



“十四五”职业教育国家规划教材
(中等职业学校公共基础课程教材)

数学

SHUXUE

拓展模块一 上册

丘维声 主编



CTS | 湖南科学技术出版社



“十四五”职业教育国家规划教材
(中等职业学校公共基础课程教材)

数学

拓展模块一

上册

CTS



湖南科学技术出版社



责任编辑: 邹伟华 易星星 袁 军
责任美编: 殷 健



目录

CONTENTS

第1章	充分条件，必要条件，充要条件	1
1.1	充分条件，必要条件	3
1.2	充要条件	8
	本章小结	12
	复习题一	13
第2章	三角计算	14
2.1	两角和与差的余弦、正弦、正切公式	16
2.2	二倍角的正弦、余弦、正切公式	25
2.3	正弦型函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的性质和图像	30
2.4	解三角形	37
2.5	三角计算的应用举例	43
	本章小结	46
	复习题二	48
第3章	数 列	51
3.1	数列的概念	53
3.2	等差数列及其通项公式	58
3.3	等差数列的前 n 项和公式	63
3.4	等比数列及其通项公式	68
3.5	等比数列的前 n 项和公式	75
3.6	数列的应用举例	80
	本章小结	86
	复习题三	87
	数学实验：用计算机探究无穷递减等比数列的和	89

第4章 向 量 91

4.1 向量的概念和向量的几何表示	93
4.2 向量的加法与减法	97
4.3 数乘向量	102
4.4 平面向量的坐标表示	107
4.5 平面向量的内积及其应用	117
本章小结	126
复习题四	128

第5章 圆锥曲线 130

5.1 椭 圆	132
5.2 双曲线	142
5.3 抛物线	154
本章小结	165
复习题五	167
数学文化：用数学的思维方式研究圆锥曲线	170

第5章

圆锥曲线

公元前 4 世纪，古希腊数学家发现用一定角度的平面去截圆锥，可以得到不同的曲线，如圆、椭圆、抛物线、双曲线等，古希腊先贤将它们统称为圆锥曲线。

本章结构

5.1 椭圆

5.2 双曲线

5.3 抛物线

学以致用

在基础模块的第6章中,我们通过建立直线的方程和圆的方程来研究直线和圆的性质.这一章我们通过建立椭圆、双曲线、抛物线的标准方程来研究它们的性质.

平面内与两个定点 F_1, F_2 的距离之和是常数(大于 $|F_1F_2|$)的点的轨迹称为椭圆.我们通过建立标准坐标系得到了椭圆的标准方程.利用标准方程研究椭圆的性质.

平面内与两个定点 F_1, F_2 的距离之差的绝对值是常数(小于 $|F_1F_2|$)的点的轨迹称为双曲线.我们通过建立标准坐标系得到了双曲线的标准方程.利用标准方程研究双曲线的性质.

平面内与一个定点 F 和一条定直线 l 的距离相等的点的轨迹称为抛物线.我们通过建立标准坐标系得到了抛物线的标准方程.利用标准方程研究抛物线的性质.

椭圆、双曲线、抛物线统称为圆锥曲线.天地之间,圆锥曲线无处不在.德国天文学家开普勒发现天体运行轨道是椭圆,意大利物理学家伽利略得到抛掷物体的轨迹是抛物线,而法国科学家迈多尔日发展了圆锥曲线在光学中的应用.由于圆锥曲线线型简洁美观而富有张力,同时还具有某些很好的力学性质,故而被建筑设计师们所推崇并采用.例如国家体育场和广州塔.这些曲线优美的现代建筑,会给人带来美的享受.随着解析几何的创立,人们用坐标法和方程来研究圆锥曲线,使得圆锥曲线在理论上更加完善,在实践中得到了更加充分的应用.

5.1 椭圆

一 椭圆的标准方程



观察

油罐车的油罐横截面轮廓是椭圆. 太阳系的行星每时每刻都环绕太阳在椭圆轨道上运行, 如图 5.1-1 所示.



图 5.1-1

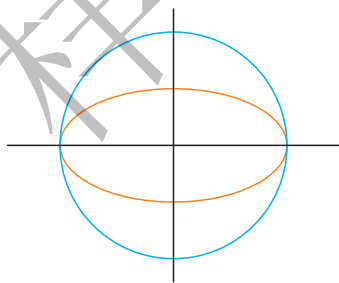


图 5.1-2

圆压扁后成为椭圆, 如图 5.1-2 所示.

如何统一地研究实际生活中出现的各种各样的椭圆?

取一条细绳, 把它的两端固定在画图板上的 F_1 和 F_2 两点, 且使绳长大于 F_1 和 F_2 的距离, 如图 5.1-3 所示. 用铅笔尖把绳子拉紧, 使笔尖在图板上慢慢移动, 画出的图形是一个椭圆. 由此看出, 这个椭圆是由与点 F_1 和 F_2 的距离之和等于绳长的点组成的.

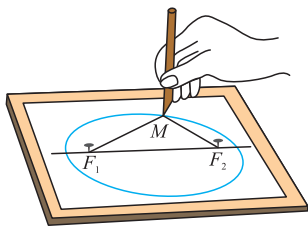


图 5.1-3



抽象

从上述例子受到启发, 我们给出椭圆的定义如下:

平面内与两个定点 F_1, F_2 的距离之和是常数(大于 $|F_1F_2|$) 的点的轨迹称为**椭圆**. 这两个定点称为椭圆的**焦点**, 两焦点的距离称为**焦距**.

为了研究椭圆的性质, 我们要在平面上建立一个适当的直角坐标系, 求出椭圆的方程.

取过焦点 F_1, F_2 的直线为 x 轴, 线段 F_1F_2 的垂直平分线为 y 轴, 建立直角坐标系 xOy , 如图 5.1-4 所示, 这个坐标系称为椭圆的一个标准坐标系. 参看图 5.1-3 画出的椭圆.

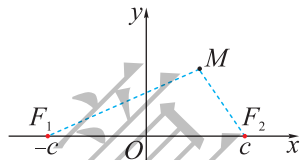


图 5.1-4

设椭圆的焦距为 $2c (c > 0)$, 椭圆上的点与两定点 F_1, F_2 的距离之和为 $2a (a > c)$, 则 F_1, F_2 的坐标分别为 $(-c, 0), (c, 0)$. 为了使计算简单一些, 我们以 $c=4, a=5$ 为例来求椭圆的方程.

点 $M(x, y)$ 在上述椭圆上

$$\Leftrightarrow |MF_1| + |MF_2| = 10$$

$$\Leftrightarrow |MF_1| = 10 - |MF_2|$$

$$\stackrel{*}{\Rightarrow} |MF_1|^2 = (10 - |MF_2|)^2$$

$$\Leftrightarrow (x+4)^2 + y^2 = 100 - 20\sqrt{(x-4)^2 + y^2} + (x-4)^2 + y^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-4)^2 + y^2} = 5 - \frac{4}{5}x$$

$$\stackrel{**}{\Rightarrow} (x-4)^2 + y^2 = \left(5 - \frac{4}{5}x\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{25}x^2 + y^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

因此上述椭圆上的点 $M(x, y)$ 的坐标满足方程 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

反之, 如果点 $M(x, y)$ 的坐标满足方程 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, 则

$$\frac{x^2}{25} \leq 1, \frac{y^2}{9} \leq 1.$$

于是
从而

$$|x| \leq 5, |y| \leq 3,$$

$$5 - \frac{4}{5}x \geq 5 - \frac{4}{5} \times 5 = 1 > 0.$$

因此“**”这一步可以反推回去，又由于

$$\begin{aligned} |MF_2| &= \sqrt{(x-4)^2 + y^2} \\ &\leq \sqrt{(-5-4)^2 + 9} = \sqrt{90} < 10, \end{aligned}$$

因此“*”这一步可以反推回去，从而得出点 $M(x, y)$ 在上述椭圆上.

综上所述, $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 是上述椭圆的方程. 注意: $9 = 5^2 - 4^2$.

上述推导过程对于一般的 $c (c > 0)$ 和 $a (a > c)$ 也是适用的, 因此可以得出椭圆的方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0), \quad (1)$$

其中 $b^2 = a^2 - c^2$. 方程(1)称为椭圆的**标准方程**, 此时椭圆的**焦点在 x 轴上**.

我们也可以取椭圆的焦点 F_1, F_2 的连线为 y 轴, 以线段 F_1F_2 的垂直平分线为 x 轴, 建立直角坐标系 xOy , 如图 5.1-5 所示. 这个坐标系也称为椭圆的一个标准坐标系, 类似地可以求出椭圆的方程为

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 (a > b > 0), \quad (2)$$

其中 $b^2 = a^2 - c^2$. 方程(2)也称为椭圆的标准方程, 此时椭圆的**焦点在 y 轴上**. 参看本节练习 A 组第 4 题画出的椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ 的图形.

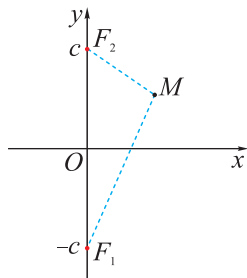


图 5.1-5



想一想

已知一个椭圆的标准方程, 如何判定其焦点在 x 轴上还是在 y 轴上?

例 1 已知椭圆的焦点在 x 轴上, 焦距是 6, 椭圆上一点到两个焦点的距离之和是 10, 写出这个椭圆的标准方程.

解 因为 $2c=6$, $2a=10$, 所以 $c=3$, $a=5$, 从而

$$b^2 = a^2 - c^2 = 5^2 - 3^2 = 16.$$

由于焦点在 x 轴上, 因此这个椭圆的标准方程是

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

例 2 求椭圆 $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$ 的焦点与焦距.

解 由于 $a^2=100$, $b^2=64$, 因此

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{100 - 64} = \sqrt{36} = 6.$$

从方程看出, 焦点在 x 轴上, 因此焦点为 $F_1(-6, 0)$, $F_2(6, 0)$, 焦距为 12.

二 椭圆的性质



探索

前面我们根据椭圆的定义, 选择适当的直角坐标系得到了椭圆的标准方程:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0). \quad (1)$$

方程(1)表示的图形是不是像我们在实际生活中见到的椭圆那样? 如何根据方程(1)来研究椭圆的性质?

1. 图形的范围

从方程(1)看出, 椭圆(1)上点的坐标 (x, y) 都适合不等式:

$$\frac{x^2}{a^2} \leq 1, \quad \frac{y^2}{b^2} \leq 1,$$

即 $|x| \leq a, |y| \leq b$.

因此椭圆(1)位于直线 $x = \pm a$, $y = \pm b$ 所围成的矩形里, 如图 5.1-6 所示.

