F_{xB} = 0 \quad (2)$$

解方程(1)和方程(2),得 $F_{xB}=8 \text{ kN}$ 。

(2)求控制截面的弯矩。由 EB 杆 E 截面以下外力得 $M_{EB}=8 \times 3=24 \text{ kN} \cdot \text{m}$ (右侧受拉),由 E 结点平衡得 $M_{EC}=M_{EB}=24 \text{ kN} \cdot \text{m}$ (上侧受拉)。因为 ED 段无荷载作用,弯矩图为由 $M_C=0$ 的点和 $M_{EB}=24 \text{ kN} \cdot \text{m}$ 的点连成的一条斜直线, $M_{DC}=M_{EC}=24 \text{ kN} \cdot \text{m}$ (下侧受拉),由 D 结点平衡得 $M_{DA}=M_{DC}=24 \text{ kN} \cdot \text{m}$ (右侧受拉),将 $M_A=0$ 的点和 $M_D=24 \text{ kN} \cdot \text{m}$ 的点连成一条虚线,再叠加上简支梁在跨间均布荷载作用下的弯矩。作出的弯矩图如图 2-25(b)所示。

如果三铰刚架仅半边有荷载作用,则另外半边为二力体,其约束反力的方位线为其上的两铰连线。这时,三铰刚架的四个未知反力就归结为三个未知反力,可对其中两个反力的交点建立力矩方程,求出另一个反力,而不需要解联立方程。

如本例 R_B 和 F_{yA} 交于 O 点,如图 2-25(c)所示。由

$$\sum M_O=9F_{xA}+4 \times 6 \times 6=0$$

可得 $F_{xA}=-16 \text{ kN}(\leftarrow)$ 。求出 F_{xA} 后,由 A 支座开始绘制弯矩图,结果同图 2-25(b)。

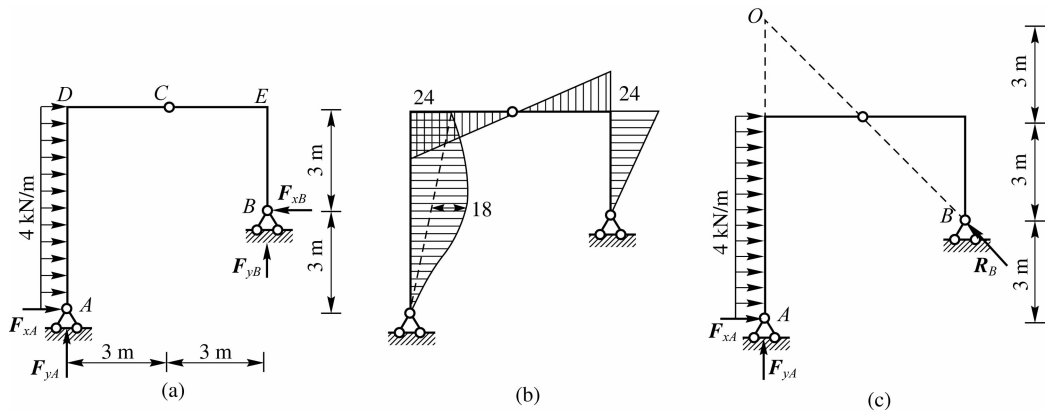


图 2-25 【例 2-11】图

3. 绘制复合结构的弯矩图

绘制复合结构的弯矩图时,要分析其几何构成,由铰支座、铰接点和自由端入手,先作附属部分的弯矩图,利用复合结构的受力特点,可以不求或少求约束力和支座反力。

【例 2-12】 作如图 2-26(a)所示多跨静定梁的弯矩图。

【解】 先作附属部分 CD 段的弯矩图。CD 段的弯矩图,即简支梁的弯矩图, $M_H=qa^2/2$

(下侧受拉); GH 段上无荷载, 弯矩图为一 条直线, 将 HC 段上的弯矩图延伸到 CG 段, $M_G = qa^2/2$ (上侧受拉)。然后作附属部分 AEF 段的弯矩图, 悬臂杆 AE 的弯矩图按悬臂梁作出, 由 E 截面以左外力可得 $M_E = qa^2$ (上侧受拉), EF 段上无荷载, 弯矩图为 $M_E = qa^2$ 的点和 $M_B = 0$ 的点所连成的一条直线。最后作基本部分的弯矩图。将 $M_F = qa^2$ 的点和 $M_G = qa^2/2$ 的点连成一条虚线, 再叠加上简支梁在跨间均布荷载作用下的弯矩图。作出的弯矩图如图 2-26(b) 所示。

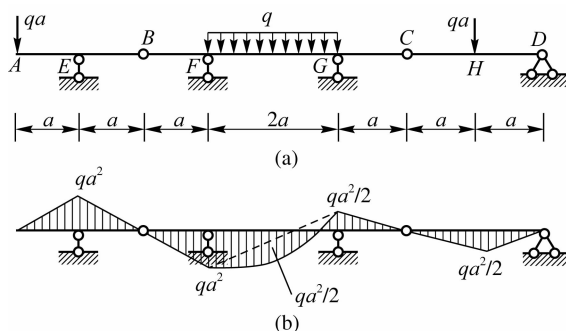


图 2-26 【例 2-12】图

【例 2-13】 作如图 2-27(a) 所示刚架的弯矩图。

【解】 (1) 先求出部分反力。由 AB 段 $\sum F_y = 0$, 求得 $F_{yA} = 80 \text{ kN} (\uparrow)$; 再由整体 $\sum F_x = 0$, 求得 $F_{xF} = 20 \text{ kN} (\leftarrow)$ 。

(2) 求控制截面的弯矩, 作弯矩图。由 C 截面以左外力求得 $M_{CA} = 80 \times 6 - 20 \times 6 \times 3 = 120 \text{ kN} \cdot \text{m}$ (下侧受拉), 以 M_{CA} 和 $M_A = 0$ 连成一条虚线, 再叠加上简支梁的弯矩图, 作出 AC 段的弯矩图。由 C 结点平衡得 $M_{CD} = M_{CA} = 120 \text{ kN} \cdot \text{m}$ (左侧受拉), 因为 CD 段上各截面剪力等于零, 故其弯矩图平行于 CD 杆的轴线, $M_{DC} = M_{CD} = 120 \text{ kN} \cdot \text{m}$ (左侧受拉), 作出 CD 段的弯矩图。由 DF 杆 D 截面以下外力求得 $M_{DF} = 20 \times 4 - 20 \times 2 = 40 \text{ kN} \cdot \text{m}$ (右侧受拉), $M_{EF} = 20 \times 2 = 40 \text{ kN} \cdot \text{m}$ (右侧受拉), $M_F = 0$, 由这三个竖标连成两条直线, 作出 DF 段的弯矩图。由 D 结点力矩平衡方程求得 $M_{DG} = 160 \text{ kN} \cdot \text{m}$ (下侧受拉), 以 M_{DG} 和 $M_G = 0$ 连成一条虚线, 再叠加上简支梁的弯矩图, 作出 DG 段的弯矩图。整个结构的弯矩图如图 2-27(b) 所示。

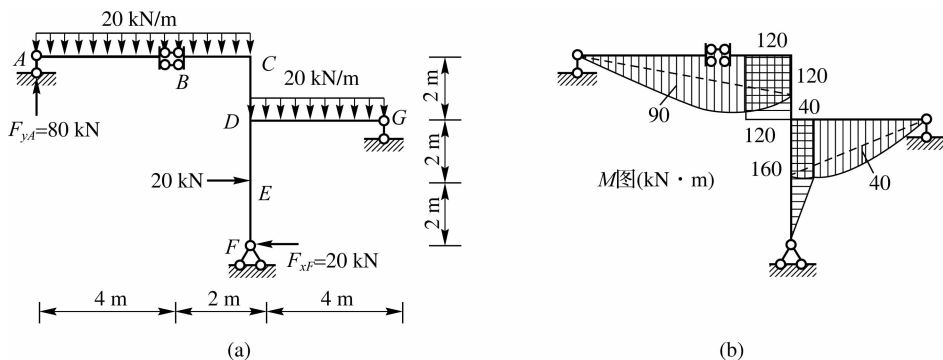


图 2-27 【例 2-13】图

【例 2-14】 作如图 2-28(a)所示刚架的弯矩图。

【解】 先作出三个悬臂杆的弯矩图(按悬臂梁绘制), $M_{AF} = F_P h$ (右侧受拉), $M_{CG} = 2F_P h$ (右侧受拉), $M_{DH} = 2F_P h$ (右侧受拉)。由 A 结点力矩平衡得 $M_{AB} = M_{AF} = F_P h$ (上侧受拉), 因为 AC 段上无荷载作用, 所以弯矩图为一斜直线, 将 M_{AB} 和 $M_B = 0$ 连成一条斜直线, 得到 AC 段的弯矩图, $M_{CB} = F_P h$ (下侧受拉)。由 C 结点力矩平衡求得, $M_{CD} = 2F_P h - F_P h = F_P h$ (上侧受拉), 以 M_{CD} 和 $M_D = 0$ 连成一条直线, 得到 CD 段的弯矩图。由 D 结点力矩平衡求得 $M_{DE} = 2F_P h$ (上侧受拉), 因为 CE 段上的剪力为常数, 所以 CD 段的弯矩图和 DE 段的弯矩图互相平行, 以 $M_{DE} = 2F_P h$ 作 DE 段的弯矩图平行于 CD 段的弯矩图, $M_E = 0$ 。整个结构的弯矩图如图 2-28(b)所示。

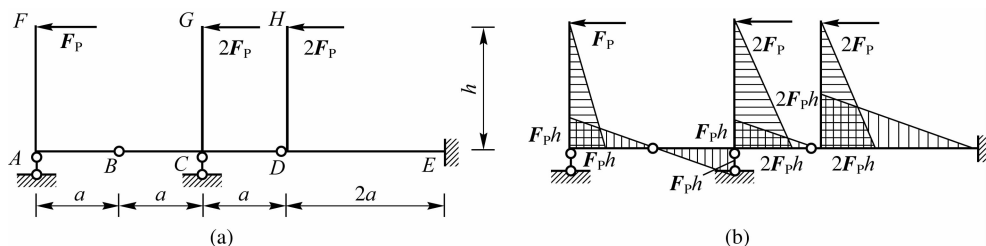


图 2-28 【例 2-14】图

4. 利用对称性简化弯矩图的绘制

对称结构指的是几何形状、支承和刚度分布都关于某轴对称的结构。而静定结构的内力与杆件刚度无关, 因此只要结构的几何形状和支承情况对称, 在进行内力分析时就可以利用对称性。

(1) 对称荷载——绕对称轴对折后, 对称轴两边的荷载作用点重合、值相等、方向相同。所以, 在大小相等、作用点对称的前提下, 与对称轴垂直反向布置的荷载、与对称轴平行同向布置的荷载、与对称轴重合的荷载都是对称荷载, 如图 2-29(a)所示。

(2) 反对称荷载——绕对称轴对折后, 对称轴两边的荷载作用点重合、值相等、方向相反。所以, 在大小相等、作用点对称的前提下, 与对称轴垂直同向布置的荷载、与对称轴平行反向布置的荷载、与垂直作用在对称轴上的荷载、与位于对称轴上的集中力偶都是反对称荷载, 如图 2-29(b)所示。

(3) 重要结论。

① 对称结构在对称荷载的作用下, 受力成对称分布。对称荷载作用下对称轴上的微段受力如图 2-29(c)所示, 由平衡条件可得到对称轴上的截面剪力为零; 对称荷载作用下对称轴上的结点受力如图 2-29(d)所示, 由平衡条件可得到与对称轴重合的杆弯矩、剪力为零。

② 对称结构在反对称荷载的作用下, 受力成反对称分布。反对称荷载作用下对称轴上的微段受力如图 2-29(e)所示, 由平衡条件可得到对称轴上的截面弯矩、轴力为零; 反对称荷载作用下对称轴上的结点受力如图 2-29(f)所示, 由平衡条件可得到与对称轴重合的杆轴力为零。

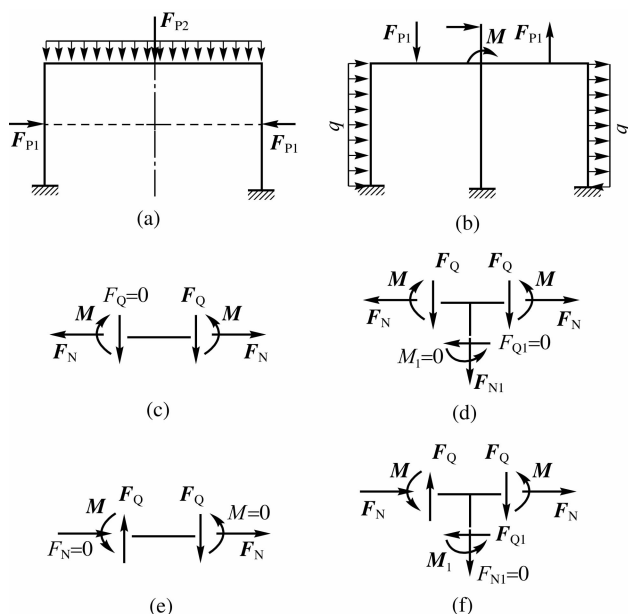


图 2-29 对称结构的受力特点

【例 2-15】 作如图 2-30(a)所示刚架的弯矩图。

【解】 因结构对称、荷载对称,故 $M_{DC} = M_{EC}$; 又有 DE 段用叠加法作弯矩图的结果要使 $M_C = 0$, 故 $M_{DC} = M_{EC} = \frac{q}{8} (2a)^2 = \frac{1}{2} qa^2$, 且同为上侧受拉; 又因 $M_{DF} = M_{EG} = \frac{q}{2} (0.5a)^2 = \frac{qa^2}{8}$ (上侧受拉), 由结点 D 力矩平衡得, $M_{DA} = M_{EB} = \frac{1}{2} qa^2 - \frac{1}{8} qa^2 = \frac{3}{8} qa^2$ (外侧受拉)。根据各控制截面弯矩值及弯矩图的形状特征, 即可作出整个结构的弯矩图, 如图 2-30(b)所示。

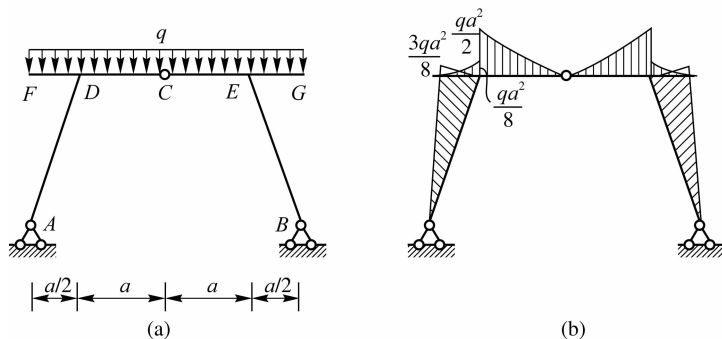


图 2-30 【例 2-15】图

另外, M_{DC} 也可以这样求出: 因结构和荷载对称, 必有对称轴上的截面剪力 $F_{QC} = 0$, 取 DC 为隔离体, 求得 $M_{DC} = \frac{1}{2} qa^2$ (上侧受拉)。

【例 2-16】 作如图 2-31(a)所示刚架的弯矩图。

【解】 因结构对称、荷载对称, 故与对称轴重合的 CH 杆的弯矩为零; 因 H 点无竖向支座反力, 故 CH 杆的轴力也为零; 又因 A 、 B 支座的竖向反力对称, 又要满足整体的竖向投影

