

数学考前冲刺试卷(一)

(总分:120分 时间:120分钟)

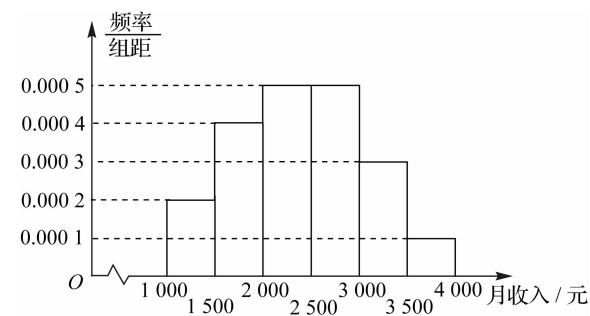
一、选择题(本大题共10小题,每小题4分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

- 集合 $M=\{a,c,d\}$, $N=\{b,e,f\}$, 则 $M \cap N$ 等于 ()
 - $\{a\}$
 - $\{a,b\}$
 - $\{b,c,e\}$
 - \emptyset
- 设 a, b 是实数, 则“ $a > b$ ”是“ $a^2 > b^2$ ”的 ()
 - 充分不必要条件
 - 必要不充分条件
 - 充要条件
 - 既不充分也不必要条件
- 不等式 $-x^2 - x + 2 \geq 0$ 的解集是 ()
 - $\{x | x \leq -2 \text{ 或 } x \geq 1\}$
 - $\{x | -2 < x < 1\}$
 - $\{x | -2 \leq x \leq 1\}$
 - \emptyset
- 过点 $P(-1, 3)$ 且垂直于直线 $x - 2y + 3 = 0$ 的直线方程为 ()
 - $2x + y - 1 = 0$
 - $2x + y - 5 = 0$
 - $x + 2y - 5 = 0$
 - $x - 2y + 7 = 0$
- 已知 $\sin \theta = \frac{1}{3}$, $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, 则 $\tan \theta =$ ()
 - 2
 - $-\sqrt{2}$
 - $-\frac{\sqrt{2}}{4}$
 - $-\frac{\sqrt{2}}{8}$
- $(x^2 + \frac{1}{2x})^6$ 展开式中的常数项等于 ()
 - $\frac{3}{8}$
 - $\frac{15}{16}$
 - $\frac{5}{2}$
 - $\frac{15}{32}$

- 函数 $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x-1)}$ 的定义域是 ()
 - $(1, +\infty)$
 - $(2, +\infty)$
 - $(-\infty, 2)$
 - $(1, 2]$
- 若 a, b 分别为函数 $y = \frac{1}{3} \sin x - 1$ 的最大值和最小值, 则 $a + b$ 等于 ()
 - $\frac{2}{3}$
 - $-\frac{2}{3}$
 - $-\frac{4}{3}$
 - 2
- 已知直线 $l \perp$ 平面 α . ①若直线 $m \perp l$, 则 $m \parallel \alpha$; ②若 $m \perp \alpha$, 则 $m \parallel l$; ③若 $m \parallel \alpha$, 则 $m \perp l$; ④若 $m \parallel l$, 则 $m \perp \alpha$. 上述判断正确的是 ()
 - ①②③
 - ②③④
 - ①③④
 - ②④
- 已知平面向量 $\mathbf{a} = (1, -3)$, $\mathbf{b} = (4, -2)$, $\lambda \mathbf{a} + \mathbf{b}$ 与 \mathbf{a} 垂直, 则 $\lambda =$ ()
 - 1
 - 1
 - 2
 - 2

二、填空题(本大题共5小题,每小题4分,共20分)

- 若指数函数 $y = a^x$ 经过点 $(-1, 3)$, 则 a 等于_____.
- 若 $y = (m-1)x^2 + 2mx + 3$ 是偶函数, 则 $m =$ _____.
- 圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上的点到直线 $3x + 4y - 25 = 0$ 的距离的最小值是_____.
- 已知 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列, 且 a_1, a_3, a_2 成等差数列, 则 $q =$ _____.
- 一个社会调查机构就某地居民的月收入调查了10 000人, 并根据所得数据得出样本频率分布直方图(如图). 为了分析居民的收入与年龄、学历、职业等方面的关系, 要从这10 000人中用分层抽样的方法抽出100人做进一步调查, 则在 $[2 500, 3 000)$ (单位:元) 月收入段中应抽出_____人.



三、解答题(本大题共 7 小题,其中第 21,22 小题为选做题,满分 60 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

16. (本小题满分 10 分)

已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_3=5, S_3=9$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

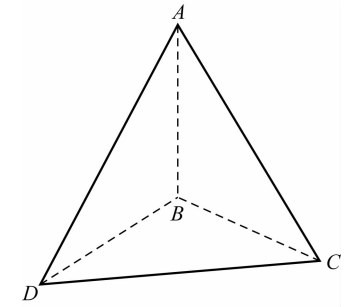
(2) 设等比数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 若 $q>0$ 且 $b_3=a_5, T_3=13$, 求 T_n .