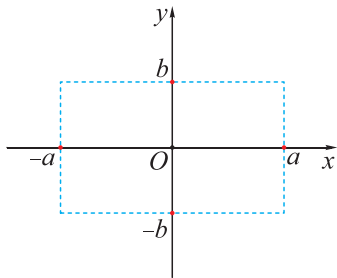


图 5.1-6

2. 对称性

点 $P(x, y)$ 在椭圆(1)上

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{(-x)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$\Leftrightarrow$ 点 $P(x, y)$ 关于 y 轴的对称点 $Q(-x, y)$ 在椭圆(1)上.

因此椭圆(1)关于 y 轴对称, 即 y 轴是椭圆(1)的对称轴.

用类似的方法可以证明, 椭圆(1)关于 x 轴对称, 关于原点对称, 因此 x 轴也是椭圆(1)的对称轴, 原点是椭圆(1)的对称中心. 即椭圆有两条互相垂直的对称轴, 有一个对称中心(简称**中心**).

3. 顶点

在方程(1)中, 令 $x=0$, 得 $y=\pm b$. 这说明 $B_1(0, -b)$, $B_2(0, b)$ 是椭圆(1)与 y 轴的两个交点. 同理, 在方程(1)中, 令 $y=0$, 得 $x=\pm a$, 因此 $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$ 是椭圆(1)与 x 轴的两个交点. 我们把椭圆与它的对称轴的交点称为椭圆的**顶点**. 椭圆共有 4 个顶点.

椭圆的焦点所在的对称轴上两个顶点的连线段 A_1A_2 称为椭圆的**长轴**; 另一条对称轴上两个顶点的连线段 B_1B_2 称为椭圆的**短轴**. 从顶点的坐标容易计算出, 长轴的长为 $2a$, 短轴的长为 $2b$. 把 a, b 分别叫作椭圆的**长半轴长**和**短半轴长**, 把 $c=\sqrt{a^2-b^2}$ 叫作椭圆的**半焦距**.

例 3 画出椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 的图形.

解 由于 $a=5, b=4$, 因此椭圆位于直线 $x=\pm 5, y=\pm 4$ 所围成的矩形里.

由于椭圆关于 x 轴、 y 轴都对称, 因此只要先画出椭圆在第一象限及边界的部分.

把椭圆的方程变形为

$$y^2 = \frac{16}{25}(25 - x^2).$$

椭圆在第一象限及边界的部分是函数

$$y = \frac{4}{5}\sqrt{25-x^2}, x \in [0, 5]$$

的图像. 从解析式看出, 当 x 从 0 逐渐增大到 5 时, y 从 4 逐渐减小到 0. 因此函数 $y = \frac{4}{5}\sqrt{25-x^2}$ 是减函数.

列表:

x	0	1	2	3	4	5
y	4	3.9	3.7	3.2	2.4	0

在平面直角坐标系 xOy 内, 描出 6 个点, 由于函数 $y = \frac{4}{5}\sqrt{25-x^2}$ 是减函数, 因此可以用一条光滑曲线把各点连接起来. 再利用对称性可画出整个椭圆, 如图 5.1-7 所示.

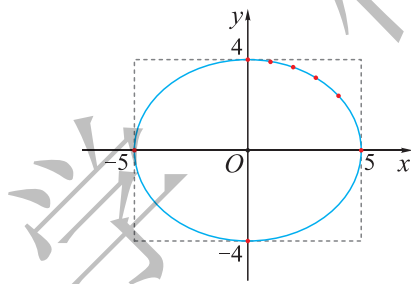


图 5.1-7



探索

我们看到, 图 5.1-2 中的椭圆比图 5.1-7 中的椭圆扁一些. 椭圆的圆扁程度由什么决定呢?

由于椭圆(1)位于直线 $x = \pm a$, $y = \pm b$ 所围成的矩形里, 并且椭圆(1)的顶点坐标分别是 $(-a, 0)$, $(a, 0)$, $(0, -b)$, $(0, b)$, 因此当比值 $\frac{b}{a}$ 越小时, 椭圆就越扁. 由于

$$\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{c}{a}\right)^2},$$

因此比值 $\frac{c}{a}$ 越大时, $\frac{b}{a}$ 就越小, 从而椭圆越扁; 比值 $\frac{c}{a}$ 越小时, $\frac{b}{a}$ 就越大, 上述矩形越接近于正方形, 椭圆就越接近于圆.

我们把比值 $e = \frac{c}{a}$ 叫作椭圆的**离心率**.

由于 $a > c > 0$, 因此 $0 < e < 1$.

从上面的讨论知道, 椭圆的离心率 e 越大, 它就越扁; 离心率 e 越接近 0, 椭圆就越接近于圆.



当 $c=0$, 即 $a=b$ 时, 椭圆的两个焦点重合, 此时椭圆变为半径为 a 的圆, 它的方程为 $x^2 + y^2 = a^2$.

例 4 求椭圆 $36x^2 + 25y^2 = 900$ 的长轴长、短轴长、顶点和离心率.

解 把所给的椭圆方程化成标准方程:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{36} = 1.$$

由此看出, $a=6$, $b=5$, 焦点在 y 轴上. 因此, 椭圆的长轴长 $2a=12$, 短轴长 $2b=10$, 顶点是

$$A_1(0, -6), A_2(0, 6), B_1(-5, 0), B_2(5, 0).$$

由于 $c = \sqrt{6^2 - 5^2} = \sqrt{11}$, 因此离心率为

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{11}}{6}.$$

例 5 已知椭圆的长轴上两个顶点的坐标是 $(-\sqrt{15}, 0)$, $(\sqrt{15}, 0)$, 离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$, 求椭圆的标准方程.

解 由已知条件得 $a = \sqrt{15}$, $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, 因此

$$c = \frac{\sqrt{5}}{5}a = \frac{\sqrt{5}}{5} \times \sqrt{15} = \sqrt{3}.$$

从而

$$b^2 = a^2 - c^2 = (\sqrt{15})^2 - (\sqrt{3})^2 = 12.$$

由于长轴在 x 轴上, 因此椭圆的标准方程是

$$\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{12} = 1.$$

例 6 椭圆 $9x^2 + 16y^2 = 225$ 与直线 $3x - y - 6 = 0$ 有没有交点？如果有，求出交点.

解 所给椭圆与直线的交点的坐标是下述方程组的实数解：

$$\begin{cases} 9x^2 + 16y^2 = 225, & \text{①} \\ 3x - y - 6 = 0. & \text{②} \end{cases}$$

从②式得

$$y = 3x - 6, \quad \text{③}$$

代入①式得

$$9x^2 + 16(3x - 6)^2 = 225,$$

整理，得

$$17x^2 - 64x + 39 = 0. \quad \text{④}$$

一元二次方程④的判别式为

$$\Delta = (-64)^2 - 4 \times 17 \times 39 = 4 \times 361 > 0,$$

因此方程④有两个不等实根

$$x_1 = 3, \quad x_2 = \frac{13}{17}.$$

分别代入③式，得

$$y_1 = 3, \quad y_2 = -\frac{63}{17}.$$

因此所给椭圆与直线有两个不同的交点

$$P_1(3, 3), \quad P_2\left(\frac{13}{17}, -\frac{63}{17}\right).$$

评注 从图 5.1-8 可以看出，一条直线与一个椭圆或者不相交(例如 l_1)，或者有两个不同的(例如 l_2)或重合的交点(例如 l_3)。

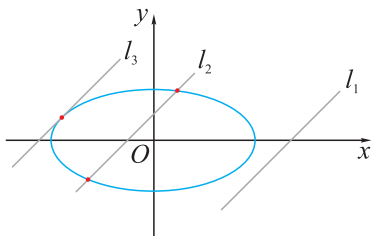


图 5.1-8

练习

A 组

1. 求满足下列条件的椭圆的标准方程:

- (1) 焦点在 x 轴上, 焦距是 10, 椭圆上的点到两焦点的距离之和等于 $6\sqrt{5}$;
 (2) $a=13$, 焦点为 $F_1(-5, 0)$, $F_2(5, 0)$;
 (3) $a=13$, 焦点为 $F_1(0, -5)$, $F_2(0, 5)$;
 (4) $b=2\sqrt{3}$, 焦点为 $F_1(-2\sqrt{5}, 0)$, $F_2(2\sqrt{5}, 0)$.

2. 求下列椭圆的焦点与焦距:

(1) $\frac{x^2}{48} + \frac{y^2}{18} = 1$; (2) $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 1$.

3. 求下列椭圆的长轴长、短轴长、顶点和离心率:

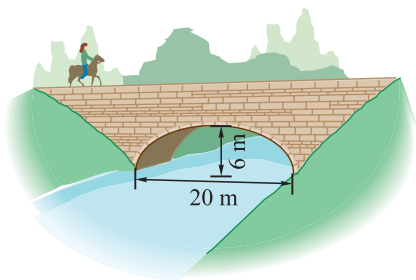
(1) $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$; (2) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$;
 (3) $4x^2 + 5y^2 = 20$; (4) $8x^2 + y^2 = 8$.

4. 画出椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ 的图形.

5. 求满足下列条件的椭圆的标准方程:

- (1) 焦点在 x 轴上, 长轴长为 8, 离心率为 $\frac{1}{2}$;
 (2) 焦点坐标是 $(-2, 0)$, $(2, 0)$, 离心率为 $\frac{1}{3}$.

6. 如图, 椭圆的上半部分拱形用于支撑横跨 20 m 水面宽的桥, 拱的中心距河面 6 m. 试写出椭圆的一个方程.



(第 6 题)

B 组

1. 已知椭圆的焦点在 x 轴上, 焦距为 2, 且椭圆经过点 $P(2, 0)$, 求椭圆的标准方程.

2. 求下列椭圆的焦点与焦距:

(1) $2x^2 + 9y^2 = 18$;

(2) $5x^2 + 3y^2 = 15$.

3. 已知椭圆的焦点在 y 轴上, 长轴长等于短轴长的 3 倍, 且椭圆经过点 $Q\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right)$, 求椭圆的标准方程.

4. 求满足下列条件的椭圆的标准方程:

(1) 短轴上的两个顶点的坐标是 $(0, -2)$, $(0, 2)$, 离心率为 $\frac{2}{3}$;

(2) 半焦距与长半轴长的和为 10, 离心率为 $\frac{1}{4}$.

5. 2016 年 8 月 16 日, 中国自主研制的世界上首颗量子科学实验卫星“墨子号”成功发射升空. 已知它的运行轨道是以地心 F_2 为一个焦点的椭圆, 近地点 A 距地面 498 km, 远地点 B 距地面 503 km, 地球半径为 6 371 km, 求“墨子号”卫星的轨道方程.