平衡,故 A 、 B 支座的竖向反力必为零。因此, DE 段的剪力为零,弯矩图平行于轴线,其中 DF 段、 GE 段弯矩图的竖标为 m , FG 段弯矩图的竖标为零;由结点 D 、 E 力矩平衡,分别得到 $M_{DA}=m$ 、 $M_{EB}=m$ 。整个结构的弯矩图如图 2-31(b)所示。

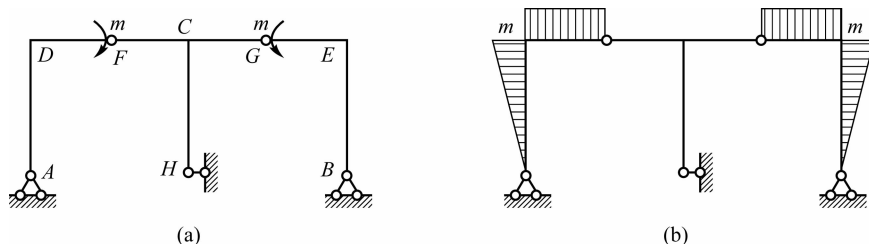


图 2-31 【例 2-16】图

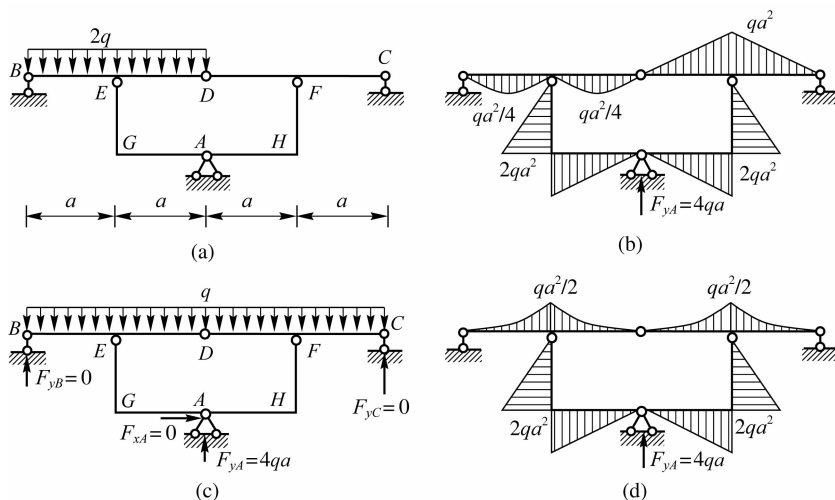
在一般荷载作用下,可将对称结构的荷载分解为对称荷载和反对称荷载,分别绘制它们的弯矩图后,再叠加,常可使原问题的弯矩图绘制得到简化。

【例 2-17】 作如图 2-32(a)所示刚架的弯矩图。

【解】 将荷载分成图 2-32(c)和图 2-32(e)相加。图 2-32(c)为对称荷载作用, $F_{QD}=0$, 取 BED 为隔离体,由 $\sum M_E=0$,得到 $F_{yB}=0$,故 BE 、 ED 、 DF 、 FC 段的弯矩图相当于悬臂梁的弯矩图。再由整体 $\sum F_y=0$,得到 $F_{yA}=4qa$,因 $M_{GA}=M_{HA}$,又有 GH 段用叠加法作弯矩图的结果要使 $M_A=0$,故 $M_{GA}=M_{HA}=\frac{4qa}{4}2a=2qa^2$,且同为下侧受拉;由结点 G 平衡得, $M_{GE}=M_{HF}=2qa^2$ (外侧受拉)。根据各控制截面弯矩值及弯矩图的特征,作出对称荷载作用下的弯矩图,如图 2-32(d)所示。

图 2-32(e)为反对称荷载作用, $F_{yA}=0$,由整体 $\sum F_x=0$,得到 $F_{xA}=0$,故 $EGAHF$ 不受力, BD 、 DC 段的弯矩图相当于简支梁的弯矩图。作出反对称荷载作用下的弯矩图,如图 2-32(f)所示。

将图 2-32(d)和图 2-32(f)叠加即得原结构的弯矩图,如图 2-32(b)所示。



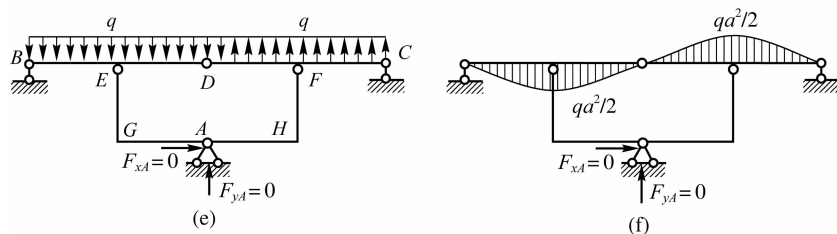


图 2-32 【例 2-17】图

【例 2-18】 作如图 2-33(a)所示刚架的弯矩图。

【解】 将荷载分成对称荷载[见图 2-33(b)]和反对称荷载[见图 2-33(c)]两种情况。

在对称荷载作用下,结构不产生弯矩。

在反对称荷载作用下, $M_{IK} = 0$, 这样, 图 2-33(c) 又关于水平轴反对称。取出 $FEGAH$ 为隔离体[见图 2-33(d)], 因其受力反对称, 故 $F_{QF} = F_{QH} = 10$ kN; 取出 $CEAI$ 为隔离体[见图 2-33(e)], 因其受力反对称, 故 $F_{QC} = F_{QI} = 10$ kN。由求出的约束力进一步求出各杆端弯矩, 绘出弯矩图, 如图 2-33(f) 所示。

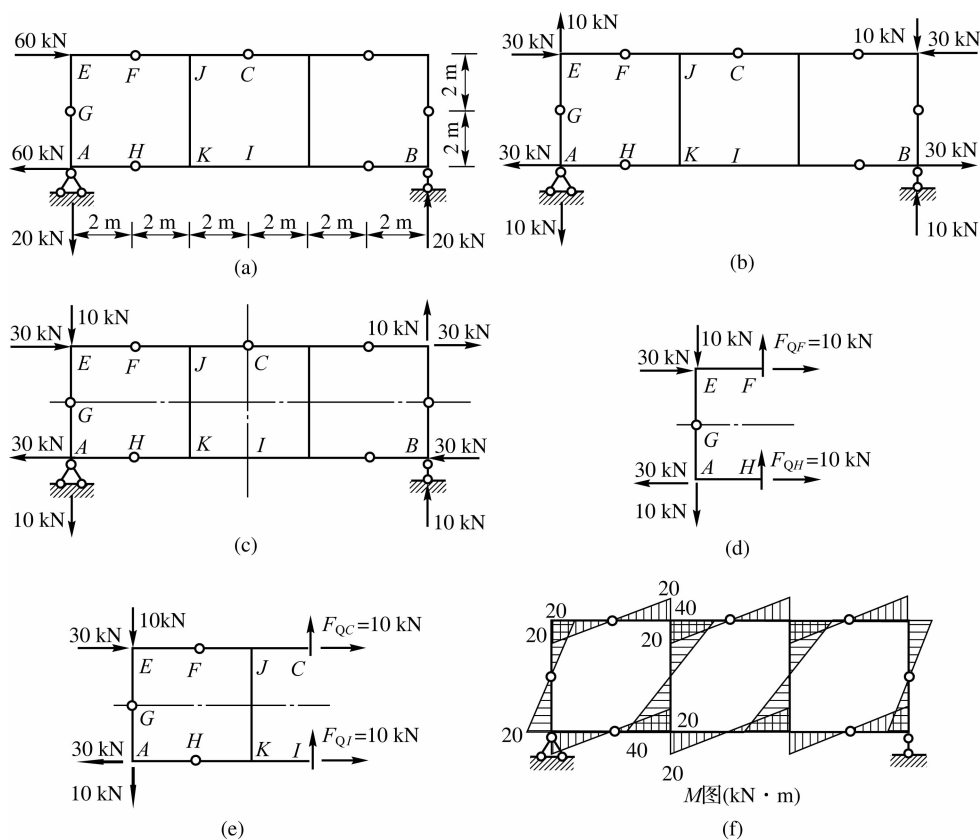


图 2-33 【例 2-18】图

2.5 桁架的内力计算

2.5.1 桁架的特点及类型

1. 桁架的特点

桁架是工程中应用较广泛的一种结构。除在桥和塔架结构中使用桁架外,还在屋架结构中使用桁架。图 2-34(a)为南京长江大桥的主体桁架结构,图 2-34(b)为一钢筋混凝土屋架。

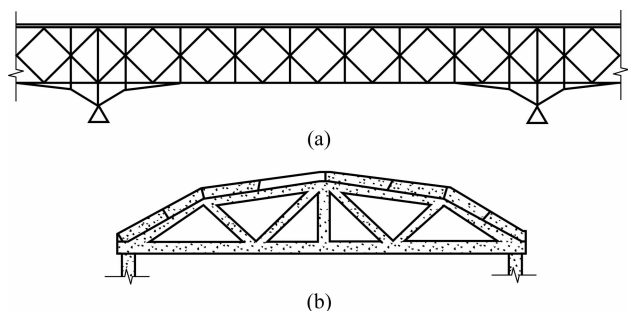


图 2-34 桁 架

实际工程中的桁架构件很多,受力比较复杂。为简化桁架的内力计算,常引入以下几点假定:

- (1) 桁架的结点都是光滑的铰接点。
- (2) 各杆的轴线都是直线并通过铰的中心。
- (3) 荷载和支座反力都作用在结点上。

满足以上假定的桁架称为理想桁架。根据以上假定,理想桁架的各杆为二力杆,只承受轴力;截面上的应力均匀分布,可以充分发挥材料的性能,具有质量轻、承受荷载大的特点。理想桁架是大跨度结构常用的一种结构形式。

由上述假设,可将如图 2-34(b)所示的钢筋混凝土屋架简化成如图 2-35 所示的桁架计算简图,则屋面和各杆的质量都化为集中荷载作用在结点上。

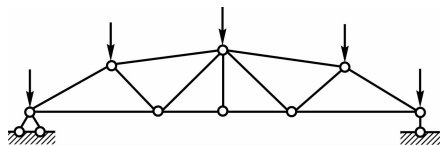


图 2-35 桁架计算简图

实际桁架与上述假定并不完全相同。首先,在各杆的连接处,钢桁架采用焊接和铆接,钢筋混凝土桁架采用现浇连接,结点都有很大的刚性。其次,各杆的轴线不一定是直线,也不一定准确交于结点上。另外,刚架也不是只承受结点荷载的作用(如自重、风荷载)。但工程实践证明,以上因素对桁架计算的影响是次要的。我们将按理想桁架计算的内力称

为主内力,而将与上述假定不同而产生的附加内力称为次内力。这里只研究主内力的计算。

2. 桁架的类型

按桁架的几何构成特点,桁架可分为以下三类:

(1)简单桁架。由基础或一个基本铰接三角形开始,依次增加二元体而组成的桁架,称为简单桁架,如图 2-36 所示。

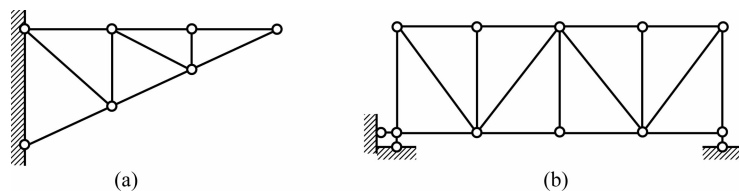


图 2-36 简单桁架

(2)联合桁架。由两个或三个简单桁架按几何不变体系的组成规律组合而成的桁架,称为联合桁架。图 2-37 所示的桁架由三个简单桁架(I、II、III)用 A、B、C 三个铰组合而成,然后简支在基础上。

(3)复杂桁架。凡不属于前两类的桁架,均称为复杂桁架,如图 2-38 所示。复杂桁架的几何不变性往往无法用两刚片及三刚片组成法则加以分析,需用其他方法(如零荷载法)予以判别。

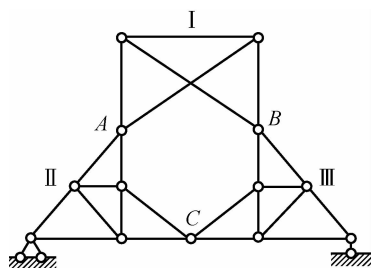


图 2-37 联合桁架

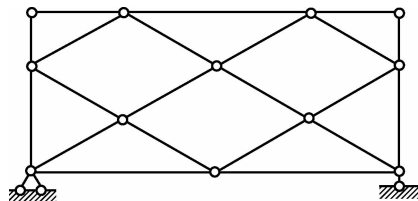


图 2-38 复杂桁架

2.5.2 桁架计算数解法

在求解静定桁架时,可以截取桁架中的一部分为隔离体,建立隔离体的平衡方程,求解支座反力和杆的内力。

在建立平衡方程时,经常要把杆件的轴力 F_N 分解为水平分力 F_x 和竖向分力 F_y 。在图 2-39 中,由杆 AB 的杆长 l 及其两个投影长度 l_x 、 l_y 组成的三角形,与杆的轴力 F_N 及其两个分力 F_x 、 F_y 组成的三角形相似(对应边相互平行),因此有下列比例关系:

$$\frac{F_N}{l} = \frac{F_x}{l_x} = \frac{F_y}{l_y} \quad (2-4)$$

利用这个比例关系,可以很方便地由 F_N 、 F_x 、 F_y 中的一个推算出其他两个,而不需要使用三角函数进行计算。

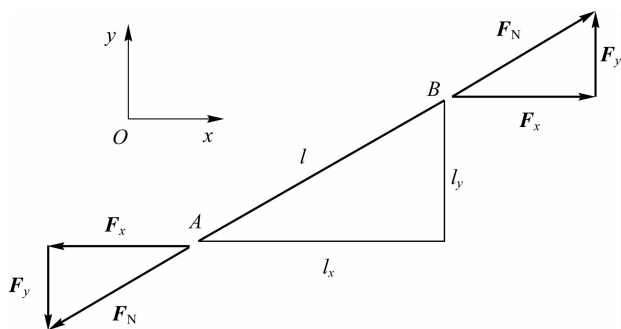


图 2-39 静定桁架的内力计算

1. 结点法

取桁架中的单个结点为隔离体,隔离体上的力组成一个平面汇交力系,可建立两个独立的平衡方程。

对于包含 j 个结点、 b 个杆件(包括支杆)的静定桁架,其计算自由度 $W=2j-b=0$,即 $2j=b$ 。因此,利用 j 个结点的 $2j$ 个独立的平衡方程,便可确定全部 b 个杆件的未知力。但是,为了避免求解联立方程组,所取结点未知力的数目不应多于两个。但对于简单桁架,按几何构成相反的顺序逐一截取结点,就可以不解联立方程组而求出所有的内力。因此,结点法特别适用于简单桁架的计算。计算时,轴力以拉为正,以压为负;对未知轴力均假设为拉力。

【例 2-19】 利用结点法求图 2-40(a)所示桁架各杆的内力。

【解】 (1)求支座反力。 $F_{yA} = F_{yB} = 8 \text{ kN}$ 。

(2)取结点 A 为隔离体,其受力如图 2-40(b)所示。将未知轴力均假设为拉力,并将斜杆轴力分解为水平分力和竖向分力。由 $\sum F_y = 8 + F_{yAD} = 0$,得 $F_{yAD} = -8 \text{ kN}$ 。由式(2-4)得

$$F_{xAD} = -8 \times \frac{3}{4} = -6 \text{ kN}, F_{NAD} = -8 \times \frac{5}{4} = -10 \text{ kN}$$