17. (本小题满分 10 分)

如图所示, 在三棱锥 $A-BCD$ 中, $AB \perp BC, AB \perp BD, BC \perp BD, AB=BC=BD=1$.

(1) 求证: $AB \perp CD$;

(2) 求三棱锥 $A-BCD$ 的体积.



18. (本小题满分 10 分)

已知 $f(x)$ 是奇函数, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x)$ 的图像是经过点 $(3, -6)$, 顶点为 $(1, 2)$ 的抛物线的一部分.

(1) 求 $f(x)$ 的解析式;

(2) 画出其图像.

19. (本小题满分 10 分)

为推动乒乓球运动的发展,某乒乓球比赛允许不同协会的运动员组队参加,现有来自甲协会的运动员 3 名,其中种子选手 2 名,乙协会的运动员 5 名,其中种子选手 3 名,从这 8 名运动员中随机选择 4 人参加比赛.

(1) 设 A 为事件“选出的 4 人中恰有 2 名种子选手,且这 2 名种子选手来自同一个协会”,求事件 A 发生的概率;

(2) 设 X 为选出的 4 人中种子选手的人数,求随机变量 X 的分布列和数学期望.

20. (本小题满分 10 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 1$ 和直线 $l: y = x + m$, 直线 l 与椭圆 C 交于 A, B 两点.

(1) 求椭圆 C 的准线方程;

(2) 求 $\triangle ABO$ (O 为坐标原点) 的面积 S .

选做题:请考生在第 21,22 题中选择一题作答. 如果两题都做,则按所做的第 21 题计分. 作答时,请写清题号.

21. (本小题满分 10 分)

设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ,已知 $2\sin B\cos C - \sin C = 2\sin A$.

(1)求角 B 的大小;

(2)若 $b = 2\sqrt{3}, a + c = 4$,求 $\triangle ABC$ 的面积.

22. (本小题满分 10 分)

某公司准备进行两种组合投资,稳健型组合投资是由每份金融投资 20 万元,房地产投资 30 万元组成;进取型组合投资是由每份金融投资 40 万元,房地产投资 30 万元组成. 已知每份稳健型组合投资每年可获利 10 万元,每份进取型组合投资每年可获利 15 万元. 若可作投资用的资金中,金融投资不超过 160 万元,房地产投资不超过 180 万元,那么这两种组合投资应注入多少份,才能使一年获利总额最多?

数学考前冲刺试卷(二)

(总分:120分 时间:120分钟)

一、选择题(本大题共10小题,每小题4分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

- 已知集合 $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, a, b\}$, 若 $A \cap B = \{1, 3\}$, 则 $a + b$ 的值为 ()
 A. 4
 B. 7
 C. 9
 D. 10
- 函数 $y = \sin x + 2$ 的最大值是 ()
 A. 0
 B. 1
 C. 2
 D. 3
- 不等式 $|2x + 5| > 3$ 的解集是 ()
 A. $(-4, -1)$
 B. $(-\infty, -4) \cup (-1, +\infty)$
 C. $[-4, -1]$
 D. $(-\infty, -4] \cup [-1, +\infty)$
- 过点 $(1, 0)$ 且与直线 $x - 2y - 2 = 0$ 平行的直线方程是 ()
 A. $x - 2y - 1 = 0$
 B. $x - 2y + 1 = 0$
 C. $2x + y - 2 = 0$
 D. $x + 2y - 1 = 0$
- 已知向量 $\vec{AB} = (2, 4)$, $\vec{AC} = (0, 2)$, 则 $\frac{1}{2}\vec{BC} =$ ()
 A. $(-2, -2)$
 B. $(2, 2)$
 C. $(1, 1)$
 D. $(-1, -1)$
- 设 $f(x) = \begin{cases} x + 3, & x > 10, \\ f[f(x + 5)], & x \leq 10, \end{cases}$ 则 $f(5)$ 的值是 ()
 A. 24
 B. 21
 C. 18
 D. 16
- 若直线 $x + y + a = 0$ 与圆 $x^2 + y^2 = a$ 相切, 则 a 为 ()
 A. 0 或 2
 B. $\sqrt{2}$
 C. 2
 D. 无解

8. 下面四个命题:

- ①分别在两个平面内的两直线平行;
- ②若两个平面平行, 则其中一个平面内的任何一条直线必平行于另一个平面;
- ③如果一个平面内的两条直线平行于另一个平面, 则这两个平面平行;
- ④如果一个平面内的任何一条直线都平行于另一个平面, 则这两个平面平行.