墨子号卫星

6. 设椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b >$

$0)$, c 是半焦距. 我们把直线 $x = \pm \frac{a^2}{c}$ 叫作椭圆的准线. 求下列椭圆的准线方程:

(1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$;

(2) $3x^2 + 5y^2 = 15$.

7. 下列直线是否与椭圆 $2x^2 + 3y^2 = 6$ 有交点? 如果有, 求出交点.

(1) $2x - y + 1 = 0$;

(2) $\sqrt{6}x + 3y - 6 = 0$.

5.2 双曲线

一 双曲线的标准方程



观察

一个发电厂冷却塔的纵截面的外部轮廓是双曲线的一部分，如图 5.2-1 所示.



图 5.2-1

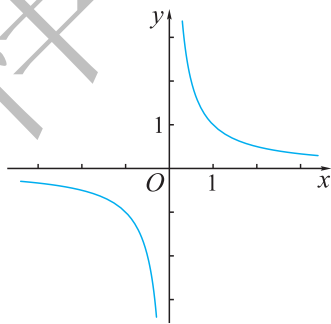


图 5.2-2

反比例函数 $y = \frac{1}{x}$ 的图像是双曲线，如图 5.2-2 所示.

一些天体的运行轨道是双曲线.

如何统一地研究实际生活中出现的各种各样的双曲线?



抽象

经过探索，我们给出双曲线的定义如下：

平面内与两个定点 F_1, F_2 的距离之差的绝对值是常数(小于 $|F_1F_2|$)的点的轨迹称为**双曲线**. 这两个定点称为双曲线的**焦点**，两焦点的距离称为**焦距**.

为了研究这样定义的双曲线的图形是什么样子，以及研究它的性质，我们要在平面上建立一个适当的直角坐标系，求出双曲线的方程.

取过焦点 F_1, F_2 的直线为 x 轴, 线段 F_1F_2 的垂直平分线为 y 轴, 建立直角坐标系 xOy , 如图 5.2-3 所示. 这个坐标系称为双曲线的一个标准坐标系.

设双曲线的焦距为 $2c (c > 0)$, 双曲线上的点与两定点 F_1, F_2 的距离之差的绝对值为 $2a (0 < a < c)$, 则 F_1, F_2 的坐标分别为 $(-c, 0), (c, 0)$. 为了使计算简单一些, 我们以 $c=5, a=3$ 为例来求双曲线的方程.

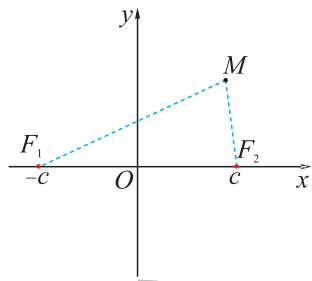


图 5.2-3

点 $M(x, y)$ 在上述双曲线上

$$\Leftrightarrow |MF_1| - |MF_2| = \pm 6$$

$$\Leftrightarrow |MF_1| = |MF_2| \pm 6$$

$$\stackrel{*}{\Rightarrow} |MF_1|^2 = (|MF_2| \pm 6)^2$$

$$\Leftrightarrow (x+5)^2 + y^2 = (x-5)^2 + y^2 \pm 12\sqrt{(x-5)^2 + y^2} + 36$$

$$\Leftrightarrow \pm 3\sqrt{(x-5)^2 + y^2} = 5x - 9$$

$$\Leftrightarrow 9[(x-5)^2 + y^2] = (5x-9)^2$$

$$\Leftrightarrow 16x^2 - 9y^2 = 144$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1.$$

因此上述双曲线上的点 $M(x, y)$ 的坐标满足方程 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$.

反之, 如果点 $M(x, y)$ 的坐标满足方程 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$, 则

$$\frac{x^2}{9} = 1 + \frac{y^2}{16} \geq 1.$$

从而

$$x^2 \geq 9,$$

因此

$$x \geq 3 \text{ 或 } x \leq -3. \quad \textcircled{1}$$

上述推导过程中“*”这一步, 如果 $|MF_1|^2 = (|MF_2| + 6)^2$, 则两边开平方并且取算术根, 得 $|MF_1| = |MF_2| + 6$.

如果 $|MF_1|^2 = (|MF_2| - 6)^2$, 则有

$$5x - 9 = -3\sqrt{(x-5)^2 + y^2},$$

从而 $5x-9 \leq 0$, 即 $x \leq \frac{9}{5} < 3$, 于是由①式得, $x \leq -3$, 因此

$$\begin{aligned} |MF_2| - 6 &= \sqrt{(x-5)^2 + y^2} - 6 \\ &\geq \sqrt{(-3-5)^2 + 0} - 6 = 8 - 6 = 2 \\ &> 0, \end{aligned}$$

于是在 $|MF_1|^2 = (|MF_2| - 6)^2$ 两边开平方并且取算术根, 得

$$|MF_1| = |MF_2| - 6.$$

这证明了“*”这一步可以反推回去, 因此点 $M(x, y)$ 在上述双曲线上.

综上所述, $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 是上述双曲线的方程. 注意 $16 = 5^2 - 3^2$.

上述推导过程对于一般的 $c (c > 0)$ 和 $a (0 < a < c)$ 也是适用的, 因此可以得到双曲线的方程为

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0), \quad (1)$$

其中 $b^2 = c^2 - a^2$. 方程(1)称为双曲线的**标准方程**, 此时双曲线的焦点在 x 轴上.

我们也可以取双曲线的焦点 F_1, F_2 的连线为 y 轴, 以线段 F_1F_2 的垂直平分线为 x 轴, 建立直角坐标系. 这个坐标系也称为双曲线的一个标准坐标系. 用类似的方法可以得出, 双曲线的方程为

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0), \quad (2)$$

其中 $b^2 = c^2 - a^2$. 方程(2)也称为双曲线的标准方程, 此时双曲线的焦点在 y 轴上.



已知一个双曲线的标准方程, 如何判定其焦点在 x 轴上还是在 y 轴上?

例 1 已知双曲线的焦点在 x 轴上, 焦距是 26, 双曲线上一点到两个焦点的距离之差的绝对值为 24, 写出双曲线的标准方程.

解 由已知条件得 $2c = 26$, $2a = 24$, 因此

$$c=13, a=12, b^2=c^2-a^2=13^2-12^2=25.$$

由于焦点在 x 轴上, 因此双曲线的标准方程是

$$\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1.$$

例 2 求双曲线 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ 的焦点与焦距.

解 由于 $a^2=16, b^2=9$, 因此

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16 + 9} = 5.$$

从方程看出, 焦点在 x 轴上. 因此焦点是 $F_1(-5, 0), F_2(5, 0)$, 焦距为 10.

二 双曲线的性质



探索

前面我们根据双曲线的定义, 选择适当的直角坐标系建立了双曲线的标准方程:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0). \quad (1)$$

方程(1)表示的图形是不是像我们在实际生活中见到的双曲线那样? 如何根据方程(1)来研究双曲线的性质?

1. 图形的范围

从方程(1)看出, 双曲线上点的坐标 (x, y) 都满足不等式:

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2} \geq 1,$$

即

$$x^2 \geq a^2,$$

从而

$$x \geq a \text{ 或 } x \leq -a.$$

因此双曲线位于直线 $x = -a$ 的左侧, 以及直线 $x = a$ 的右侧.

2. 对称性

点 $P(x, y)$ 在双曲线(1)上

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{(-y)^2}{b^2} = 1$$

$\Leftrightarrow$ 点 $P(x, y)$ 关于 x 轴的对称点 $N(x, -y)$ 在双曲线(1)上.

因此双曲线(1)关于 x 轴对称.

用类似的方法可以证明, 双曲线(1)关于 y 轴对称, 关于原点对称.

综上所述, 双曲线有两条互相垂直的对称轴, 有一个对称中心(简称**中心**).

3. 顶点

在方程(1)中, 令 $y=0$, 得 $x=\pm a$. 这说明 $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$ 是双曲线(1)与 x 轴的两个交点. 在方程(1)中, 令 $x=0$, 得 $y^2=-b^2$, 这个方程没有实数解, 因此双曲线(1)与 y 轴没有交点.

双曲线与它的对称轴的交点称为双曲线的**顶点**. 从上述知, 双曲线共有两个顶点, 它们位于焦点所在的对称轴上.

双曲线的两个顶点的连线段 A_1A_2 称为双曲线的**实轴**. 实轴的长等于 $2a$. 把 a 叫作双曲线的**实半轴长**.

双曲线(1)与 y 轴没有交点. 考虑 y 轴上的两点 $B_1(0, -b)$, $B_2(0, b)$, 我们把线段 B_1B_2 叫作双曲线的**虚轴**. 虚轴的长等于 $2b$. 把 b 叫作双曲线的**虚半轴长**.

$c=\sqrt{a^2+b^2}$ 叫作双曲线的**半焦距**.

4. 渐近线

经过双曲线的两个顶点 $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$ 分别作 y 轴的平行线 $x=-a$, $x=a$; 经过 $B_1(0, -b)$, $B_2(0, b)$ 两点分别作 x 轴的平行线 $y=-b$, $y=b$. 这四条直线围成一个矩形, 如图 5.2-4 所示. 这个矩形的两条对角线所在的直线 l_1 , l_2 的方程分别是 $y=\frac{b}{a}x$, $y=-\frac{b}{a}x$. 现在我们来讨论这两条直线与双曲

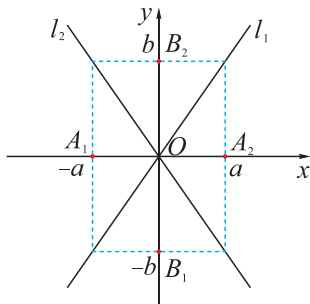


图 5.2-4

线的位置关系. 为了使计算较简单一些, 我们以 $a=2$, $b=3$ 为例来讨论.

考虑方程组

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1, & \text{①} \\ y = \pm \frac{3}{2}x. & \text{②} \end{cases}$$

把②式代入①式, 得

$$\frac{x^2}{4} - \frac{1}{9} \left(\pm \frac{3}{2}x \right)^2 = 1, \quad \text{即} \quad 0 = 1. \quad \text{③}$$

无论 x , y 取什么值都不可能使③式成立, 因此原方程组没有解. 这说明直线 l_1 , l_2 都与双曲线没有交点.