由 $\sum F_x = F_{NAC} + F_{xAD} = 0$,得 $F_{NAC} = 6 \text{ kN}$ 。

(3)取结点 D 为隔离体,其受力如图 2-40(c)所示。将斜杆轴力分解为水平分力和竖向分力。由 $\sum F_y = 8 + F_{yDA} + F_{yDC} = 0$,得 $F_{yDC} = -8 - F_{yDA} = -8 - (-8) = 0$ 。所以, $F_{xDC} = F_{NDC} = 0$ 。

由 $\sum F_x = F_{NDE} - F_{xDA} + F_{xDC} = 0$,得 $F_{NDE} = -6 \text{ kN}$ 。

(4)由于结构和荷载都是对称的,所以处于对称位置的杆件的轴力也是对称的。因此

$$F_{NCE} = F_{NCD} = 0, F_{NCB} = F_{NCA} = 6 \text{ kN}, F_{NEB} = F_{NDA} = -10 \text{ kN}$$

(5)校核。取对称轴上的 C 点校核平衡条件,如图 2-40(d)所示。

$$\sum F_y = F_{yCD} + F_{yCE} = 0 + 0 = 0$$

$$\sum F_x = F_{NCB} + F_{xCE} - F_{NCA} - F_{xCD} = 6 + 0 - 6 - 0 = 0$$

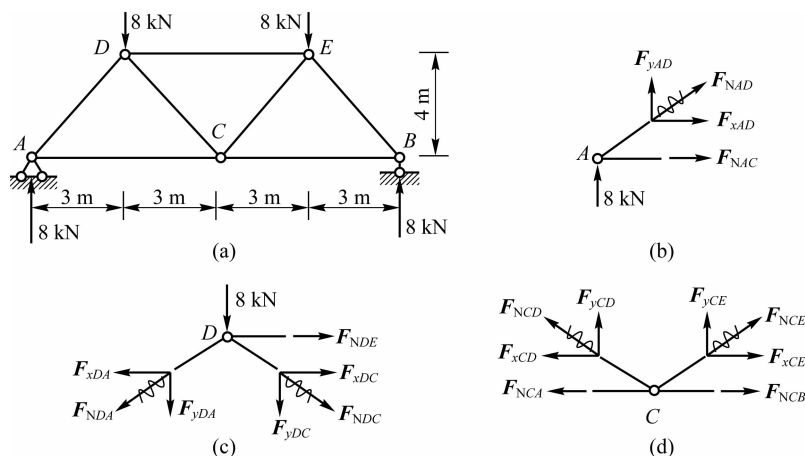


图 2-40 【例 2-19】图

以下是几种特殊情况下的平衡规律：

(1) L 形结点。如图 2-41(a) 所示，两杆结点，当结点上无外力时，两杆的轴力都是零。内力为零的杆称为零杆。

(2) T 形结点。如图 2-41(b) 所示，三杆结点而其中两杆共线，当结点上无外力时，第三杆(单杆)必为零杆，而共线的两杆为等力杆(轴力等值同号)。

(3) X 形结点。如图 2-41(c) 所示，四杆结点且两两共线，当结点上无外力时，共线的两杆为等力杆。

(4) K 形结点。如图 2-41(d) 所示，四杆结点，其中两杆共线，另外两根斜杆与它们交成相同的角度，当结点上无外力时，两根斜杆轴力等值反号。

以上结论，均可根据结点的投影平衡方程得出。读者可自行证明。

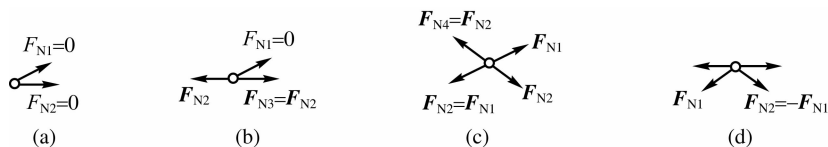


图 2-41 几种特殊情况下的平衡规律

由【例 2-19】的结果可知，对称结构在对称荷载作用下，当对称轴上的 K 形结点无外力作用时，两根斜杆是零杆。由 2.4 节可知，对称结构在反对称荷载作用下，与对称轴垂直贯穿的杆轴力等于零，与对称轴重合的杆轴力等于零。

应用以上结论，不难判断出图 2-42 所示各结构中的零杆(图中虚线)。

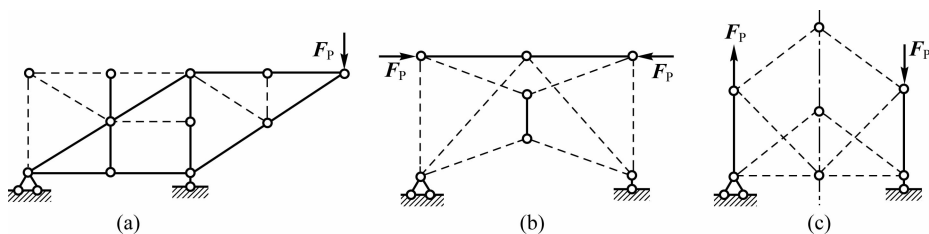


图 2-42 零杆的判断

2. 截面法

截面法是截取桁架中的一部分(包含两个或两个以上结点)为隔离体,隔离体上作用的力系组成一个平面一般力系,可建立三个独立的平衡方程。为了避免求解联立方程组,所取截面切开的未知力杆数一般不要多于三根。还要注意建立恰当的平衡方程。例如,以两个未知力的交点为矩心建立力矩方程,当两个未知力平行时,沿与两个平行未知力垂直的方向建立投影方程;将轴力沿适当方向分解成两个分力,再利用比例关系进行计算。

截面法常用于联合桁架的计算和桁架中指定杆件的内力计算。

【例 2-20】 使用截面法求图 2-43(a)所示桁架指定杆件的内力。

【解】 (1)求支座反力。 $F_{yA}=F_{yB}=100\text{ kN}$ 。

(2)取 I—I 截面以右为隔离体,其受力如图 2-43(b)所示。求 F_{Nc} 时,对另外两个未知力的交点 C 建立力矩方程 $\sum M_C=100\times 4+F_{Na}\times 3=0$,得 $F_{Na}=-133.33\text{ kN}$ 。

求 F_{Nc} 时,对另外两个未知力的交点 E 建立力矩方程,并将 F_{Nc} 滑移到 D 点,再分解成水平分力和竖向分力。由

$$\sum M_E=100\times 8-60\times 4-4F_{xc}=0$$

得

$$F_{xc}=140\text{ kN}$$

又由式(2-4)得

$$F_{Nc}=\frac{F_{xc}}{4}\sqrt{17}=144.31\text{ kN}$$

求 F_{Nb} 时,由 $\sum F_x=-F_{xc}-F_{xb}-F_{Na}=0$,得 $F_{xb}=-6.67\text{ kN}$ 。

由式(2-4)得 $F_{Nb}=5\frac{F_{xb}}{4}=-8.33\text{ kN}$ 。

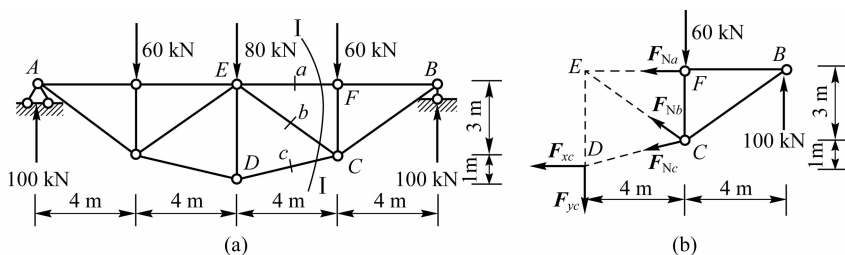


图 2-43 【例 2-20】图

当用截面法求桁架内力时,若截断的未知力杆数不超过三根,则全部未知力均可直接求出。即使截面截断了三根以上的杆件,但只要在被截各杆中,除一杆外,其余各杆均汇交于一点或平行,则该杆内力仍可用力矩方程或投影方程求出。如图 2-44(a)所示的桁架,若取截面 I—I 以右为隔离体,则由 $\sum M_C=0$ 就可求出 F_{N1} 。如图 2-44(b)所示的桁架,取截面 I—I 以右为隔离体,则由 $\sum F_n=0$ 就可求出 F_{N1} 。

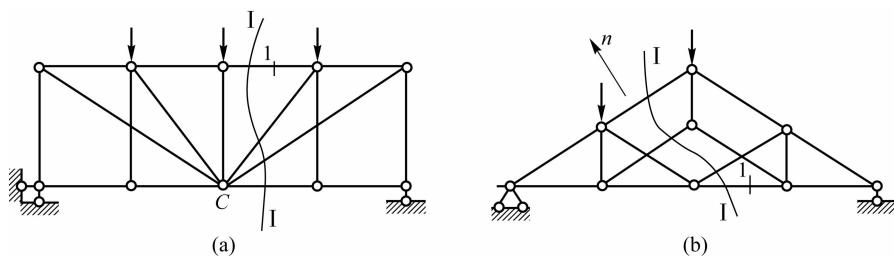


图 2-44 截面单杆

在计算联合桁架时,一般先用截面法求出各简单桁架之间的约束力,然后再应用适当的方法分别计算简单桁架各杆的内力。如图 2-45(a)所示的桁架,首先取截面 I—I 以右为隔离体,求出杆 1、2、3 的内力,然后再用结点法对各简单桁架进行分析。如图 2-45(b)所示的桁架,取截面 I—I 以上为隔离体,建立 $\sum M_A=0$,取截面 II—II 以右为隔离体,建立 $\sum M_C=0$,联立求解这两个方程,可求出铰 B 的约束力。之后再进行其他杆件的内力计算就比较简单了。

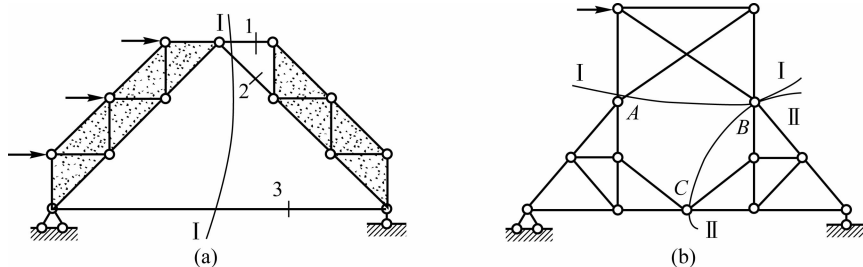


图 2-45 联合桁架的求解

3. 结点法与截面法的联合应用

虽然结点法和截面法是计算桁架内力的两种基本方法,但是在进行桁架计算时,单独使用其中一种方法,有时并不简便。在计算桁架中指定杆件的内力,或者计算复杂桁架时,都必须不拘先后地联合使用结点法和截面法。另外还要注意,选择合适的隔离体,使出现的未知力较少;建立恰当的平衡方程(要注意巧取矩心、投影轴和建立方程的先后顺序),尽量使每个方程中只含一个未知力,以使计算工作简捷有效。

【例 2-21】 使用截面法求图 2-46(a)所示桁架指定杆件的内力。

【解】 (1)求支座反力。 $F_{yA}=F_{yB}=3F_P$ 。

(2)求 F_{N1} 时,取 I—I 截面以左为隔离体,其受力如图 2-46(b)所示。对 D 点建立力矩方程 $\sum M_D=2.5F_P \times 4 + F_{N1} \times 6=0$,得 $F_{N1}=-\frac{5}{3}F_P$ 。

(3)求 F_{N2} 和 F_{N4} 。因为 G 点是 K 形结点,所以 $F_{x2}=-F_{x4}$,则有 $F_{y2}=-F_{y4}$,取 II—II 截面以左为隔离体,其受力如图 2-46(c)所示。建立竖向投影方程

$$\sum F_y=3F_P-0.5F_P-F_P+F_{y2}-F_{y4}=0$$

得 $F_{y2} = -\frac{3}{4}F_P$ 。由式(2-4)得 $F_{N2} = \frac{F_{y2}}{3} \times 5 = -\frac{5}{4}F_P$, $F_{N4} = -F_{N2} = \frac{5}{4}F_P$ 。

(4) 求出 F_{N2} 以后, 可取 F 点为隔离体, 其受力如图 2-46(d) 所示。建立竖向投影方程 $\sum F_y = 0$, 即 $-F_P - F_{y2} - F_{N3} = 0$, 得 $F_{N3} = -\frac{1}{4}F_P$ 。

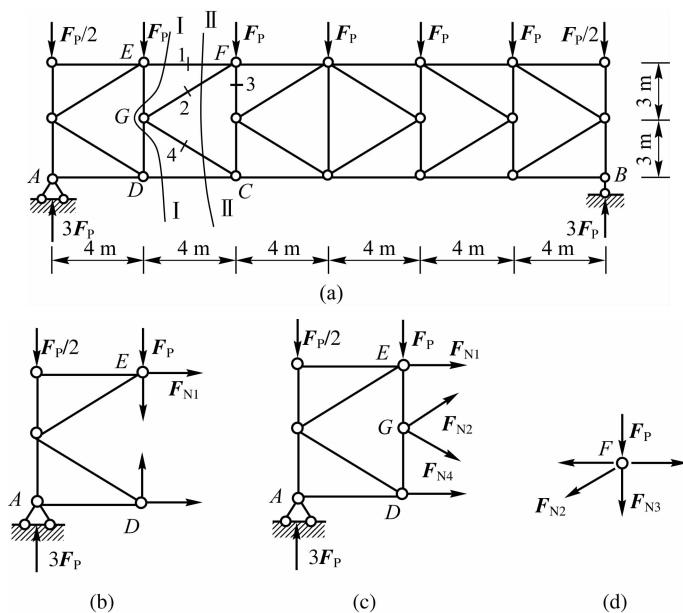


图 2-46 【例 2-21】图

【例 2-22】 试用截面法求图 2-47(a) 所示桁架指定杆件的内力。

【解】 (1) 先判断出零杆, 如图 2-47(a) 中虚线所示。

(2) 取 I—I 截面以左为隔离体, 其受力如图 2-47(b) 所示。对 F 点建立力矩方程

$$\sum M_F = F_P \times 4 - F_{NCE} \times 6 = 0$$

得 $F_{NCE} = \frac{2}{3}F_P$ 。

再取 C 点为隔离体, 其受力如图 2-47(c) 所示。建立水平投影方程

$$\sum F_x = F_{NCE} - F_{x1} = 0$$

得 $F_{x1} = \frac{2}{3}F_P$ 。

由式(2-4)得 $F_{N1} = \frac{F_{x1}}{4} \times 5 = \frac{5}{6}F_P$ 。

(3) 取 D 点为隔离体, 其受力如图 2-47(d) 所示。建立竖向投影方程

$$\sum F_y = F_{y2} - F_P = 0$$

得 $F_{y2} = F_P$ 。

由式(2-4)得 $F_{N2} = \frac{F_{y2}}{6} \times \sqrt{52} = \frac{\sqrt{13}}{3}F_P$ 。

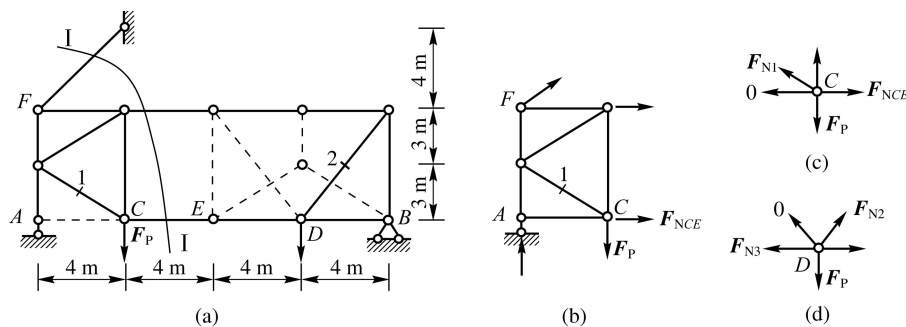


图 2-47 【例 2-22】图

【例 2-23】 试用截面法求图 2-48(a)所示桁架指定杆件的内力。

【解】 (1) 由内部 X 形结点知, 位于同一斜线上的腹杆内力相等; 由周边上的 K 形结点知, 各腹杆内力值相等, 但正负号交替变化。所有右上斜杆同号, 设为 F_N ; 所有右下斜杆同号, 则为 $-F_N$ 。