其中正确的命题是 ()

- A. ①②
 B. ②④
 C. ①③
 D. ②③

9. 若 $0 < x < y < 1$, 则 ()

- A. $3^y < 3^x$
 B. $\log_x 3 < \log_y 3$
 C. $\log_4 x < \log_4 y$
 D. $(\frac{1}{4})^x < (\frac{1}{4})^y$

10. 函数 $f(x) = ax^2 + 2(a-1)x + 2$ 在区间 $(-\infty, 4]$ 上为减函数, 则 a 的取值范围为 ()

- A. $0 < a \leq \frac{1}{5}$
 B. $0 \leq a \leq \frac{1}{5}$
 C. $0 < a < \frac{1}{5}$
 D. $a > \frac{1}{5}$

二、填空题(本大题共5小题,每小题4分,共20分)

- “ $x = 0$ ”是“ $x^2 = 2x$ ”的_____条件(用“充分不必要”“必要不充分”“充要”“既不充分也不必要”填空).
- 某学习小组在一次数学测验中,得100分的有1人,95分的有1人,90分的有2人,85分的有4人,80分和75分的各有1人,则该小组成绩的平均数是_____.
- 已知角 α 的终边与函数 $5x + 12y = 0 (x \leq 0)$ 决定的函数图像重合, 则 $\cos \alpha + \frac{1}{\tan \alpha} - \frac{1}{\sin \alpha}$ 的值为_____.
- 已知 $(1 - 2x)^n$ 的展开式中 x^2 的系数为 40, 则 n 等于_____.
- 已知 $f(x)$ 是偶函数, $g(x)$ 是奇函数, 若 $f(x) + g(x) = \frac{1}{x-1}$, 则 $f(x)$ 的解析式为_____.

三、解答题(本大题共 7 小题,其中第 21,22 小题为选做题,满分 60 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

16. (本小题满分 10 分)

等比数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1=2, a_4=16$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 a_3, a_5 分别为等差数列 $\{b_n\}$ 的第 3 项和第 5 项, 试求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式及前 n 项和 S_n .

17. (本小题满分 10 分)

$$\text{已知函数 } f(x) = \begin{cases} x+2, & x \leq -1, \\ x^2, & -1 < x < 2, \\ 2x, & x \geq 2. \end{cases}$$

(1) 画出该函数图像;

(2) 若 $f(a) < 3$, 求实数 a 的取值范围.

18. (本小题满分 10 分)

某中学选派 40 名同学参加北京市高中生技术设计创意大赛的培训, 他们参加培训的次数统计如表所示:

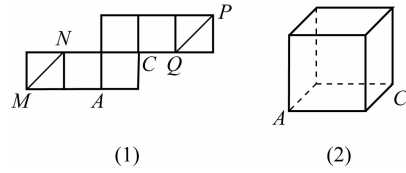
培训次数	1	2	3
参加人数	5	15	20

(1) 从这 40 人中任意选 3 名学生, 求这 3 名同学中至少有 2 名同学参加培训次数恰好相等的概率;

(2) 从 40 人中任选两名学生, 用 X 表示这两人参加培训次数之差的绝对值, 求随机变量 X 的分布列及数学期望 $E(X)$.

19. (本小题满分 10 分)

图(1)是一个棱长为 1 的正方体的表面展开图, MN 和 PQ 是两条面对角线, 请在图(2)的正方体中将 MN, PQ 画出来, 并解答下列问题:



- (1) MN 和 PQ 所成角的大小;
- (2) 四面体 $M-NPQ$ 的体积.

20. (本小题满分 10 分)

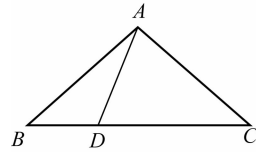
已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率 $e = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, 原点 O 到过点 $A(a, 0), B(0, -b)$ 的直线的距离是 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

- (1) 求双曲线的方程;
- (2) 已知直线 $y = kx + 5 (k \neq 0)$ 交双曲线于不同的两点 C, D , 且 C, D 都在以 B 为圆心的圆上, 求 k 的值.

选做题：请考生在第 21,22 题中选择一题作答. 如果两题都做, 则按所做的第 21 题计分. 作答时, 请写清题号.

21. (本小题满分 10 分)

如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D 为边 BC 上一点, $AD=3$, 且 $\sin \angle ADB = \sqrt{3} \sin B$.



(1) 求 AB 的长;

(2) 若 $AD \perp AC$, $BC=3BD$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

22. (本小题满分 10 分)

某广告公司接到幸福社区制作疫情防控宣传标牌的任务, 要制作文字标牌 4 个, 绘画标牌 5 个. 该公司现有两种规格的原料, 甲种规格原料每张 3 m^2 , 可做文字标牌 1 个和绘画标牌 2 个; 乙种规格原料每张 2 m^2 , 可做文字标牌 2 个和绘画标牌 1 个. 问两种规格的原料各用多少张时, 才能使总的用料面积最小? 并求最小用料面积.