我们来看直线 l_1 与双曲线在第一象限部分的位置关系. 把双曲线的标准方程①变形, 得出双曲线在第一象限中的部分是函数

$$y = \frac{3}{2}\sqrt{x^2 - 4}, \quad x \in [2, +\infty)$$

的图像. 当 $x \in [2, +\infty)$ 时, 比较 $y = \frac{3}{2}\sqrt{x^2 - 4}$ 与 $y = \frac{3}{2}x$ 的函数值, 有

$$\frac{\frac{3}{2}\sqrt{x^2 - 4}}{\frac{3}{2}x} = \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}} < 1. \quad \text{④}$$

从④式还可以看出, 当 x 从 2 逐渐增大时, 上述比值越来越接近 1. 这说明双曲线①在第一象限的部分位于直线 $y = \frac{3}{2}x$ 的下方; 并且当 x 从 2 逐渐增大时, 双曲线①越来越接近直线 $y = \frac{3}{2}x$, 但是与它不相交.

利用对称性可以得出双曲线在其他象限的部分与直线 $y = \frac{3}{2}x$ 或 $y = -\frac{3}{2}x$ 的位置关系.

上述方法对于一般的 $a > 0$, $b > 0$ 也适用. 所得的结论也相应成立.

我们把直线 $y = \frac{b}{a}x$ 与 $y = -\frac{b}{a}x$ 叫作双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的渐近线.

如果双曲线的标准方程是

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1, \quad (2)$$

用类似于上述的方法可得出, 双曲线(2)在第一象限及其边界的部分位于直线 $y = \frac{a}{b}x$ 的左侧; 并且当 y 从 a 逐渐增大时, 双曲线(2)越来越接近直线 $y = \frac{a}{b}x$, 但是与它不相交. 利用对称性可以得出双曲线(2)在其他象限及其边界的部分与直线 $y = \frac{a}{b}x$ 或 $y = -\frac{a}{b}x$ 的位置关系.

我们把直线 $y = \frac{a}{b}x$ 与 $y = -\frac{a}{b}x$ 叫作双曲线 $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ 的渐近线.

例 3 画出双曲线 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ 的图形.

解 由于 $a=4$, $b=3$, 且焦点在 x 轴上, 因此双曲线位于直线 $x=-4$ 的左侧, 直线 $x=4$ 的右侧. 画出直线 $x=\pm 4$, $y=\pm 3$ 围成的矩形, 并且画出这个矩形的两条对角线所在的直线 $y=\pm \frac{3}{4}x$.

双曲线在第一象限中的部分是函数

$$y = \frac{3}{4}\sqrt{x^2 - 16}, \quad x \in [4, +\infty)$$

的图像. 从上式看出, 当 x 从 4 逐渐增大时, y 从 0 逐渐增大, 因此函数 $y = \frac{3}{4}\sqrt{x^2 - 16}$ 是增函数.

列表:

x	4	5	6	7	8
y	0	2.25	3.4	4.3	5.2

在平面直角坐标系 xOy 内描点. 由于函数 $y = \frac{3}{4}\sqrt{x^2 - 16}$ 是增函数, 因此可以用一条光滑曲线把各点连接起来. 注意: 双曲线 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ 在第一象限的

部分位于直线 $y = \frac{3}{4}x$ 下方；并且当 x 从 4 逐渐增大时，双曲线越来越接近直线

$y = \frac{3}{4}x$ ，但是与它不相交.

利用对称性可以画出双曲线的整个图形，它有两支，如图 5.2-5 所示.

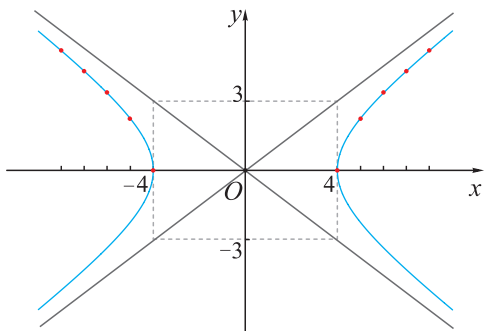


图 5.2-5

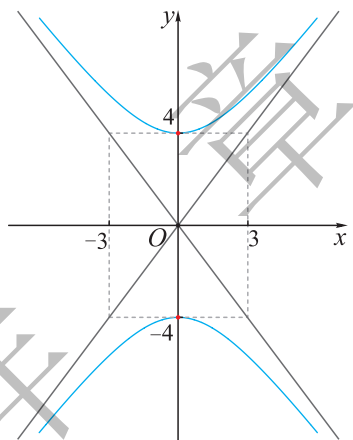


图 5.2-6

注：用类似的方法可以画出双曲线

$$\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$$

的图形，如图 5.2-6 所示.



探索

双曲线的开口有的张得大一些，有的小一些，这是由什么决定的呢？

双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的两支分别位于直线 $x = -a$ ， $x = a$ 的左侧和右侧，并且夹在直线 $y = \frac{b}{a}x$ 与 $y = -\frac{b}{a}x$ 之间. 因此当比值 $\frac{b}{a}$ 越小时，双曲线的开口越小，即形状越扁. 由于

$$\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{c^2 - a^2}}{a} = \sqrt{\left(\frac{c}{a}\right)^2 - 1},$$

因此当比值 $\frac{c}{a}$ 越小时， $\frac{b}{a}$ 就越小，从而双曲线越扁.

我们把比值 $e = \frac{c}{a}$ 叫作双曲线的**离心率**.

由于 $c > a > 0$, 因此 $e > 1$.

从上面的讨论知道, e 越小, 双曲线就越扁; e 越大, 双曲线的开口就越开阔.

如果双曲线的实轴长等于虚轴长, 则称它为**等轴双曲线**.



等轴双曲线的离心率是多少? 它的渐近线方程又是什么呢?

例 4 求双曲线 $9x^2 - 4y^2 = 36$ 的实轴长、虚轴长、顶点、离心率以及渐近线方程.

解 把所给的双曲线方程化成标准方程:

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

由此看出, $a=2$, $b=3$, 实轴在 x 轴上. 因此双曲线的实轴长 $2a=4$, 虚轴长 $2b=6$, 顶点是 $A_1(-2, 0)$, $A_2(2, 0)$, 渐近线方程是 $y = \pm \frac{3}{2}x$. 由于

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13},$$

因此离心率为 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{2}$.

例 5 已知双曲线的两个顶点的坐标是 $(0, -4)$, $(0, 4)$, 离心率为 $\frac{3}{2}$, 求双曲线的标准方程.

解 由已知条件得 $a=4$, $e = \frac{3}{2}$, 焦点在 y 轴上,

因此 $c = ae = 4 \cdot \frac{3}{2} = 6$,

从而 $b^2 = c^2 - a^2 = 6^2 - 4^2 = 20$.

因此双曲线的标准方程是

$$\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{20} = 1.$$

例 6 双曲线 $3x^2 - 4y^2 = 12$ 与直线 $x - y - 2 = 0$ 有没有交点？如果有，求出交点.

解 所给双曲线与直线的交点坐标是下述方程组的实数解：

$$\begin{cases} 3x^2 - 4y^2 = 12, & \text{①} \\ x - y - 2 = 0. & \text{②} \end{cases}$$

从②式得

$$y = x - 2. \quad \text{③}$$

代入①式得

$$3x^2 - 4(x - 2)^2 = 12,$$

即

$$x^2 - 16x + 28 = 0. \quad \text{④}$$

容易解出一元二次方程④有两个不等实根：

$$x_1 = 2, x_2 = 14.$$

分别代入③式，得

$$y_1 = 0, y_2 = 12.$$

因此直线 $x - y - 2 = 0$ 与双曲线 $3x^2 - 4y^2 = 12$ 有两个不同的交点：

$$P_1(2, 0), P_2(14, 12).$$

评注 直线与双曲线的位置关系，从图 5.2-7 可以看出有下列几种情形：

情形 1 与双曲线的渐近线不平行且不重合的直线，它与双曲线或者不相交(例如 l_1)，或者有两个不同的(例如 l_2)或重合的交点(例如 l_3)；

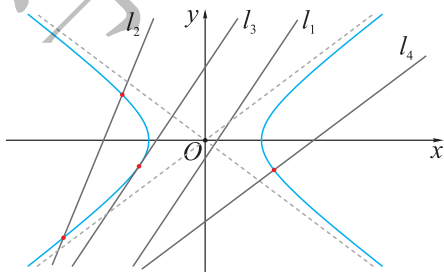


图 5.2-7

情形 2 与双曲线的渐近线平行的直线，它与双曲线恰有一个交点(例如 l_4)；

情形 3 与双曲线的渐近线重合的直线(即双曲线的渐近线)，它与双曲线不相交.

练习

A 组

1. 求满足下列条件的双曲线的标准方程:

(1) 焦点在 x 轴上, 焦距是 8, 双曲线上的点到两焦点的距离之差的绝对值为 6;

(2) $a=4$, 焦点为 $F_1(-5, 0)$, $F_2(5, 0)$;

(3) $a=4$, 焦点为 $F_1(0, -5)$, $F_2(0, 5)$;

(4) $b=2$, 焦点为 $F_1(-3, 0)$, $F_2(3, 0)$.

2. 求下列双曲线的焦点与焦距:

(1) $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$;

(2) $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{18} = 1$.

3. 画出双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ 的图形.

4. 求下列双曲线的实轴长、虚轴长、顶点、离心率以及渐近线方程:

(1) $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{2} = 1$;

(2) $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$;

(3) $5x^2 - 4y^2 = 20$;

(4) $x^2 - y^2 = -9$.

5. 求满足下列条件的双曲线的标准方程:

(1) 实轴长为 8, 两个焦点的坐标分别为 $(-5, 0)$, $(5, 0)$;

(2) 两个顶点的坐标分别为 $(-2, 0)$, $(2, 0)$, 离心率是 $\frac{5}{2}$;

(3) 虚轴长为 6, 两个焦点的坐标分别为 $(0, -4)$, $(0, 4)$.

B 组

1. 求下列双曲线的焦点与焦距:

(1) $14x^2 - 2y^2 = 28$;

(2) $x^2 - y^2 = -1$.

2. 已知双曲线的焦点在 x 轴上, 焦距为 10, 且双曲线经过点 $P(4, 0)$, 求双曲线的标准方程.

3. 已知双曲线的焦点在 x 轴上, 并且经过两点 $M_1(3, 0)$, $M_2(6, 4\sqrt{3})$, 求双曲线的标准方程.

4. 画出双曲线 $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 1$ 的图形.

5. 求满足下列条件的双曲线的标准方程:

(1) 虚轴长为 4, 离心率为 $\frac{5}{3}$, 焦点在 x 轴上;

(2) 焦点为 $F_1(0, -10)$, $F_2(0, 10)$, 离心率为 $\frac{5}{4}$.

6. 下列直线是否与双曲线 $2x^2 - 3y^2 = 6$ 有交点? 如果有, 求出交点.