(2) 取 I—I 截面以上为隔离体, 其受力如图 2-48(b) 所示, 建立水平投影方程

$$\sum F_x = F_P - 5F_x = 0$$

$$\text{得 } F_x = \frac{1}{5} F_P。$$

(3) 取 C 点为隔离体, 其受力如图 2-48(c) 所示, 建立水平投影方程

$$\sum F_x = -F_{N1} - 2F_x = 0$$

$$\text{得 } F_{N1} = -\frac{2}{5} F_P。$$

(4) 取 II—II 截面以右为隔离体, 其受力如图 2-48(d) 所示, 建立水平投影方程

$$\sum F_x = -F_{N1} - F_{N2} = 0$$

$$\text{得 } F_{N2} = \frac{2}{5} F_P。$$

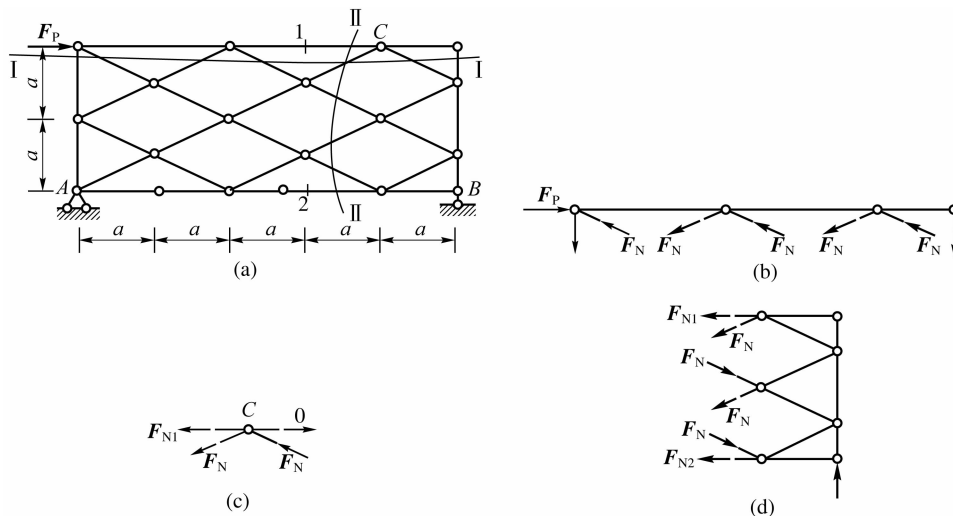


图 2-48 【例 2-23】图

2.6 组合结构的内力计算

组合结构由链杆和梁式杆组成。图 2-49(a) 为下撑式五角形屋架, 上弦由钢筋混凝土制成, 下弦和腹杆为型钢, 其计算简图如图 2-49(b) 所示。钢筋混凝土结构为加固工程中常采用的结构形式, 当钢筋混凝土梁开裂接近破坏时[见图 2-50(a)], 其下面应用预应力拉杆进行加固, 形成如图 2-50(b) 所示的组合结构。

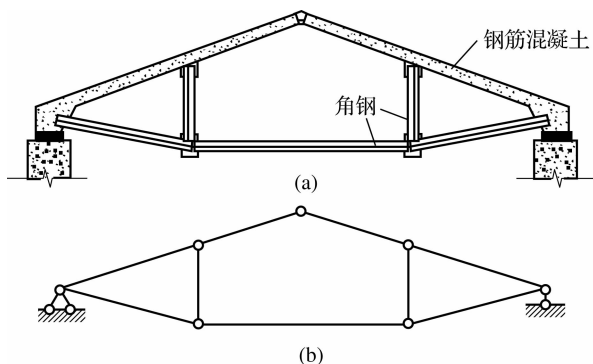


图 2-49 下撑式五角形屋架及其计算简图

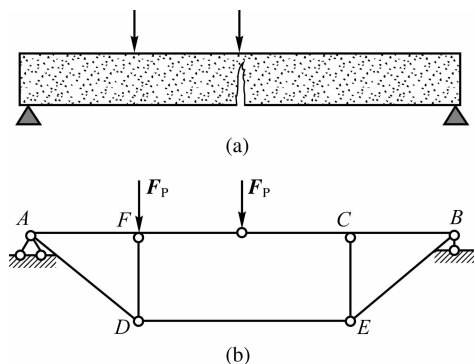


图 2-50 组合结构

静定组合结构的计算方法仍然是结点法和截面法, 计算步骤与其他静定结构相同。但应特别注意以下几点:

(1) 所截断的杆是链杆(截面上只作用轴力), 还是梁式杆(截面上作用轴力、剪力和弯矩)。

(2) 前面关于桁架结点的一些特性对有梁式杆的结点不再适用。如在图 2-50(b) 所示的组合结构中, $F_{NCE} \neq 0$, $F_{NDF} \neq -F_P$ 。

(3) 由于梁式杆一般有三个内力, 为了不使隔离体上的未知力过多, 取隔离体时, 应截断链杆和铰接点, 尽可能地避免截断梁式杆。

(4) 计算组合结构的步骤一般是先计算各链杆的轴力和铰接点处的约束力, 然后计算梁式杆的内力。

【例 2-24】 试计算如图 2-51(a) 所示的组合结构。

【解】 (1) 求支座反力。 $F_{yA} = F_{yB} = 60 \text{ kN}$, $F_{xA} = 0$ 。

(2) 取隔离体如图 2-51(b) 所示, 对 C 点建立力矩方程

$$\sum M_C = 0, 60 \times 6 - \frac{10 \times 6^2}{2} - F_{NDE} \times 1.2 = 0$$

得 $F_{NDE} = 150 \text{ kN}$ 。

建立水平投影方程

$$\sum F_x = 0, F_{xC} + F_{NDE} = 0$$

得 $F_{xC} = -150 \text{ kN}$ 。

取 D 点为隔离体, 由投影平衡方程得到 $F_{xDA} = 150 \text{ kN}$, $F_{NDF} = -60 \text{ kN}$ 。再由式(2-4), 得

$$F_{NDA} = \frac{\sqrt{3^2 + 1.2^2}}{3} \times 150 = 161.55 (\text{kN})$$

由对称性可知 $F_{NEB} = F_{NDA} = 161.55 \text{ kN}$, $F_{NEG} = F_{NDF} = -60 \text{ kN}$ 。

(3) 绘制结构的弯矩图、轴力图 and 剪力图, 如图 2-51(c)、(d)、(e) 所示。

(4) 如将链杆 FD 、 GE 移动到如图 2-51(f) 所示的位置, 弯矩图即变为如图 2-51(g) 所示。这样, 梁式杆的弯矩分布便比较均匀。

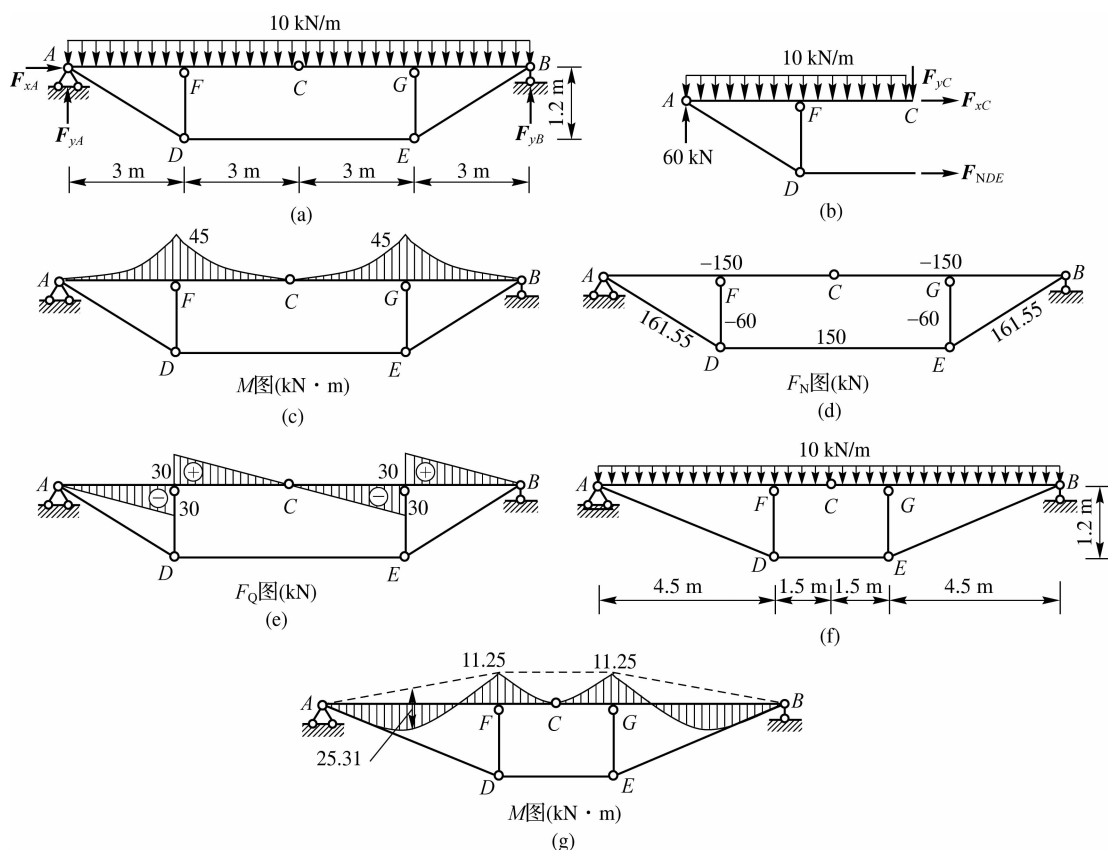


图 2-51 【例 2-24】图

2.7 三铰拱的受力分析

2.7.1 三铰拱的特点与类型

梁和刚架承受荷载后, 主要产生弯矩, 截面上的应力分布是不均匀的, 中性轴附近的应力很小, 离中性轴越远应力越大, 因而材料不能得到充分的利用。结构自重较大, 不能跨越大跨度。三铰拱和静定平面桁架克服了梁和刚架的这一缺点。在竖向荷载作用下, 拱的截面弯矩比梁的截面弯矩要小得多, 桁架在结点荷载作用下各杆内力主要是轴力。所以, 拱和桁架截面上的应力分布比较均匀, 可以充分发挥材料的作用, 有用料省、自重轻, 能跨越大空间

的优点。因此,拱和桁架是大跨度结构常用的结构形式。

拱结构是工程中应用较广泛的结构形式之一。我国远在古代就在桥梁和房屋建筑中采用了拱式结构,如河北赵州桥。在近代土木工程中,拱也是桥梁、隧道及屋盖中的重要结构形式。图 2-52(a)为一三铰拱桥结构,其计算简图如图 2-52(b)所示。拱的两端支座处称为拱趾,两拱趾间的水平距离称为拱的跨度 l ,两拱趾连线称为起拱线,拱轴线上距起拱线最远处称为拱顶,拱顶至起拱线的垂直距离称为拱高 f 。高跨比 f/l 是控制拱内力的重要数据。

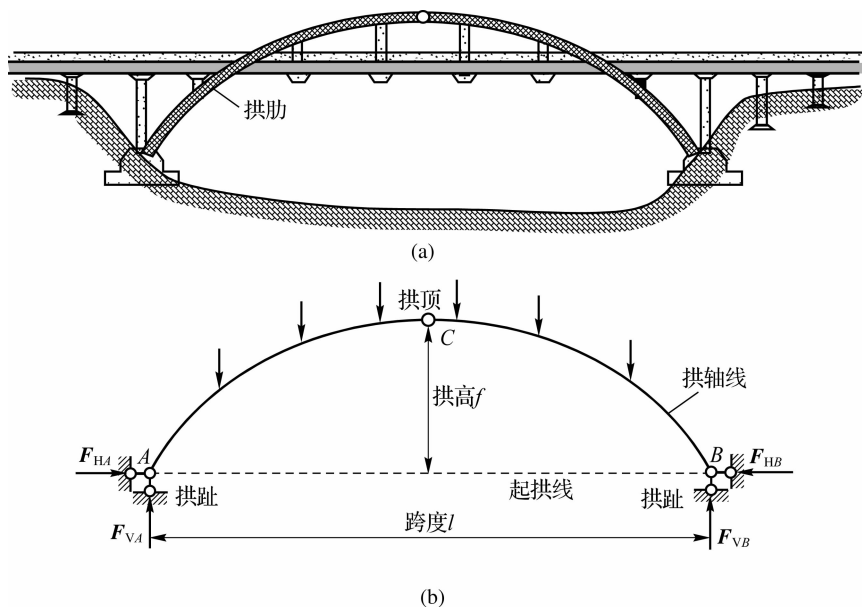


图 2-52 三铰拱桥结构及其计算简图

三铰拱[见图 2-53(a)]区别于曲梁[图 2-53(b)]和水平直梁[图 2-53(c)]的主要特点是:在竖向荷载作用下不仅产生竖向反力,而且产生水平支座反力(水平推力)。由于这一对水平推力能产生负弯矩(上侧受拉),抵消一部分正弯矩,使得三铰拱内的弯矩远小于与三铰拱等跨度同荷载作用下的简支梁内的弯矩,因此,拱与梁相比用料省、自重轻,能跨越较大的跨度。此外,由于拱主要承受轴向压力,因此可以充分利用抗拉性能弱而抗压性能强的材料,如砖、石、混凝土等。但是,由于水平推力的存在,拱需要有较为坚固的基础或支承结构。同时,拱的构造比较复杂,施工费用高。

为了消除水平推力对支承结构的影响,可去掉一根水平支杆,加一根水平拉杆[见图 2-53(d)],拉杆内所产生的拉力代替了支座的推力。这种结构的内部受力情况与三铰拱并无区别,故称为带拉杆的三铰拱。有时为了获得较大的净空而将拉杆提高作成如图 2-53(e)所示的折线形式。

处于同一水平线上的两个拱趾,称为等高拱或平拱,如图 2-53(a)、(d)所示;不在同一水平线上的两个拱趾,称为斜拱,如图 2-53(f)所示。本书主要讨论平拱的计算,对于斜拱可作类似推导,留给读者练习。

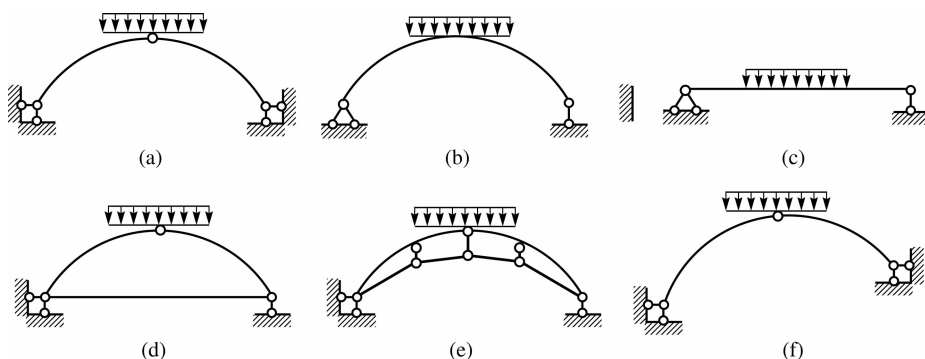


图 2-53 三铰拱与梁

下面讨论在竖向荷载作用下三铰拱的支座反力和内力的计算方法,并将拱与相应简支梁(称为代梁)加以比较,以便于计算及分析拱的受力性质。

2.7.2 支座反力的计算

如图 2-54(a)所示的三铰拱有四个支座反力 F_{HA} 、 F_{VA} 、 F_{HB} 、 F_{VB} ,由整体平衡方程 $\sum F_x = 0$,得 $F_{HA} = F_{HB} = F_H$, A 、 B 两点的水平反力(推力)等值反向,以 F_H 表示这对推力。

取整体,由平衡条件 $\sum M_A = 0$, $M_{ABP} - F_{VB}l = 0$,得

$$F_{VB} = \frac{M_{ABP}}{l}$$

式中, M_{ABP} 为 AB 段荷载对 A 点的力矩(顺时针为正)。

由于拱上的荷载和梁上的荷载相同,所以对于平拱, F_{VB} 与图 2-54(b)所示代梁的竖向反力相同,即 $F_{VB} = F_{VB}^0$ 。本节凡带 0 上标的项均为代梁对应的值。

再由 $\sum M_B = 0$ 同理可得 $F_{VA} = F_{VA}^0$ 。

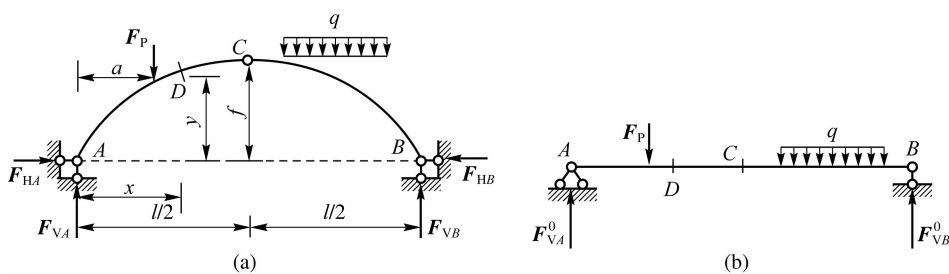


图 2-54 支座反力的计算

取拱的 AC 段为隔离体,由平衡条件 $\sum M_C = 0$, $M_{CAP} + F_H f - F_{VA}l/2 = 0$,得

$$F_H = \frac{F_{VA}l/2 - M_{CAP}}{f}$$

式中, M_{CAP} 为 CA 段荷载对 C 点的力矩(逆时针为正)。

设 $F_{VA}l/2 - M_{CAP} = M_C^0$, 则

$$F_H = M_C^0 / f$$

式中, M_C^0 为外荷载作用下简支梁 C 截面上的弯矩。

这样, 在竖向荷载作用下, 三铰拱支座反力的计算公式为

$$F_{VA} = F_{VA}^0, F_{VB} = F_{VB}^0, F_H = M_C^0 / f \quad (2-5)$$

由此可见, 在竖向荷载作用下, 三铰拱的支座反力与拱轴线的形状无关, 而与三个铰的位置有关。当跨度和荷载不变时, 竖向支座反力不变 (与拱高无关); 水平推力与拱高成反比, 拱越扁平, 水平推力越大。当 $f \rightarrow 0$ 时, $F_H \rightarrow \infty$, 这时 A 、 B 、 C 三铰共线, 体系几何瞬变。

2.7.3 三铰拱的内力计算

三铰拱 [见图 2-55(a)] 的任意截面 D 有三个内力 M 、 F_Q 和 F_N [见图 2-55(b)], 剪力和轴力的正负规定与梁中的规定一致, 弯矩设为下侧受拉为正。为便于比较和计算三铰拱的内力 M 、 F_Q 和 F_N , 常用相应简支梁对应截面内力 M^0 和 F_Q^0 [见图 2-55(c)] 来表示。为此, 三铰拱任意截面 D 的内力分量采用如图 2-55(d) 所示的弯矩 M 、水平内力分量 F_H 和竖向内力分量 F_Q^0 来表示。图 2-55(b)、(d) 是同一隔离体的两种内力表示法, 两者是静力等效的。

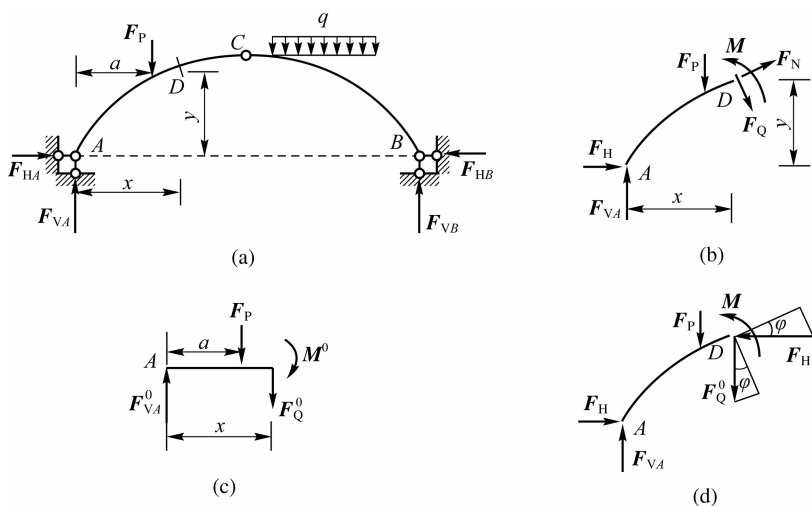


图 2-55 三铰拱的内力计算

将水平内力分量 F_H 和竖向内力分量 F_Q^0 沿 D 截面的法线方向和切线方向进行分解, 即可求得剪力 F_Q 和轴力 F_N , 即

$$F_Q = F_Q^0 \cos \varphi - F_H \sin \varphi$$

$$F_N = -F_Q^0 \sin \varphi - F_H \cos \varphi$$

式中, φ 为 D 截面处轴线切线与水平轴之间的夹角。拱的左半跨, φ 取正; 拱的右半跨, φ 取负。

对图 2-55(b) 或图 2-55(d), 利用力矩平衡条件 $\sum M_D = 0$, 有

$$M - F_{VA}x + F_P(x-a) + F_H y = 0$$

得

$$M = F_{VA}x - F_P(x-a) - F_H y$$

而 $F_{VA}^0 - F_P(x-a) = M^0$, 故 $M = M^0 - F_H y$ 。

这样, 在竖向荷载作用下, 三铰平拱的内力计算公式为

$$\left. \begin{aligned} M &= M^0 - F_H y \\ F_Q &= F_Q^0 \cos \varphi - F_H \sin \varphi \\ F_N &= -F_Q^0 \sin \varphi - F_H \cos \varphi \end{aligned} \right\} \quad (2-6)$$

【例 2-25】 三铰拱及其所受荷载如图 2-56(a) 所示, 在图示坐标系中, 拱轴线方程为抛物线 $y = \frac{4f}{l^2} x(l-x)$ 。试求支座反力, 并绘制内力图。

【解】 (1) 构造相应的代梁[见图 2-56(b)], 并计算代梁。

代梁的支座反力为

$$F_{VA}^0 = \frac{4 \times 8 \times 12 + 16 \times 4}{16} = 28 (\text{kN})$$

$$F_{VB}^0 = \frac{4 \times 8 \times 4 + 16 \times 12}{16} = 20 (\text{kN})$$

代梁的弯矩图和剪力图如图 2-56(c)、(d) 所示。

(2) 求拱的支座反力。

$$F_{VA} = F_{VA}^0 = 28 \text{ kN}, F_{VB} = F_{VB}^0 = 20 \text{ kN}, F_H = \frac{M_C^0}{f} = \frac{96}{4} = 24 \text{ kN}$$

(3) 为了便于绘制拱的内力图, 可将拱轴沿水平方向分成若干等份(如本例分成 8 等份), 求出各分点截面的内力后, 便可描点作内力图。现已 $x = 12 \text{ m}$ 的 E 截面为例, 说明内力的计算方法。

① 计算几何参数。将 $x_E = 12 \text{ m}$ 代入拱轴线方程, 得

$$y_E = \frac{4f}{l^2} x(l-x) = \frac{4 \times 4}{16^2} \times 12 \times (16-12) = 3 (\text{m})$$

$$\tan \varphi_E = \frac{dy}{dx} = \frac{4f}{l^2} (l-2x) \Big|_{x=12} = \frac{4 \times 4}{16^2} \times (16-2 \times 12) = -0.5$$

$$\varphi_E = \arctan(-0.5) = -26.5^\circ, \sin \varphi_E = -0.447, \cos \varphi_E = 0.894$$

② 确定简支梁对应截面的内力。

$$M_E^0 = 80 \text{ kN} \cdot \text{m}, F_{QE左}^0 = -4 \text{ kN}, F_{QE右}^0 = -20 \text{ kN}$$

③ 求拱截面内力。

$$M_E = M_E^0 - F_H y_E = 80 - 24 \times 3 = 8 (\text{kN} \cdot \text{m})$$

$$F_{QE左} = F_{QE左}^0 \cos \varphi_E - F_H \sin \varphi_E = -4 \times 0.894 - 24 \times (-0.447) = 7.16 (\text{kN})$$

$$F_{NE左} = -F_{QE左}^0 \sin \varphi_E - F_H \cos \varphi_E = -4 \times (-0.447) - 24 \times 0.894 = -23.24 (\text{kN})$$

$$F_{QE右} = F_{QE右}^0 \cos \varphi_E - F_H \sin \varphi_E = -20 \times 0.894 - 24 \times (-0.447) = -7.16 (\text{kN})$$

$$F_{NE右} = -F_{QE右}^0 \sin \varphi_E - F_H \cos \varphi_E = 20 \times (-0.447) - 24 \times 0.894 = -30.40 (\text{kN})$$

用同样的方法和步骤, 可求得其他截面的内力。为清楚起见, 具体计算可列表进行, 如表 2-2 所示。

表 2-2 三铰拱的内力计算

截面几何参数						弯矩/(kN·m)			F_Q^0	剪力/kN			轴力/kN		
x/m	y/m	$\tan \varphi$	φ	$\sin \varphi$	$\cos \varphi$	M^0	$-F_{Hy}$	M	/kN	$F_Q^0 \cos \varphi$	$-F_H \sin \varphi$	F_Q	$-F_Q^0 \sin \varphi$	$-F_H \cos \varphi$	F_N
0	0	1	45°	0.707	0.707	0	0	0	28	19.80	-16.96	2.84	-19.80	-16.96	-36.76
2	1.75	0.75	36.87°	0.600	0.800	48	-42	6.0	20	16.00	-14.40	1.60	-12.00	-19.20	-31.20
4	3.00	0.50	26.57°	0.447	0.894	80	-72	8.0	12	10.72	-10.72	0	-5.36	-21.44	-26.80
6	3.75	0.25	14.03°	0.243	0.970	96	-90	6.0	4	3.88	-5.84	-1.96	-0.96	-23.28	-24.24
8	4.00	0	0°	0	1	96	-96	0	-4	-4.00	-0	-4.00	0	-24.00	-24.00
10	3.75	-0.25	-14.03°	-0.243	0.970	88	-90	-2.0	-4	-3.88	5.84	1.96	-0.96	-23.28	-24.24
12	3.00	-0.50	-26.57°	-0.447	0.894	80	-72	8.0	-4	-3.56	10.72	7.16	-1.80	-21.44	-23.24
									-20	-17.88		-7.16	-8.96		-30.40
14	1.75	-0.75	-36.87°	-0.600	0.800	40	-42	-2.0	-20	-16.00	14.40	-1.60	-12.00	-19.20	-31.20
16	0	-1	-45°	-0.707	0.707	0	0	0	-20	-14.16	16.96	2.80	-14.16	-16.96	-31.12

(4)根据表 2-2 中的数值,可绘出内力图。绘制内力图时,可将内力图直接画在拱轴上,也可将内力纵标值垂直于拱的水平基线量出,按后一种方法作出的弯矩图、剪力图和轴力图如图 2-56(e)、(f)、(g)所示。

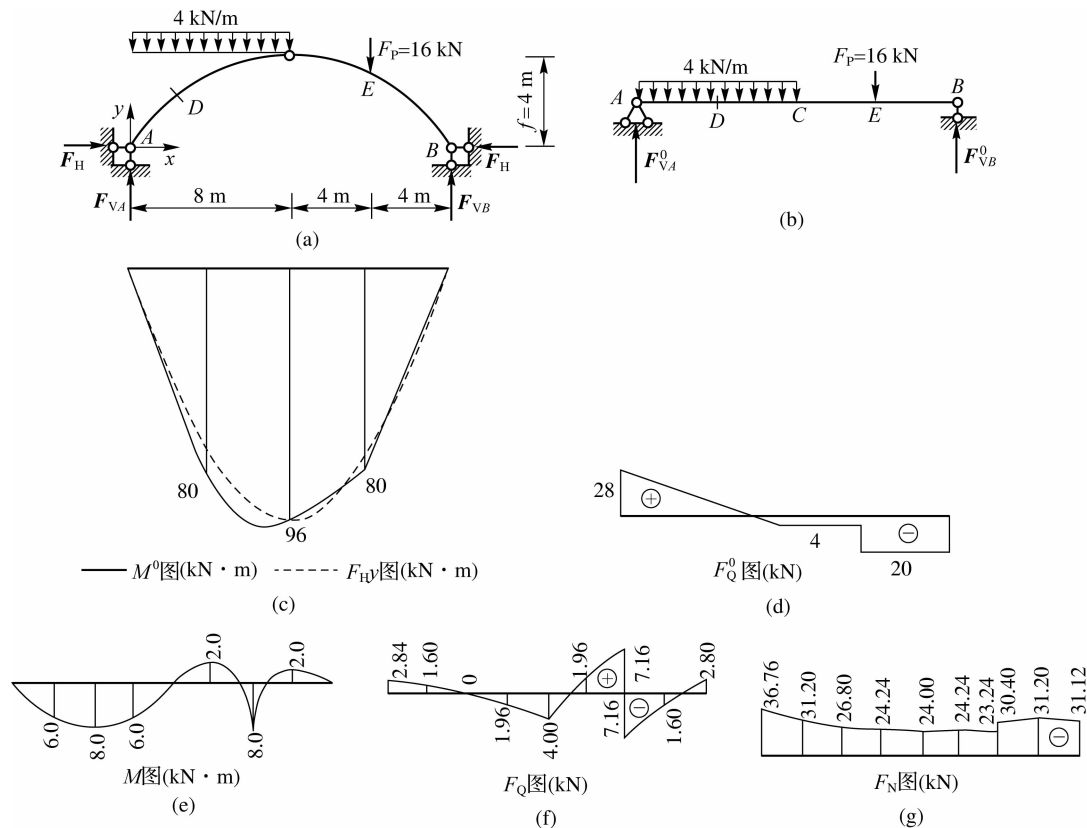


图 2-56 【例 2-25】图

(5)为了将拱与梁进行比较,在图 2-56(c)中用实线画出了代梁的弯矩图(M^0 图),用虚线画出了 F_{Hy} 曲线。虚实两条曲线的纵坐标差值($M^0 - F_{Hy}$)即三铰拱的弯矩值,因此两条曲线之间所围的狭窄图形即代表三铰拱的弯矩图。由此可以看出,三铰拱与相应的简支梁相比,其弯矩要小得多。还可以看出,三铰拱弯矩的下降完全是因为存在推力。因此,在竖向荷载作用下产生水平推力,是拱式结构的基本特点。

2.7.4 三铰拱的合理拱轴线

在荷载作用下,拱的各截面一般会产生三个内力分量,即弯矩、剪力和轴力。若要使所有截面上的弯矩为零(剪力也为零),则截面上只能有轴向压力。此时,各截面都处于均匀受压的状态,因而材料能得到充分的利用,相应的拱截面尺寸也是最小的。我们把某种荷载作用下使拱所有截面上弯矩为零时的拱轴线,称为合理拱轴线。合理拱轴线随荷载的变化而变化。在荷载给定的前提下,从理论上可求出对应的合理拱轴线。