(1) $x - y - 1 = 0$;

(2) $\sqrt{6}x - 3y + 3 = 0$;

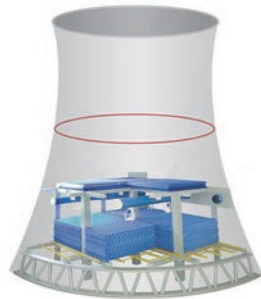
(3) $x - y - 2 = 0$.

7. 下列直线是否与双曲线 $2x^2 - y^2 = 2$ 有交点?

(1) $2x - y - 1 = 0$;

(2) $y = \sqrt{2}x$.

8. 如图, 发电厂的冷却塔被设计成单叶旋转双曲面的形状(双曲线的一部分绕其虚轴所在直线旋转所成的曲面), 可以加强对流, 自然通风. 已知某个冷却塔的最小半径为 12 m, 上口半径为 13 m, 下口半径为 25 m, 高为 55 m. 试建立适当的坐标系求此双曲线的方程.



9. 设双曲线的标准方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$,

c 是半焦距. 我们把直线 $x = \pm \frac{a^2}{c}$ 叫作双曲线的准线. 求

下列双曲线的准线方程:

(1) $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{2} = 1$;

(2) $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$.

5.3 抛物线



观察

一元二次函数 $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) 的图像是一条抛物线.

现实生活中, 抛出的铅球、水池里喷出的水柱, 其在空中运行的轨道是抛物线的一段; 北京颐和园拱桥的纵截面是抛物拱形; 等等.



布达拉宫广场喷泉



颐和园拱桥

如何统一地研究实际生活中出现的各种各样的抛物线?

一

抛物线的标准方程



抽象

经过探索, 我们给出抛物线的定义如下:

平面内与一个定点 F 和一条定直线 l 的距离相等的点的轨迹称为**抛物线**. 这个定点 F 称为抛物线的**焦点**, 定直线 l 称为抛物线的**准线**.

为了研究这样定义的抛物线的图形是什么样子, 以及研究它的性质, 我们要在平面上建立一个适当的直角坐标系, 求出抛物线的方程.

如图 5.3-1, 取过焦点 F 且垂直于准线 l 的直线为 x 轴, x 轴与 l 相交于点 K , 以线段 KF 的垂直平分线为 y 轴, 并且使焦点 F 在 x 轴的正半轴上, 建立直

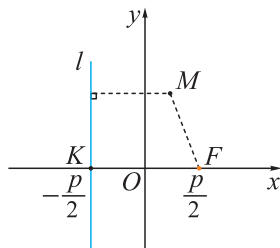


图 5.3-1

角坐标系 xOy . 这个坐标系称为抛物线的一个标准坐标系.

设抛物线的焦点 F 到准线 l 的距离为 p , 则 $|KF| = p$, 焦点 F 的坐标为 $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, 准线 l 的方程为 $x = -\frac{p}{2}$, 即

$$2x + p = 0.$$

点 $M(x, y)$ 在抛物线上

$\Leftrightarrow$ 点 $M(x, y)$ 到 l 的距离等于点 M 到点 F 的距离

$$\Leftrightarrow \frac{|2x + p|}{\sqrt{2^2 + 0^2}} = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2$$

$$\Leftrightarrow y^2 = 2px.$$

因此抛物线的方程是

$$y^2 = 2px \quad (p > 0). \quad (1)$$

方程(1)称为抛物线的**标准方程**, 其中 p 是焦点到准线的距离. 方程(1)表示的抛物线, 焦点在 x 轴的正半轴上, 焦点坐标为 $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, 准线方程是 $x = -\frac{p}{2}$.

用类似的方法可以得出:

如果抛物线的焦点在 x 轴的负半轴上, 焦点坐标为 $\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$, 准线方程为 $x = \frac{p}{2}$, 则抛物线的方程是

$$y^2 = -2px \quad (p > 0). \quad (2)$$

如果抛物线的焦点在 y 轴的正半轴上, 焦点坐标为 $\left(0, \frac{p}{2}\right)$, 准线方程为 $y = -\frac{p}{2}$, 则抛物线的方程是

$$x^2 = 2py \quad (p > 0). \quad (3)$$

如果抛物线的焦点在 y 轴的负半轴上, 焦点坐标为 $\left(0, -\frac{p}{2}\right)$, 准线方程

为 $y = \frac{p}{2}$, 则抛物线的方程是

$$x^2 = -2py (p > 0). \quad (4)$$

方程(2)、(3)、(4)也是抛物线的标准方程.

例 1 已知抛物线的焦点在 x 轴的正半轴上, 并且焦点到准线的距离为 4, 写出抛物线的标准方程.

解 由于 $p=4$, 且焦点在 x 轴的正半轴上, 因此抛物线的标准方程是

$$y^2 = 8x.$$

例 2 求抛物线 $y^2 = 2x$ 的焦点坐标和准线方程.

解 从 $y^2 = 2x$ 看出, $p=1$, 且焦点在 x 轴的正半轴上, 因此焦点坐标为 $(\frac{1}{2}, 0)$, 准线方程为

$$x = -\frac{1}{2}.$$

例 3 已知抛物线的焦点在 y 轴的正半轴上, 并且焦点到准线的距离为 5, 写出抛物线的标准方程.

解 由于 $p=5$, 且焦点在 y 轴的正半轴上, 因此抛物线的标准方程是

$$x^2 = 10y.$$

评注 一元二次函数 $y = ax^2 (a \neq 0)$ 可以变形为

$$x^2 = \frac{1}{a}y. \quad (5)$$

而方程(5)表示一条抛物线, 它的焦点在 y 轴上. 这说明二次函数 $y = ax^2 (a \neq 0)$ 的图像是一条抛物线.

一元二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的图像可以由二次函数 $y = ax^2 (a \neq 0)$ 的图像经过平移得到. 由于平移不改变图形的形状和大小, 因此抛物线在平移下的像仍是抛物线, 从而 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的图像是抛物线.

二 抛物线的性质



探索

我们根据抛物线的定义, 选择适当的直角坐标系得到了抛物线的标准方程

$$y^2 = 2px \quad (p > 0). \quad (1)$$

如何画出方程(1)表示的图形? 如何根据方程(1)研究抛物线的性质?

1. 图形的范围

因为 $p > 0$, 所以 $x = \frac{y^2}{2p} \geq 0$, 这说明抛物线(1)位于 y 轴的右侧(包括原点).

因为 $|y| = \sqrt{2px}$, 所以当 x 从 0 逐渐增大时, $|y|$ 也增大, 这说明抛物线向右上方和右下方无限延伸.

2. 对称性

点 $P(x, y)$ 在抛物线(1)上

$$\Leftrightarrow y^2 = 2px$$

$$\Leftrightarrow (-y)^2 = 2px$$

$\Leftrightarrow$ 点 $P(x, y)$ 关于 x 轴的对称点 $N(x, -y)$ 在抛物线上.

因此抛物线(1)关于 x 轴对称. 但是抛物线(1)关于 y 轴不对称. 抛物线只有一条对称轴. 抛物线没有对称中心.

3. 顶点

在方程(1)中, 令 $y = 0$, 得 $x = 0$, 因此抛物线(1)与 x 轴恰有一个交点, 即原点. 抛物线与它的对称轴的交点称为抛物线的**顶点**. 抛物线(1)有且只有一个顶点, 即原点.

4. 离心率

抛物线上的点与焦点和准线的距离的比, 称为抛物线的**离心率**, 用 e 表示. 根据抛物线的定义可知, 抛物线的离心率 $e = 1$.



想一想: 抛物线 $y^2 = 2px \quad (p > 0)$ 为什么关于 y 轴不对称?



例 4 画出抛物线 $y^2 = 2x$ 的图形.



解 由于抛物线 $y^2 = 2x$ 关于 x 轴对称, 且它位于 y 轴右侧(包括原点),

因此只要先画出抛物线在第一象限及其边界的部分. 它是函数

$$y = \sqrt{2x}, x \in [0, +\infty)$$

的图像. 从上式容易看出, 它是增函数.

列表:

x	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4
y	0	1	1.4	2	2.4	2.8

在平面直角坐标系 xOy 内描出 6 个点, 用一条光滑曲线连接各点, 再利用对称性画出抛物线在第四象限的部分, 如图 5.3-2 所示.

用类似的方法可以画出抛物线 $y^2 = -2x$, $x^2 = 2y$, $x^2 = -2y$ 的图形, 分别如图 5.3-3、图 5.3-4、图 5.3-5 所示.

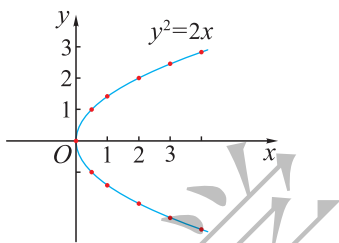


图 5.3-2

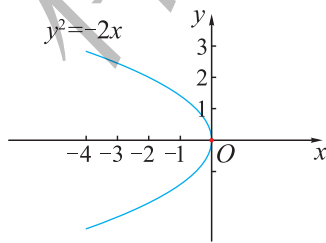


图 5.3-3

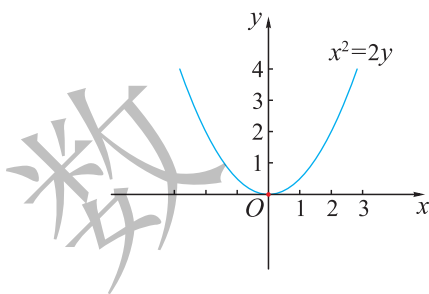


图 5.3-4

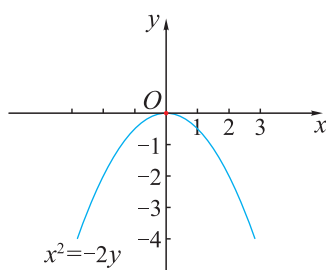


图 5.3-5

例 5 已知抛物线的对称轴为 x 轴, 顶点在原点, 并且经过点 $M(5, -10)$, 求抛物线的方程.

解 由于抛物线的对称轴为 x 轴, 顶点在原点, 且经过点 $M(5, -10)$, 因此抛物线的方程形如 $y^2 = 2px$, 其中 p 待定. 把 $M(5, -10)$ 代入方程

中, 得

$$(-10)^2 = 2p \cdot 5,$$

即

$$2p = 20.$$

因此所求抛物线的方程为

$$y^2 = 20x.$$

例 6 一条隧道顶部的纵截面是抛物拱形. 拱高是 1.1 m, 跨度是 2.2 m, 求拱形的抛物线方程.

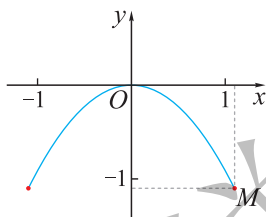


图 5.3-6

解 如图 5.3-6 所示, 建立直角坐标系, 则拱形的抛物线方程形如 $x^2 = -2py$, 其中 p 待定. 由于跨度是 2.2 m, 因此 $x \in [-1.1, 1.1]$; 由于拱高是 1.1 m, 因此抛物线经过点 $M(1.1, -1.1)$. 于是有

$$1.1^2 = -2p(-1.1),$$

解得 $2p = 1.1$. 因此拱形的抛物线方程是

$$x^2 = -1.1y, \quad x \in [-1.1, 1.1].$$

例 7 抛物线 $y^2 = 2x$ 与直线 $x - y - 1 = 0$ 有没有交点? 如果有, 求出交点.

解 所给抛物线与直线的交点坐标是下述方程组的实数解:

$$\begin{cases} y^2 = 2x, & \text{①} \\ x - y - 1 = 0. & \text{②} \end{cases}$$

从②式得

$$x = y + 1, \quad \text{③}$$

代入①式得

$$y^2 = 2(y + 1),$$

即

$$y^2 - 2y - 2 = 0. \quad \text{④}$$

一元二次方程④的判别式为

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times (-2) = 12 > 0,$$

因此一元二次方程④有两个不等实根

$$y_1 = 1 + \sqrt{3}, y_2 = 1 - \sqrt{3}.$$

分别代入③式, 得 $x_1 = 2 + \sqrt{3}, x_2 = 2 - \sqrt{3}.$

因此直线 $x - y - 1 = 0$ 与抛物线 $y^2 = 2x$ 有两个不同的交点:

$$P_1(2 + \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}), P_2(2 - \sqrt{3}, 1 - \sqrt{3}).$$

评注 从图 5.3-7 看出, 与抛物线的对称轴不平行且不重合的直线, 它与抛物线或者不相交(例如 l_1), 或者有两个不同的(例如 l_2)或重合的交点(例如 l_3). 与抛物线的对称轴平行或重合的直线, 它与抛物线恰有一个交点(例如 l_4).

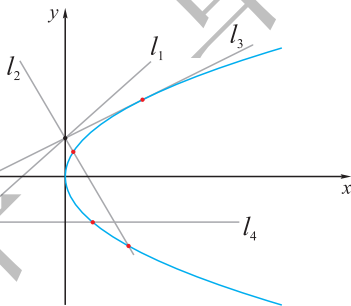


图 5.3-7

三 应用

椭圆、双曲线、抛物线统称为**圆锥曲线**.

圆锥曲线具有丰富的光学性质. 例如, 椭圆具有以下光学性质:

从椭圆的一个焦点发出的光线(或声波), 经过椭圆的反射后, 都集中到另一个焦点上, 如图 5.3-8 所示.

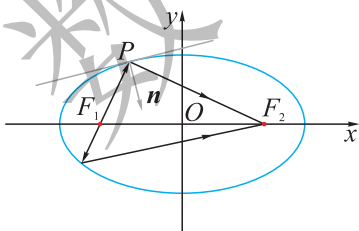


图 5.3-8

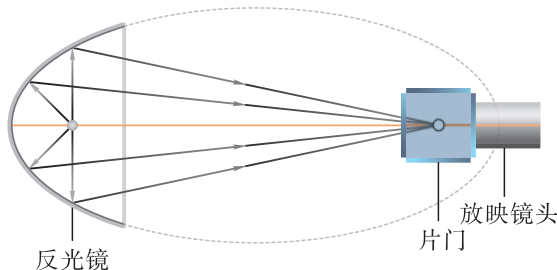


图 5.3-9

利用椭圆的这种光学性质, 人们设计出了电影放映机. 在电影放映机中, 聚光灯的反射镜为旋转椭圆面, 将灯泡安装在椭圆面的焦点位置, 就能使光线经过椭圆面的反射, 汇聚于另一焦点位置的片门处, 获得最强的光线, 如图

5.3-9 所示.

又如, 双曲线具有以下光学性质:

从双曲线的一个焦点发出的光线(或声波), 经过双曲线的反射后, 就好像从另一个焦点发出来的一样, 如图 5.3-10 所示. 人们将双曲线的这种反向虚聚焦的性质, 应用在天文望远镜的设计中, 如图 5.3-11.

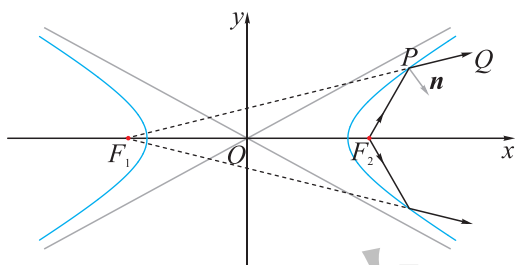


图 5.3-10

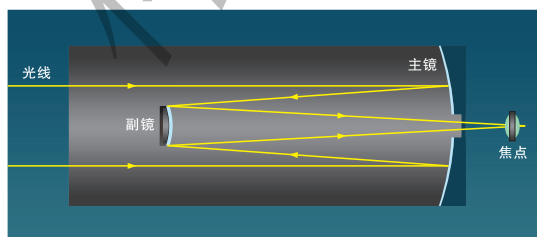


图 5.3-11 哈勃望远镜(其主、副镜均设计成双曲面形状)

同样抛物线也具有以下光学性质:

一个光源放在抛物线的焦点处, 光线经抛物线反射后, 成为平行光束, 如图 5.3-12 所示. 人们利用抛物线的这一光学性质用于设计探照灯和汽车前灯, 设计原理如图 5.3-13 所示.

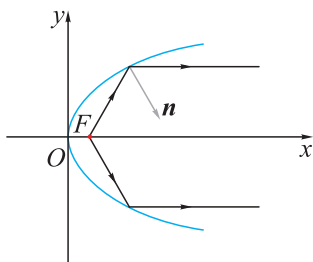


图 5.3-12

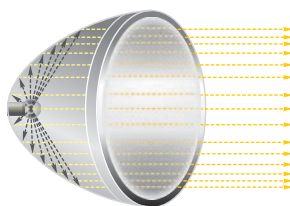


图 5.3-13

反过来,一束平行光线射到抛物线上,经过反射后,都将集中到焦点上,如图 5.3-14 所示.人们将这一性质用于设计射电望远镜.

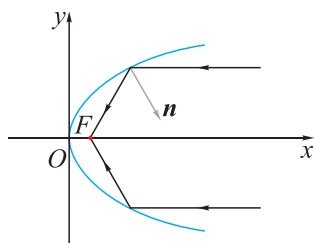
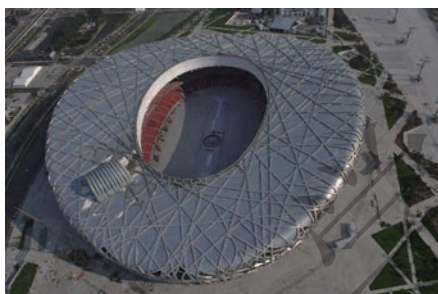


图 5.3-14

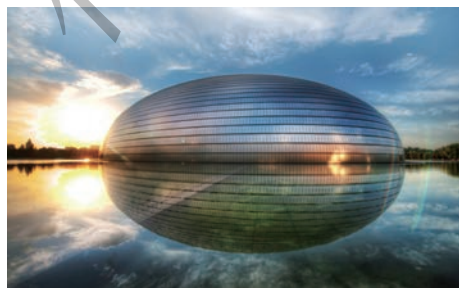


中国天眼——世界最大单口径射电望远镜(FAST 工程)

由于圆锥曲线线型简洁美观而富有张力,同时还具有某些很好的力学性质,故而被建筑设计师们所推崇并采用.例如国家体育场和广州塔.这些曲线优美的现代建筑,会给人带来美的享受.



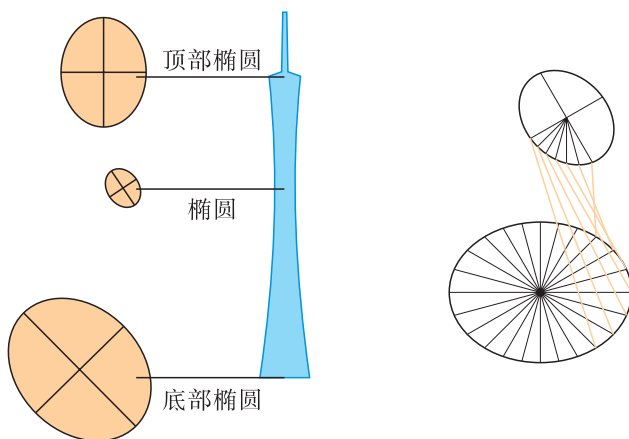
鸟巢(国家体育场)



国家大剧院



广州塔



广州塔结构示意图

练习

A 组

1. 求满足下列条件的抛物线的标准方程.

- (1) 焦点在 x 轴的正半轴上, 焦点到准线的距离是 3;
- (2) 焦点在 y 轴的负半轴上, 焦点到准线的距离是 2;
- (3) 焦点是 $F(-6, 0)$;
- (4) 准线方程是 $y = -8$;
- (5) 焦点是 $F\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

2. 求下列抛物线的焦点坐标和准线方程:

- (1) $y^2 = 7x$;
- (2) $y^2 = -\frac{1}{4}x$;
- (3) $x^2 = 3y$;
- (4) $y = -\frac{1}{2}x^2$.

3. 画出下列抛物线:

- (1) $y^2 = \frac{1}{2}x$;
- (2) $x^2 = -\frac{1}{2}y$.

4. 求满足下列条件的抛物线的方程:

- (1) 对称轴为 x 轴, 顶点在原点, 且经过点 $P(1, -4)$;
- (2) 对称轴为 x 轴, 顶点在原点, 且经过点 $Q\left(-1, \frac{1}{2}\right)$;
- (3) 对称轴为 y 轴, 顶点在原点, 且经过点 $M(-1, 6)$;
- (4) 焦点是 $F(5, 0)$, 顶点在原点;
- (5) 顶点在原点, 准线方程为 $x = 4$;
- (6) 焦点是 $F(2, 0)$, 准线方程为 $x = -2$.

5. 一座抛物线形拱桥, 当拱顶离水面 2 m 时, 水面宽 4 m; 拱桥的跨度是 4.9 m, 求拱桥的纵截面的抛物线方程.

6. 下列直线是否与抛物线 $y^2 = 4x$ 有交点? 如果有, 求出交点.

- (1) $x - y - 1 = 0$;
- (2) $x - y + 1 = 0$;
- (3) $2x - y + 1 = 0$;
- (4) $y = \frac{3}{2}$.