1. 三铰拱合理拱轴线的一般表达式

由式(2-6)令拱内任意截面上的弯矩等于零,得

$$\left. \begin{aligned} M &= M^0 - F_H y = 0 \\ y &= \frac{M^0}{F_H} = f \frac{M^0}{M_C^0} \end{aligned} \right\} \quad (2-7)$$

式(2-7)为竖向荷载作用下三铰拱合理拱轴线的一般表达式。该式表明:

- (1) 在竖向荷载作用下,三铰拱的合理拱轴线与相应简支梁的弯矩图对应竖标成比例。
- (2) 合理拱轴线与荷载有关,如果荷载的形式或作用位置发生改变,则合理拱轴线随之改变。但是当荷载的大小改变时, M^0/M_C^0 不变,合理拱轴线也不变。
- (3) 当跨度、荷载不变时, M^0/M_C^0 不变,合理拱轴线随着拱高 f 的不同而不同,不过函数形式不变,所以对应已知荷载的合理拱轴线不是唯一的,而是一束。
- (4) 如果在某竖向荷载作用下,拱具有合理拱轴线,则拱内 $M=0$, $F_Q=0$, $F_N=-F_H/\cos \varphi$ 。

2. 满跨竖向均布荷载作用下三铰拱的合理拱轴线

例如,在图 2-57(a)所示的三铰拱上作用竖向均布荷载 q ,跨度为 l ,拱高为 f ,在图示坐标系中确定其合理拱轴线方程。

由式(2-7)可知,确定合理拱轴线的关键是确定对应荷载作用下代梁的弯矩函数。对于图 2-57(b),由平衡条件可得

$$M^0(x) = \frac{1}{2}qx(l-x), \quad M_C^0 = \frac{1}{8}ql^2$$

由式(2-5)可知水平推力为

$$F_H = \frac{M_C^0}{f} = \frac{ql^2}{8f}$$

代入式(2-7)得合理拱轴线为

$$y = \frac{4f}{l^2}x(l-x) \quad (2-8)$$

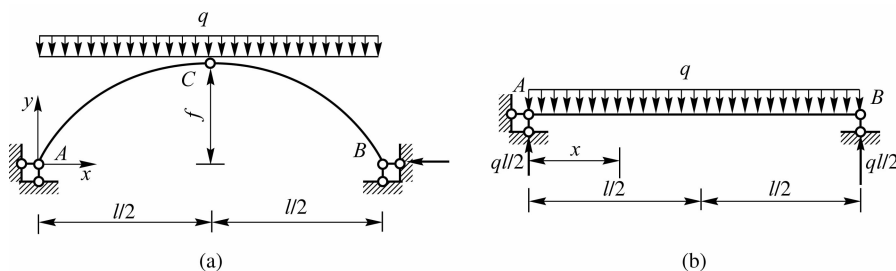


图 2-57 合理拱轴线的确定

式(2-8)表明:

- (1) 在满跨竖向均布荷载作用下,三铰拱的合理拱轴线是二次抛物线。
- (2) 在合理拱轴线方程中不含有荷载集度 q ,这说明合理拱轴线与荷载的大小无关。
- (3) 在合理拱轴线方程中,拱高 f 没有确定,这说明具有不同高跨比的一组抛物线都是

合理拱轴线。

2.8 静定结构的特性

静定结构和超静定结构都是几何不变体系,都可作为建筑结构使用,两者之间的差别为:在几何构成方面,静定结构是无多余约束的几何不变体系,超静定结构是有多余约束的几何不变体系。在静力平衡方面,静定结构仅由平衡条件就可求出其全部内力和反力;超静定结构仅由平衡条件求不出其全部内力和反力,还需要同时考虑变形条件。

所以,静定结构的基本静力特性为静定结构满足平衡条件的内力解答是唯一的。

下面讨论静定结构由基本静力特性派生出来的一般特性。

1. 非荷载因素不产生反力和内力

在非荷载因素(如温度改变、支座移动、制造误差和材料收缩)作用下,静定结构只产生位移,不产生反力和内力。对静定结构而言,无荷载就无内力。

例如,在图 2-58(a)中,静定刚架由于支座 B 的移动只会引起刚体位移(如虚线所示),而在刚架内不会引起内力和反力。在图 2-58(b)中,设三铰拱的拱肋因施工误差稍有缩短,拼装后结构形状略有改变(如虚线所示),但三铰拱不会引起内力和反力。在图 2-58(c)中,设悬臂梁上、下侧温度发生了改变,因为静定梁可以自由地产生变形(如虚线所示),所以梁内不会产生内力。这几种情况都可由静力平衡方程验证反力和内力均为零。

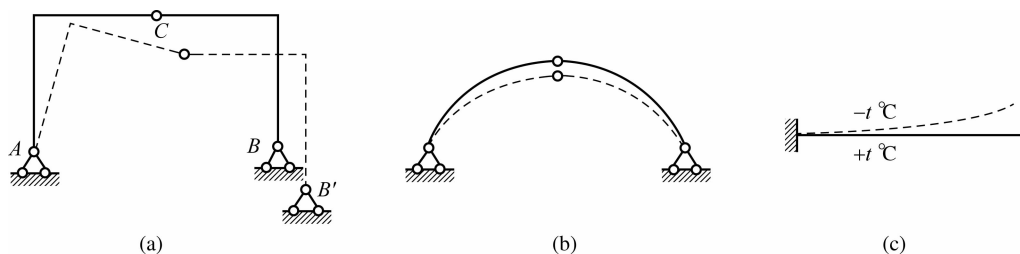


图 2-58 非荷载因素

2. 局部平衡特性

如果在静定结构中的某一几何不变部分上作用一个平衡力系,则该平衡力系仅在该几何不变部分上产生内力,其余部分的内力均为零。这种内力状态能够满足结构整体和各局部的平衡条件,因此,其是静定结构唯一正确的内力解答。

值得注意的是,局部平衡部分不一定是几何不变的,也可以是几何可变的,只要在平衡力系作用下能维持平衡即可。

读者可由平衡条件证明图 2-59 所示结构在平衡力系作用下,仅有粗实线部分的杆件受力,其余部分不受力。

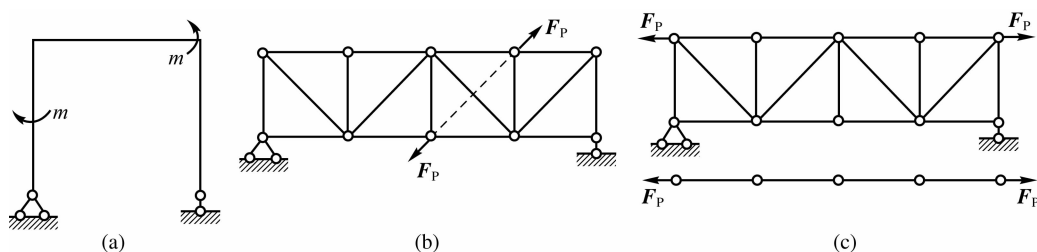


图 2-59 局部平衡特性

3. 荷载等效特性

当对静定结构的一个几何不变部分上的荷载做等效变换时,其余部分上的反力和内力不变。这里,等效荷载是指荷载分布虽不同,但其合力彼此相等的荷载。

图 2-60(a)中 AB 杆的荷载 F_P 与图 2-60(b)中结点 A 、 B 上的两个荷载 $F_P/2$ 是等效荷载,将图 2-60(a)改为图 2-60(b)时,只有 AB 杆的内力发生改变,其余各杆的内力不变。

静定结构的荷载等效特性可由局部平衡特性来说明。在图 2-60(a)、(b)两种情况下, AB 杆上的荷载互为等效;在图 2-60(c)中, AB 杆受一平衡力系的作用。由局部平衡特性知,图 2-60(c)中除 AB 杆外其余杆的内力均为零。设图 2-60(a)中除 AB 杆外的内力分布为 S_1 ,图 2-60(b)中除 AB 杆外的内力分布为 S_2 。将图 2-60(b)、(c)两种情况叠加后,除 AB 杆外的内力分布仍为 S_2 ,而图 2-60(b)、(c)两种情况叠加后即如图 2-60(a),除 AB 杆外的内力分布应为 S_1 ,故有 $S_1 = S_2$,即将 AB 杆上的荷载做等效变换后,除 AB 杆外的内力分布不变。

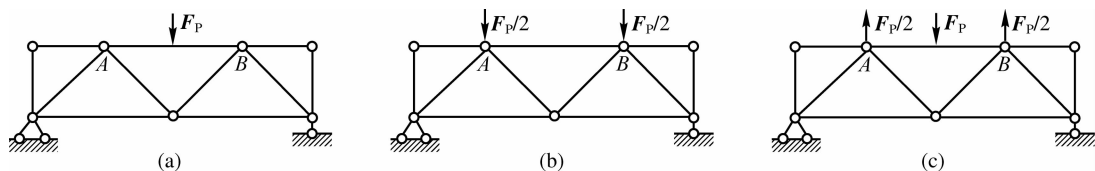


图 2-60 荷载等效特性

4. 局部变换特性

对静定结构的一个内部几何不变部分做构造变换时,其余部分的内力保持不变。构造变换指的是局部几何构成的改变,但不改变该部分与其他部分的约束位置和约束性质。

若将如图 2-61(a)所示结构中的 AC 折杆变成一个小桁架[见图 2-61(b)],则只是 AC 部分的内力有改变,其余部分的内力不变。为了说明这一点,分别取图 2-61(a)、(b)为隔离体,建立 $\sum M_A = 0$,求出 F_{yBa} 、 F_{yBc} 。由于两者的荷载及荷载作用位置相同,所以必有 $F_{yBa} = F_{yBc}$ 。同样的道理,由隔离体[见图 2-61(c)、(d)]可以得到, $F_{xBa} = F_{xBc}$, $F_{xCa} = F_{xCc}$, $F_{yCa} = F_{yCc}$,所以图 2-61(a)、(b)在 BC 部分的内力相同。

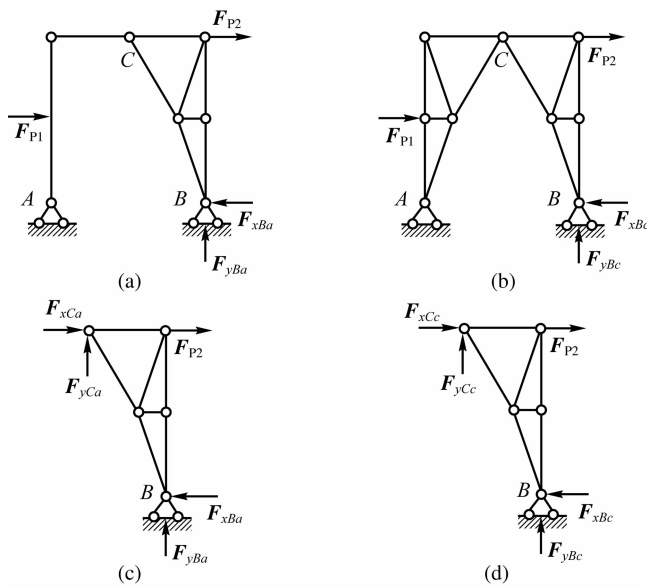


图 2-61 局部变换特性

思考与练习

1. 简答题

- (1) 静定结构满足平衡条件的内力解答有多少种？
- (2) 图 2-62 所示梁中 AB、CD 段的弯矩图能用叠加法绘制吗？如果可以，该如何绘制？

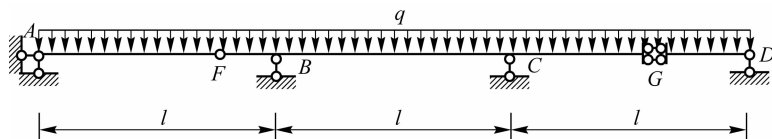


图 2-62 简答题(2)图

- (3) 分析图 2-63，根据梁的弯矩图和剪力图的形状可知梁上有什么样的荷载？

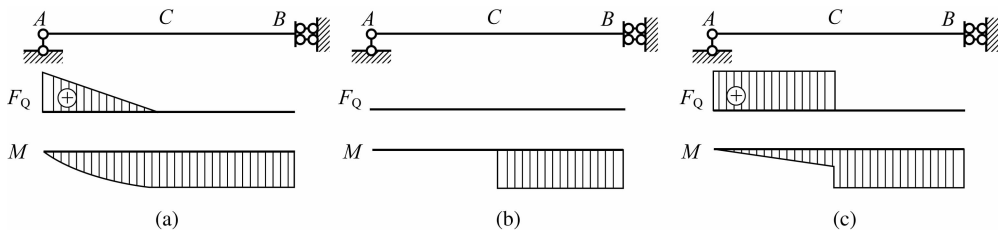


图 2-63 简答题(3)图

- (4) 多跨静定梁的几何组成特点和受力特点是什么？
- (5) 对于静定结构，当它的某一局部能平衡外力时，其他部分还受力吗？为什么？
- (6) 对于静定结构，改变材料的性质，或改变横截面的形状和尺寸，会不会改变其内力分布？会不