B 组

1. 已知抛物线的焦点在 x 轴的正半轴上, 且经过点 $M(3, -6)$, 求抛物线的标准方程.

2. 已知抛物线的焦点在 y 轴上, 且经过点 $N\left(\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\right)$, 求抛物线的标准方程.

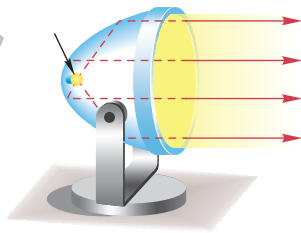
3. 求满足下列条件的抛物线的方程:

(1) 对称轴与坐标轴重合, 顶点在原点, 且经过点 $M(5, 2)$;

(2) 对称轴是 x 轴, 顶点在原点, 焦点到准线的距离为 8.

4. 经过抛物线 $y^2 = 2px$ 的焦点 F , 作 x 轴的垂线和抛物线相交于 P_1, P_2 两点, 求 $|P_1P_2|$.

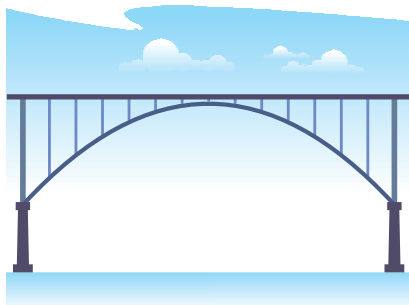
5. 如图所示, 探照灯反射镜由抛物线的一部分绕对称轴旋转而成, 光源位于抛物线的焦点处, 这样可以保证发出的光线经过反射之后平行射出. 已知灯口圆的直径为 60 cm, 灯的深度为 40 cm.



(1) 将反射镜的旋转轴与镜面的交点称为反射镜的顶点. 光源应安置在旋转轴上与顶点相距多远的地方?

(2) 为了使反射的光更亮, 增大反射镜的面积, 将灯口圆的直径增大到 66 cm, 并且保持光源与顶点的距离不变. 求探照灯的深度.

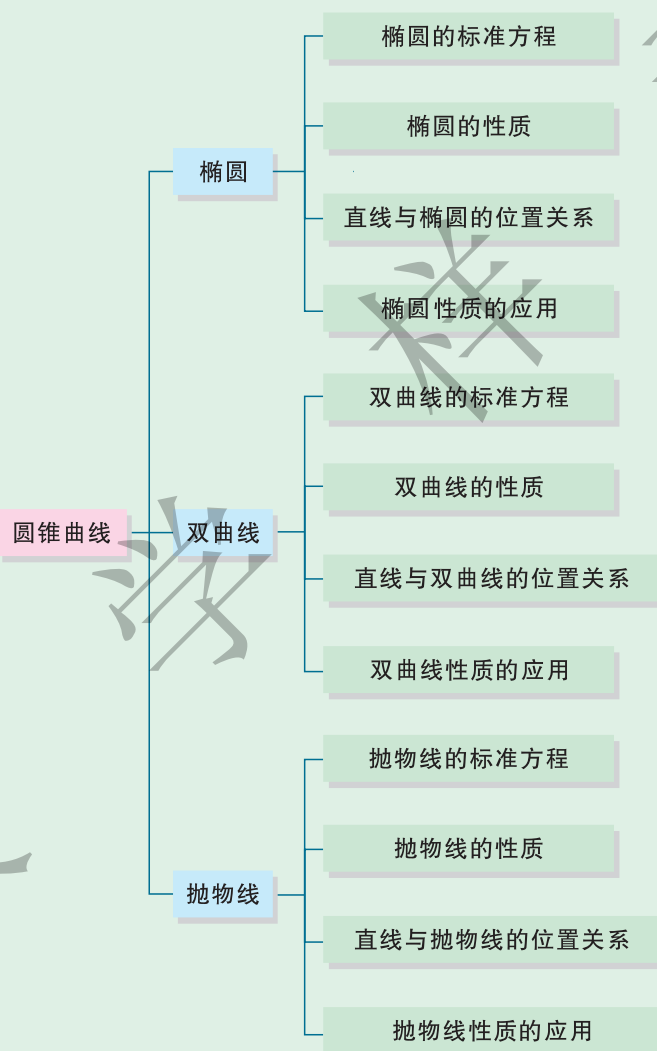
6. 如图, 某大桥中央桥孔的跨度为 20 m, 桥孔上部呈抛物线形, 拱顶距水面 10 m, 桥墩高出水面 4 m. 现有一货轮欲通过此孔, 该货轮水下宽度不超过 18 m. 目前吃水线上部分中央船体高 8 m, 宽 16 m. 若不考虑水下深度, 该货轮在此状况下能否通过桥孔? 试说明理由.



* 7. 经过抛物线 $y^2 = 2px$ 的焦点 F , 且与 x 轴不重合的一条直线与抛物线交于 $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2)$ 两点, 证明: $y_1y_2 = -p^2$.

本章小结

一、本章知识结构



二、本章知识要点

● 椭圆、双曲线和抛物线的定义、标准方程和性质

圆锥曲线	椭圆	双曲线	抛物线
几何条件	与两个定点的距离之和是常数(大于两定点间的距离)	与两个定点的距离之差的绝对值是常数(小于两定点间的距离)	与一个定点和一条定直线的距离相等
标准方程	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$)	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$)	$y^2 = 2px$ ($p > 0$)
图形			
对称轴	x 轴, 长轴长 $2a$ y 轴, 短轴长 $2b$	x 轴, 实轴长 $2a$ y 轴, 虚轴长 $2b$	x 轴
顶点坐标	$(-a, 0), (a, 0)$ $(0, -b), (0, b)$	$(-a, 0), (a, 0)$	$(0, 0)$
焦点坐标	$(-c, 0), (c, 0)$ 其中 $c = \sqrt{a^2 - b^2}$	$(-c, 0), (c, 0)$ 其中 $c = \sqrt{a^2 + b^2}$	$(\frac{p}{2}, 0)$
离心率	$e = \frac{c}{a}$ ($0 < e < 1$)	$e = \frac{c}{a}$ ($e > 1$)	$e = 1$
渐近线	—	$y = \frac{b}{a}x, y = -\frac{b}{a}x$	—
准线	$x = -\frac{a^2}{c}, x = \frac{a^2}{c}$	$x = -\frac{a^2}{c}, x = \frac{a^2}{c}$	$x = -\frac{p}{2}$

● 椭圆、双曲线、抛物线与直线的位置关系

● 椭圆、双曲线、抛物线的光学(声学)性质及其应用

长轴在 y 轴的椭圆, 实轴在 y 轴的双曲线, 对称轴为 x 轴、开口向左的抛物线, 对称轴为 y 轴、开口向上或向下的抛物线: 它们对应的标准方程、图形、对称轴、顶点坐标、焦点坐标、离心率、渐近线或准线, 请自己写出.

复习题五

A 组

1. 求满足下列条件的椭圆的标准方程.

(1) 焦点坐标是 $(-\sqrt{2}, 0)$, $(\sqrt{2}, 0)$, 且经过点 $M\left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right)$;

(2) 焦点在 y 轴上, 短轴长为 6, 离心率为 $\frac{\sqrt{10}}{10}$.

2. 求满足下列条件的双曲线的标准方程:

(1) 焦点坐标是 $(-\sqrt{10}, 0)$, $(\sqrt{10}, 0)$, 且经过点 $N(2\sqrt{3}, 2)$;

(2) 实轴在 y 轴上, 实轴长为 $4\sqrt{3}$, 离心率为 $\frac{\sqrt{7}}{2}$.

3. 求满足下列条件的抛物线的标准方程:

(1) 对称轴是 x 轴, 顶点在原点, 且经过点 $P(3, -3)$;

(2) 顶点在原点, 准线方程为 $y = -3$.

4. 求下列椭圆的顶点、焦点、离心率:

(1) $2x^2 + 3y^2 = 6$;

(2) $3x^2 + 5y^2 - 15 = 0$.

5. 求下列双曲线的顶点、焦点、离心率以及渐近线:

(1) $3x^2 - 2y^2 = 6$;

(2) $4x^2 - 7y^2 = -28$.

6. 求下列抛物线的焦点:

(1) $y^2 = 6x$;

(2) $y = \frac{3}{4}x^2$.

7. 抛物线 $y^2 = 5x$ 与下列直线是否有交点? 如果有, 求出交点.

(1) $y = -3$;

(2) $y = 3x + 7$;

(3) $2x - y - 5 = 0$;

(4) $\sqrt{5}x + 2y + \sqrt{5} = 0$.

8. 画出下列曲线的图形:

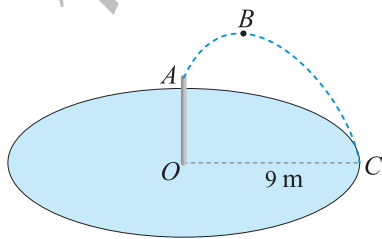
(1) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$;

(2) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1$;

(3) $y^2 = x$.

B 组

1. 求与椭圆 $4x^2 + 9y^2 = 36$ 有公共焦点, 且离心率为 $\frac{3}{2}$ 的双曲线方程.
2. 证明: 从双曲线的一个焦点到一条渐近线的距离等于虚半轴长.
3. 我国发射的人造地球卫星的运行轨道是以地球的中心为一个焦点的椭圆, 近地点距地面 266 km, 远地点距地面 1 826 km, 求这颗卫星的轨道方程.
4. 在相距 2 km 的 F_1, F_2 两哨所, 听到炮弹爆炸声的时间相差 4 s, 已知声速是 340 m/s. 试问: 炮弹爆炸点在什么样的曲线上?
5. 某农场为节水推行喷灌技术, 喷头装在管柱 OA 的顶端 A 处, 喷出的水流在各个方向上呈抛物线状, 如图所示. 现要求水流最高点 B 离地面 5 m, 点 B 到管柱 OA 所在直线的距离为 4 m, 且水流落在地面以 O 为圆心、以 9 m 为半径的圆上, 求管柱 OA 的高度.



(第 5 题)

6. 设 $\triangle ABC$ 的顶点 B, C 的坐标分别为 $(-10, 0), (10, 0)$, 直线 AB 与直线 AC 的斜率的乘积是 $-\frac{1}{3}$, 求顶点 A 的轨迹方程, 并且说出轨迹名称.
7. 设 $\triangle ABC$ 的顶点 B, C 的坐标分别为 $(-5, 0), (5, 0)$, 直线 AB 与直线 AC 的斜率的乘积是 $\frac{1}{2}$, 求顶点 A 的轨迹方程, 并且说出轨迹名称.
8. 在椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 上求一点 P , 使得 $PF_1 \perp PF_2$, 其中 F_1, F_2 是两个焦点.
9. 椭圆 $x^2 + 3y^2 = 3$ 与下列直线是否有交点? 如果有, 求出交点.
 - (1) $3x + y + 2 = 0$;
 - (2) $3x + y + 10 = 0$;

(3) $x - 9\sqrt{6}y - 3 = 0$;

(4) $y = 2x$.

10. 双曲线 $3x^2 - 4y^2 = 12$ 与下列直线是否有交点? 如果有, 求出交点.

(1) $\sqrt{3}x - 2y - 14 = 0$;

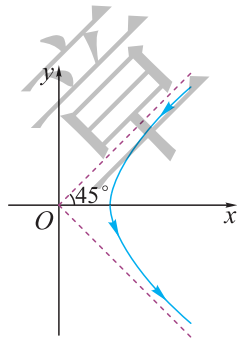
(2) $\sqrt{3}x - 2y = 0$;

(3) $y = 3x$;

(4) $y = 2x + 7$;

(5) $\sqrt{13}x + 4y - 2 = 0$.

11. 1911年5月, 欧内斯特·卢瑟福在《哲学》杂志上发表论文. 在这篇文章中, 他描述了用 α 粒子轰击 $0.000\ 04\text{ cm}$ 厚的金箔时拍摄到的运动情况. 在进行这个实验之前, 卢瑟福希望 α 粒子能够通过金箔, 就像子弹穿过雪一样. 事实上, 有极小部分 α 粒子从金箔上反弹. 右图显示了卢瑟福实验中偏转的 α 粒子遵循双曲线一支的路径.



(第11题)

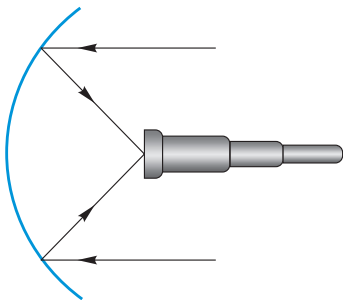
(1) 结合图像, 求出该双曲线的渐近线方程.

(2) 如果 α 粒子路径的顶点距双曲线的中心 10 cm , 试求出该粒子路径所在的曲线方程.

12. 一种卫星接收天线的轴截面如图所示. 卫星波束呈近似平行状态射入轴截面为抛物线的接收天线, 经反射聚集到焦点处. 已知接收天线的口径(直径)为 4.8 m , 深度为 0.5 m .

(1) 试建立适当的坐标系, 求抛物线的标准方程和焦点坐标;

(2) 为了增强卫星波束的接收, 拟将接收天线的口径增大为 5.2 m , 求此时卫星波束反射聚集点的坐标.



(第12题)

数学文化

用数学的思维方式研究圆锥曲线

观察

设两条直线 l_1 与 l_2 相交于一点 O , 直线 l_2 绕直线 l_1 旋转一周所形成的曲面称为圆锥面, 其中直线 l_1 称为圆锥面的轴, 直线 l_2 称为它的一条母线, 直线 l_1 与 l_2 的交点 O 称为它的顶点, 直线 l_1 与 l_2 的不大于 $\frac{\pi}{2}$ 的夹角 θ 称为圆锥面的半顶角, 如图 1 所示. l_2 旋转到任一位置都称为母线, 每一条母线与轴的夹角都等于 θ .

探索

圆锥面与不经过它的顶点 O 的平面 π 的交线有多少种情形?

情形 1 平面 π 与母线 l_2 相交

①平面 π 与轴 l_1 垂直, 如图 1 所示.

此时圆锥面与平面 π 的交线是圆.

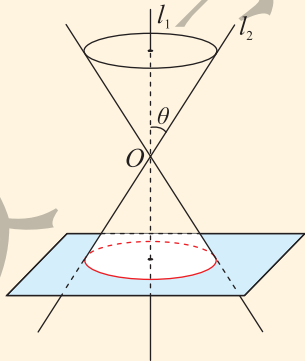


图 1

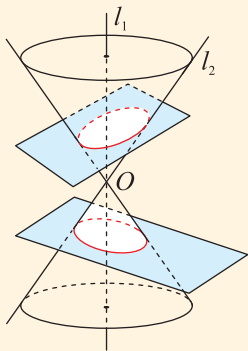


图 2

②平面 π 与轴 l_1 不垂直, 且只与圆锥面的上半部分相交(或者只与圆锥面的下半部分相交), 如图 2 所示. 直观上看, 此时圆锥面与平面 π 的交线是椭圆.

情形2 平面与 π 母线 l_2 相交, 并且平面 π 与圆锥面的上半部分和下半部分都相交, 如图3所示. 直观上看, 猜测圆锥面与平面 π 的交线是双曲线.

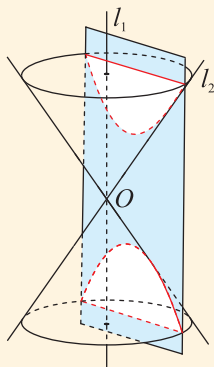


图3

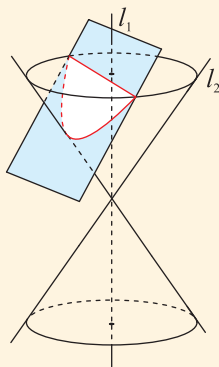


图4

情形3 平面 π 与母线 l_2 平行(即没有公共点), 如图4所示. 直观上看, 猜测圆锥面与平面 π 的交线是抛物线.

论证

我们在《数学·基础模块下册》第7章7.2节讲空间图形的画法时, 引进了 x 轴, y 轴, z 轴. 这实际上是引进了空间直角坐标系 $O-xyz$, 其中 x 轴, y 轴, z 轴两两垂直. 用 e_1, e_2, e_3 分别表示 x 轴, y 轴, z 轴的单位向量, 并且方向为 x 轴, y 轴, z 轴正向, 则与平面向量分解定理类似, 有空间向量分解定理, 即任一向量 c 可以唯一地表示成

$$c = xe_1 + ye_2 + ze_3.$$

我们把 (x, y, z) 称为 c 在基 e_1, e_2, e_3 下的直角坐标, 设 a, b 的直角坐标分别为 $(a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3)$, 可以证明空间向量的内积具有平面向量内积一样的4条性质, 因此

$$a \cdot b = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

从向量的内积的定义可得出:

$$|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2},$$

$$a \perp b \Leftrightarrow a \cdot b = 0$$

$$\Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0.$$

以圆锥面的轴为 z 轴, 以顶点 O 为原点, 以 l_2 与 l_1 所在的平面为 yOz 平面建立直角坐标系 $Oxyz$, 如图 5 所示.

设圆锥面的半顶角为 θ , 则

点 $M(x, y, z)$ (其中点 M 不为原点) 在圆锥面上

$$\Leftrightarrow \langle \overrightarrow{OM}, \mathbf{e}_3 \rangle = \theta \text{ 或 } \pi - \theta$$

$$\Leftrightarrow |\cos \langle \overrightarrow{OM}, \mathbf{e}_3 \rangle| = \cos \theta$$

$$\Leftrightarrow \frac{|\overrightarrow{OM} \cdot \mathbf{e}_3|}{|\overrightarrow{OM}| |\mathbf{e}_3|} = \cos \theta$$

$$\Leftrightarrow \frac{|x \cdot 0 + y \cdot 0 + z \cdot 1|}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \cos \theta$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cos \theta = |z|$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2 + z^2) \cos^2 \theta = z^2$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \theta \cdot x^2 + \cos^2 \theta \cdot y^2 + (\cos^2 \theta - 1) z^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \theta \cdot x^2 + \cos^2 \theta \cdot y^2 - \sin^2 \theta \cdot z^2 = 0.$$

因此这个圆锥面的方程为

$$\cos^2 \theta \cdot x^2 + \cos^2 \theta \cdot y^2 - \sin^2 \theta \cdot z^2 = 0. \quad (1)$$

设平面 π 经过点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, 与平面 π 垂直的一个非零向量 $\mathbf{n}$ 的直线坐标为 (A, B, C) . 由于 $\mathbf{n}$ 与平面 π 上的任一向量都垂直, 因此

点 $M(x, y, z)$ 在平面 π 上

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \cdot \mathbf{n} = 0$$

$$\Leftrightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow Ax + By + Cz - (Ax_0 + By_0 + Cz_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow Ax + By + Cz + D = 0,$$

其中 $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$.

因此, 平面 π 的方程为

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (2)$$

其中 A, B, C 不全为 0.

若平面 π 不经过原点 O , 则平面 π 的方程(2)中的 $D \neq 0$.

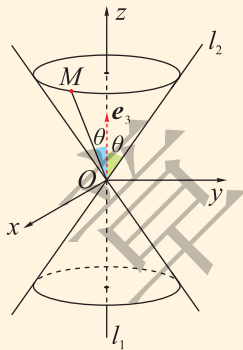


图 5

上述圆锥面与不经过顶点 O 的平面 π 的交点坐标是下述方程组的实数解:

$$\begin{cases} \cos^2\theta \cdot x^2 + \cos^2\theta \cdot y^2 - \sin^2\theta \cdot z^2 = 0, \\ Ax + By + Cz + D = 0. \end{cases} \quad (3)$$

由于 A, B, C 不全为 0, 因此把(3)式的第二个方程代入第一个方程可得到两个未知量的二次方程.

作直角坐标变换, 即转轴和移轴, 使得在新的直角坐标系 $\tilde{O}\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$ 中, 平面 π 为 $\tilde{x}\tilde{O}\tilde{y}$ 面, 与平面 π 垂直的单位向量为 $\tilde{z}$ 轴的 $\tilde{e}_3$. 于是圆锥面与平面 π 的交点在 $\tilde{O}\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$ 中的坐标是 $\tilde{x}$ 和 $\tilde{y}$ 的二次方程的解, 因此圆锥面与平面 π 的交线是 $\tilde{x}\tilde{O}\tilde{y}$ 面上的二次曲线.

数学上可以证明平面上的二次曲线有且只有 9 类:

- | | |
|----------|----------------|
| ①椭圆; | ②虚椭圆(无轨迹); |
| ③一个点; | ④双曲线; |
| ⑤一对相交直线; | ⑥抛物线; |
| ⑦一对平行直线; | ⑧一对虚平行直线(无轨迹); |
| ⑨一对重合直线. | |

因此圆锥面与不经过它的顶点的平面的交线有且只有 3 种情形: 在情形 1 中是椭圆(包括圆), 在情形 2 中是双曲线, 在情形 3 中是抛物线. 从而把椭圆(包括圆)、双曲线、抛物线统称为圆锥曲线.

我们用数学的思维方式圆满地、严谨地解决了什么是圆锥曲线这个问题.