会改变其变形和位移？

(7)理想桁架的组成特点是什么？桁架中的杆件都有什么内力？

(8)在给定荷载作用下，桁架中有些杆件的轴力为零。这些杆件有什么作用？能不能将其去掉？

(9)在进行静定结构内力计算时，都在哪里用到了几何构成分析？几何构成分析给静定结构的内力计算带来了哪些方便？

(10)三铰拱的反力计算式能用来计算三铰刚架的反力吗？在什么情况下可以？

(11)只是荷载的值的大小改变，其他因素不变，三铰拱的合理拱轴线会改变吗？

(12)静定结构的一般特性都有哪些？

2. 计算题

(1)试用区段叠加法作如图 2-64 所示梁的弯矩图。

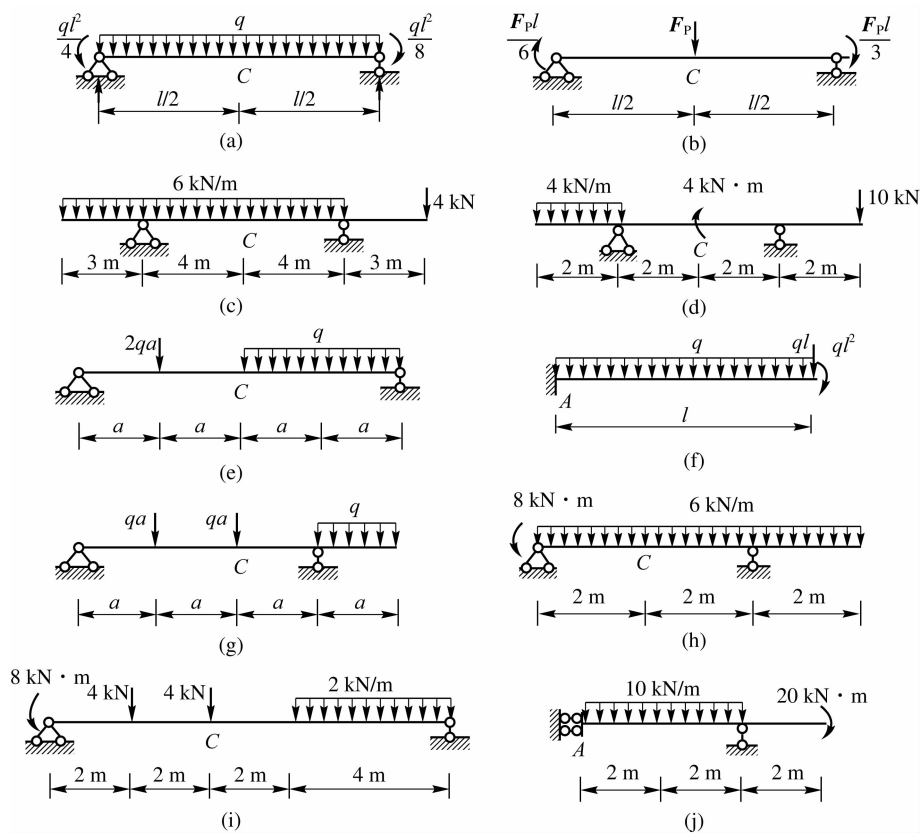


图 2-64 计算题(1)图

(2)判断如图 2-65 所示梁的内力图形状正确与否，并对错误的进行改正。

(3)求如图 2-66 所示多跨静定梁的支座反力，并作内力图。

(4)如图 2-67 所示，选择铰的位置 x ，使中间一跨的跨中弯矩与支座弯矩的绝对值相等。

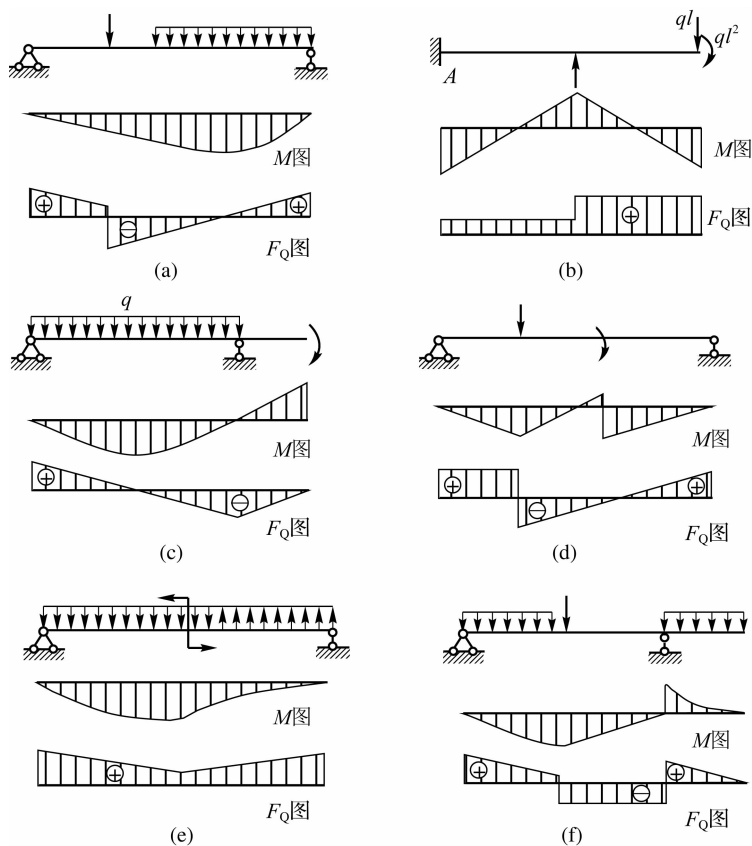


图 2-65 计算题(2)图

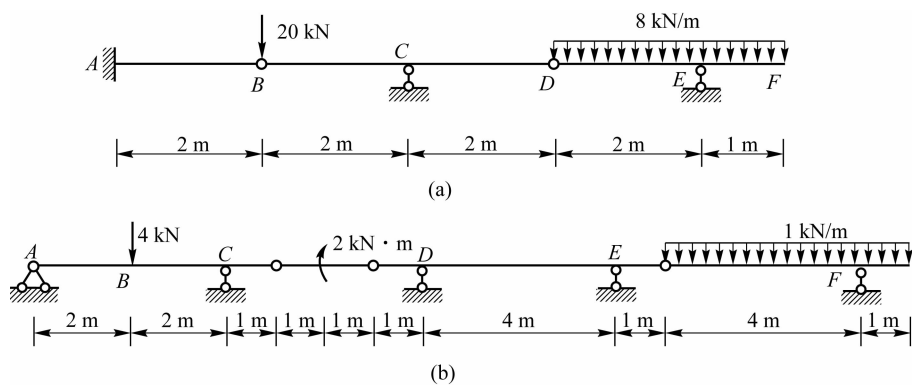


图 2-66 计算题(3)图

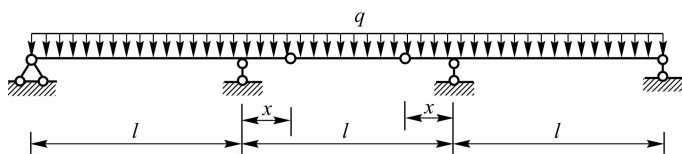


图 2-67 计算题(4)图

(5) 不求或少求支座反力, 作如图 2-68 所示多跨静定梁的弯矩图。

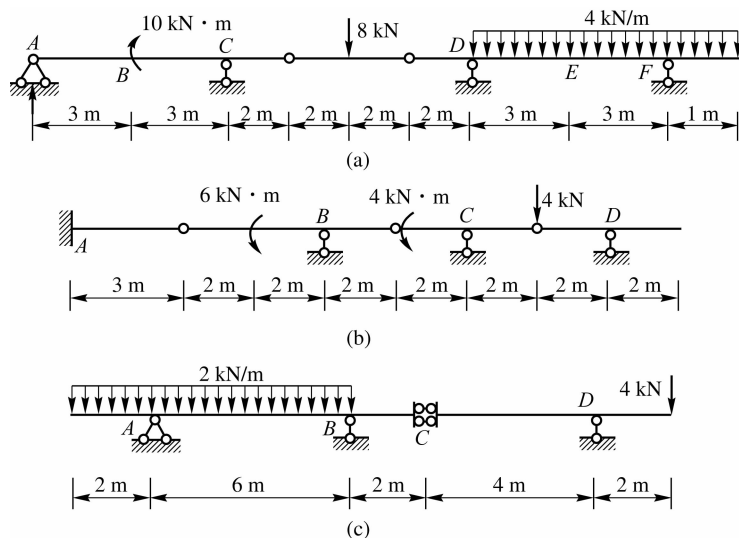


图 2-68 计算题(5)图

(6) 判断如图 2-69 所示刚架弯矩图的形状正确与否, 并对错误的进行改正。

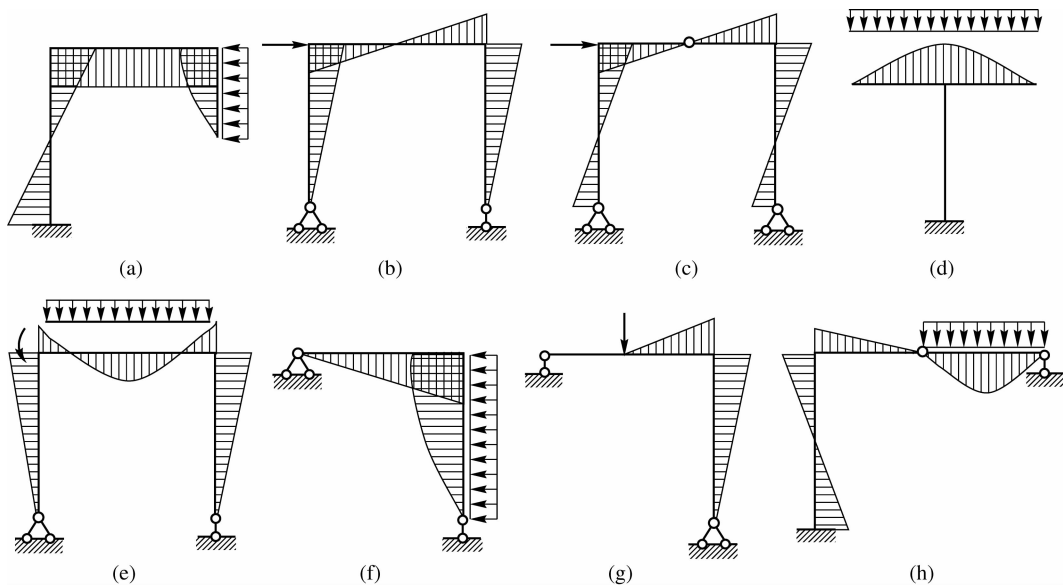


图 2-69 计算题(6)图

(7) 作如图 2-70 所示刚架的内力图。

(8) 作如图 2-71 所示刚架的内力图。

(9) 不求或少求支座反力, 绘制如图 2-72 所示刚架的弯矩图。

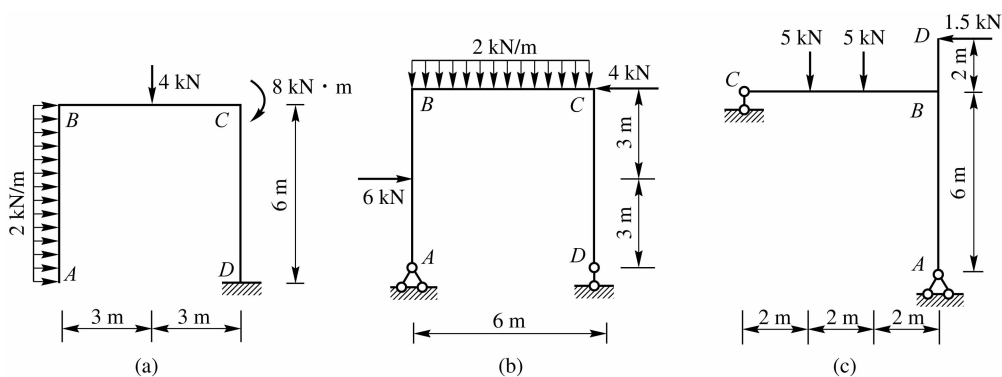


图 2-70 计算题(7)图

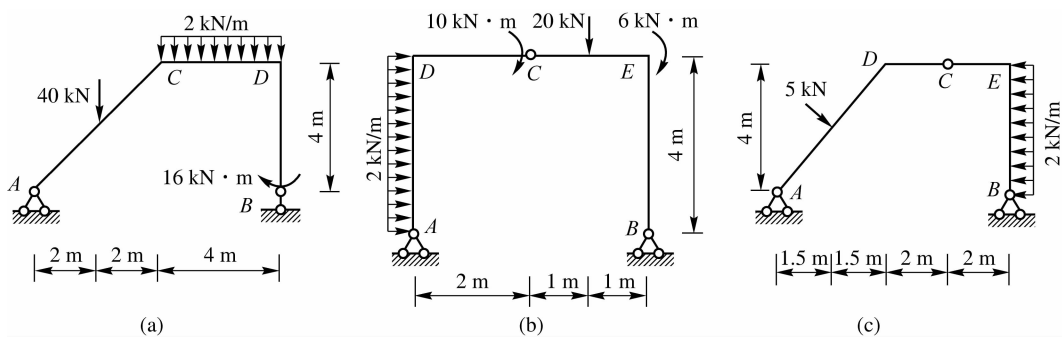
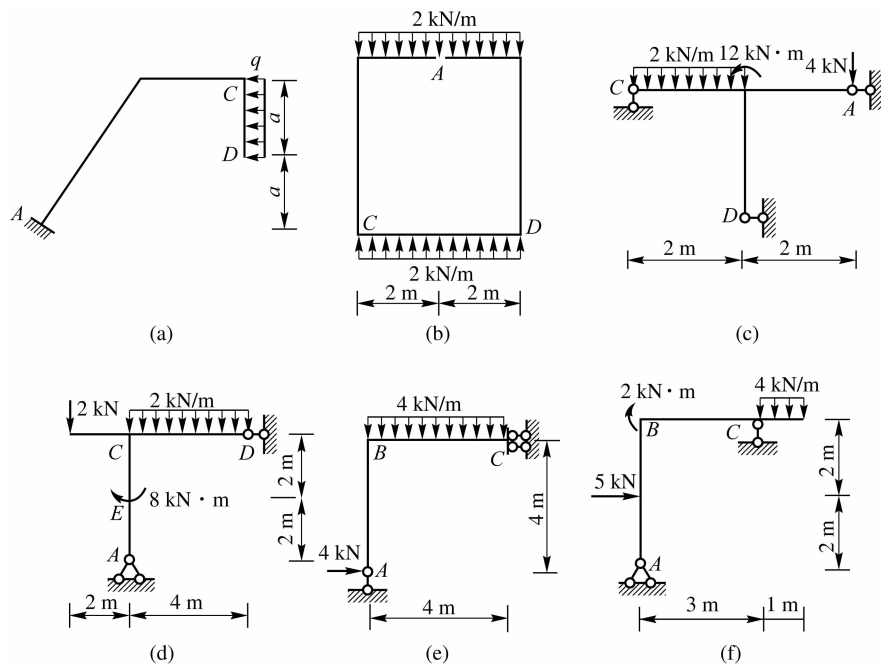


图 2-71 计算题(8)图



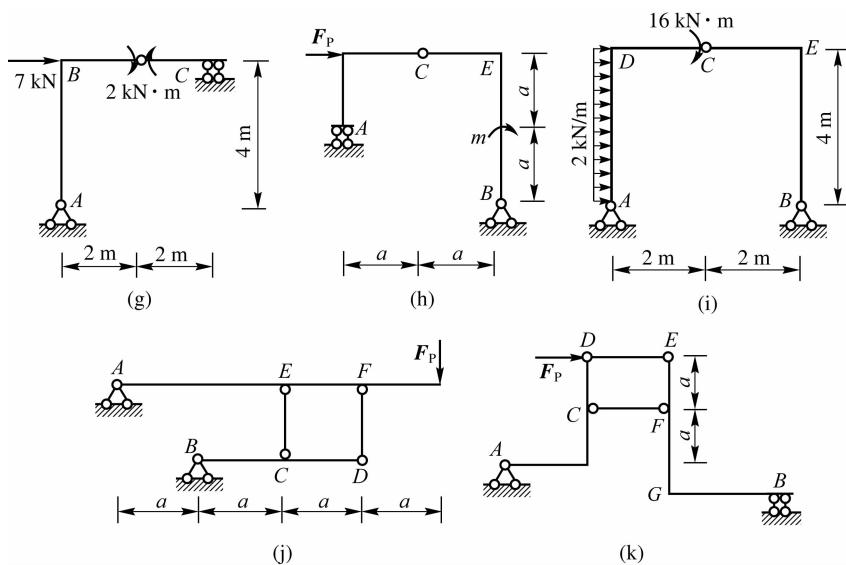
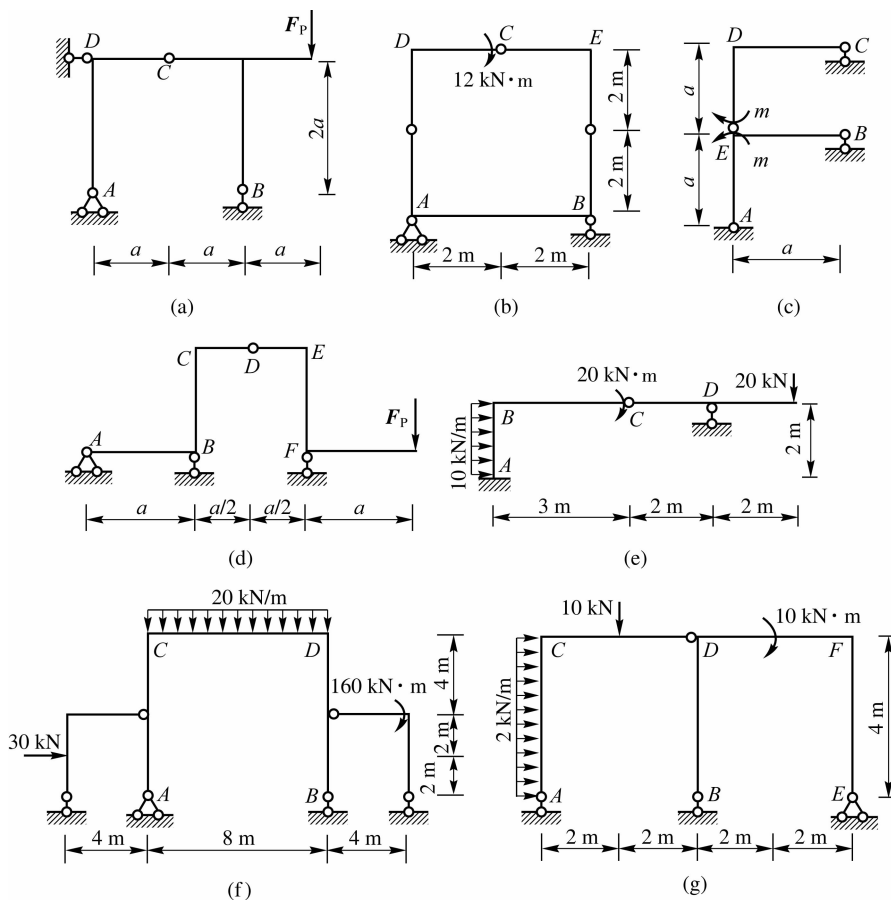


图 2-72 计算题(9)图

(10) 不求或少求支座反力, 绘制如图 2-73 所示刚架的弯矩图。



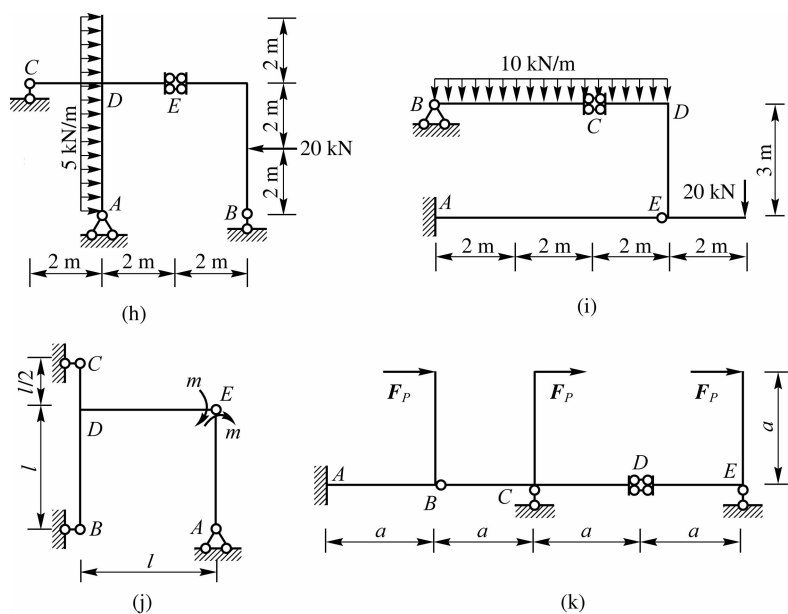
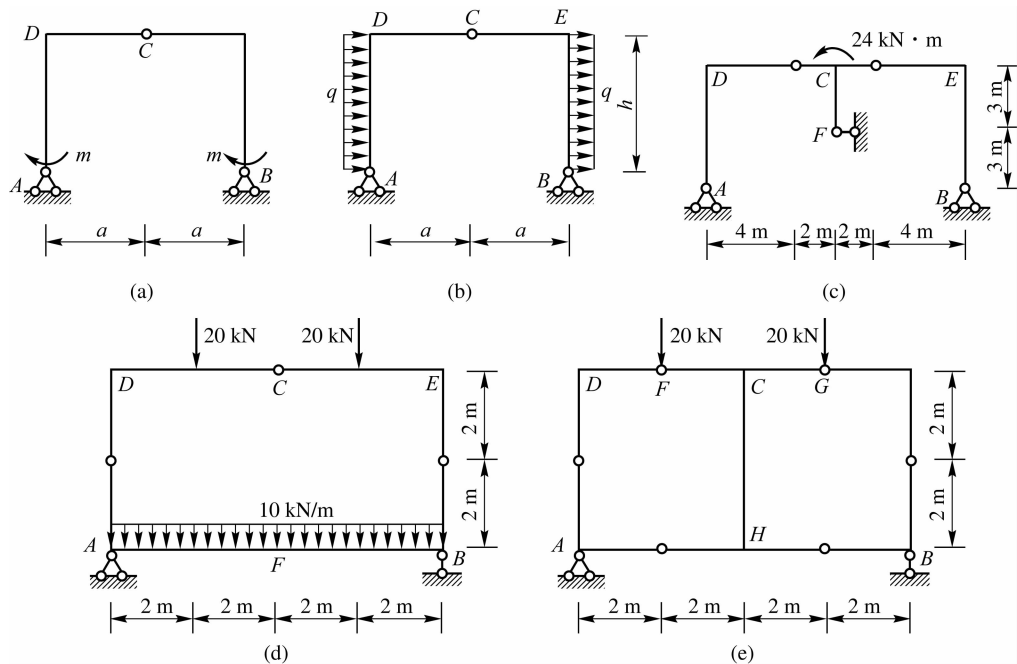


图 2-73 计算题(10)图

(11) 绘制如图 2-74 所示对称刚架的弯矩图。



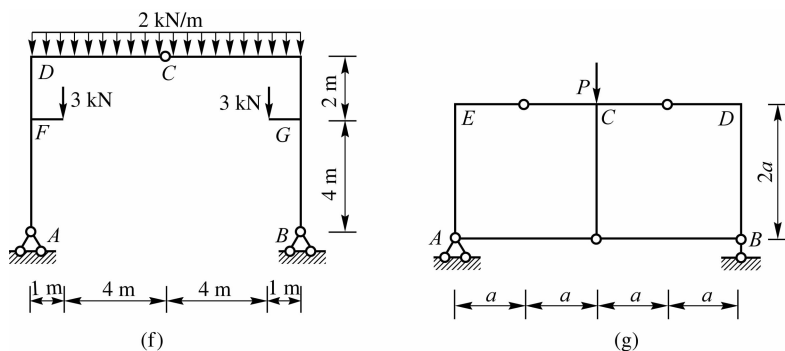


图 2-74 计算题(11)图

(12) 试求如图 2-75 所示抛物线三铰拱的支座反力, 并求截面 D 、 E 的内力。

(13) 试求如图 2-76 所示抛物线三铰拱中各链杆和截面 K 的内力。

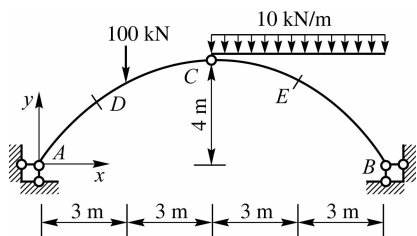


图 2-75 计算题(12)图

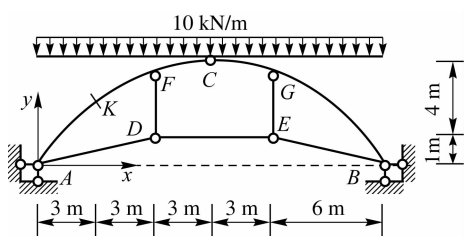


图 2-76 计算题(13)图

(14) 试求如图 2-77 所示半圆三铰拱的支座反力和截面 K 的内力。

(15) 试用三铰拱的反力和内力计算公式计算如图 2-78 所示的三铰刚架。

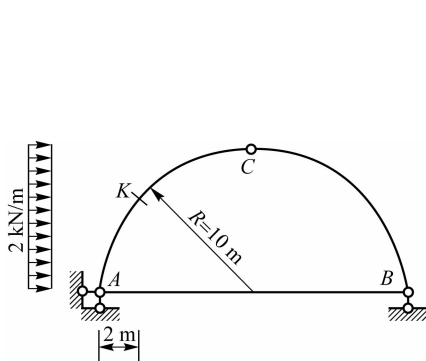


图 2-77 计算题(14)图

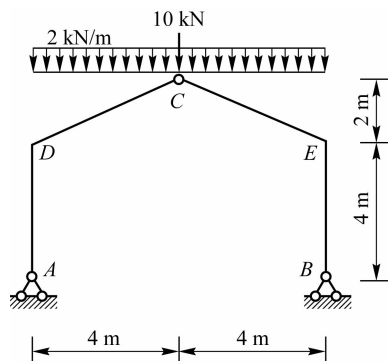
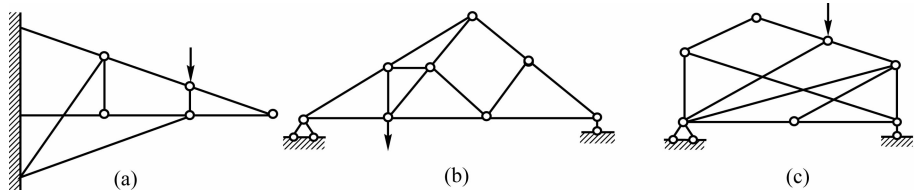


图 2-78 计算题(15)图

(16) 试指出图 2-79 所示桁架中的零杆。



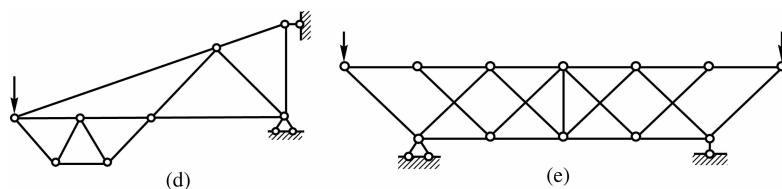


图 2-79 计算题(16)图

(17)用结点法求如图 2-80 所示桁架各杆的轴力。

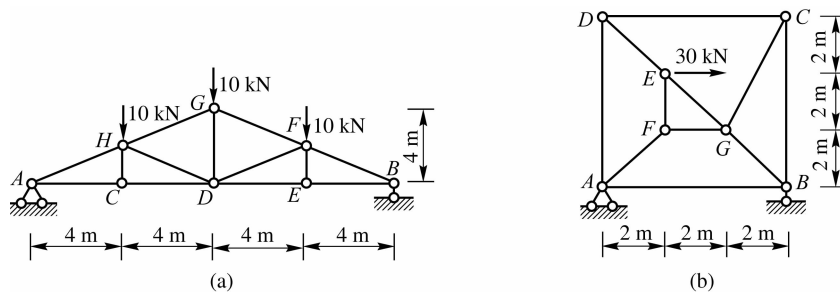


图 2-80 计算题(17)图

(18)求如图 2-81 所示桁架中指定杆的轴力。

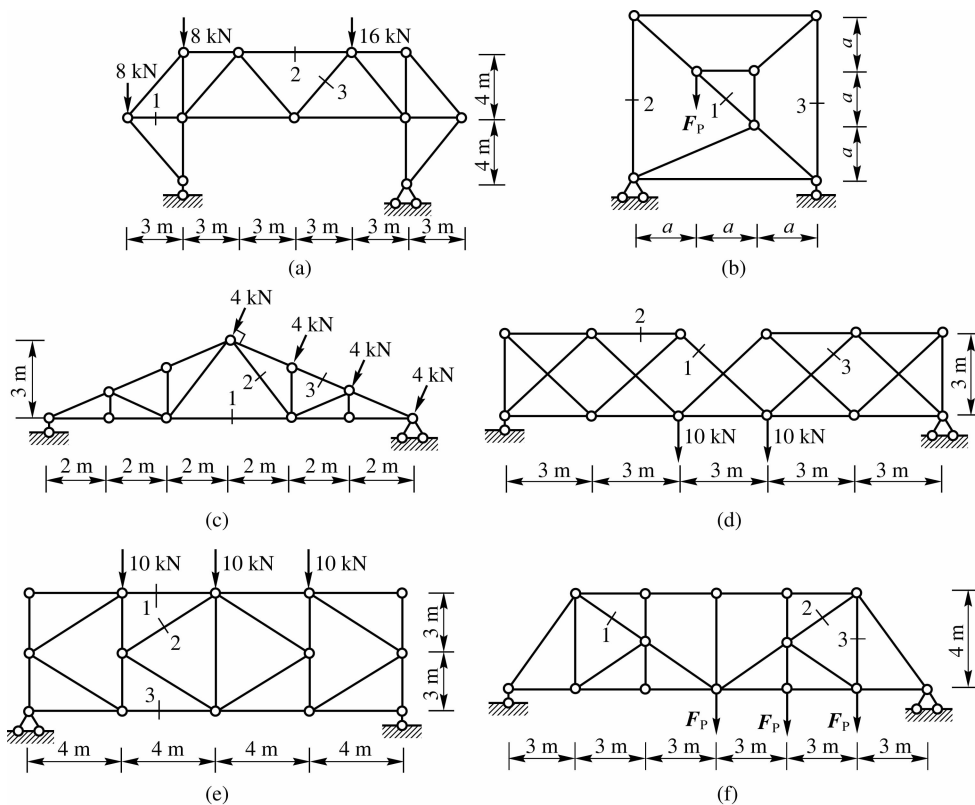


图 2-81 计算题(18)图

(19) 求如图 2-82 所示桁架中指定杆的轴力。

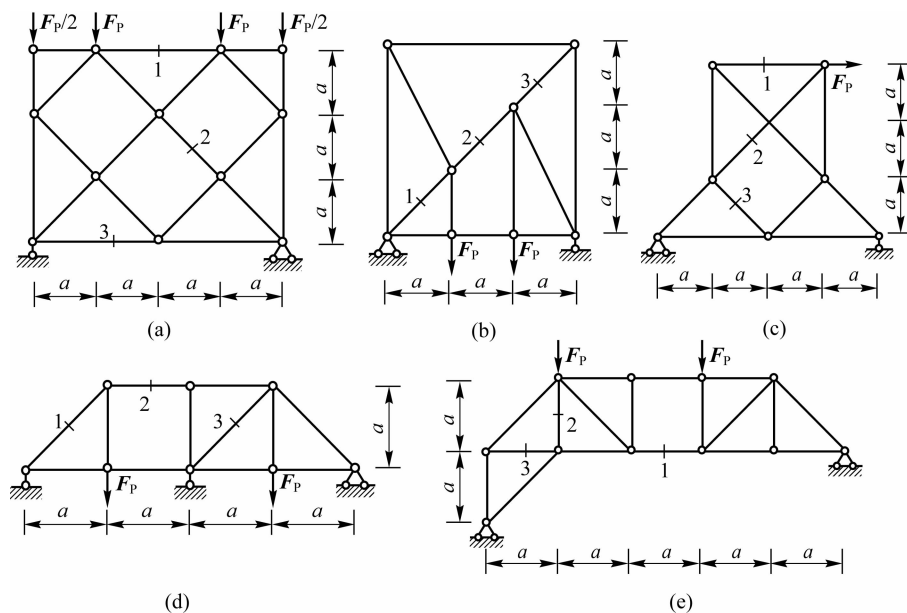


图 2-82 计算题(19)图

(20) 求如图 2-83 所示组合结构中链杆的轴力, 作弯杆的弯矩图。

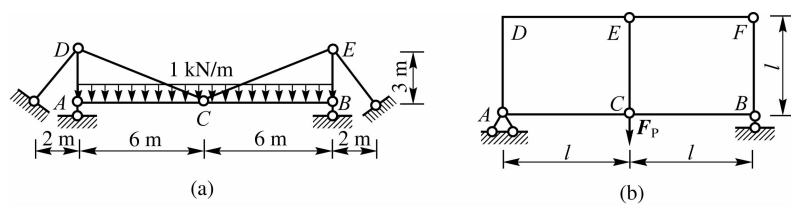


图 2-83 计算题(20)图