



“十四五”职业教育国家规划教材
(中等职业学校公共基础课程教材)

数学

拓展模块一

下册

CTS



湖南科学技术出版社



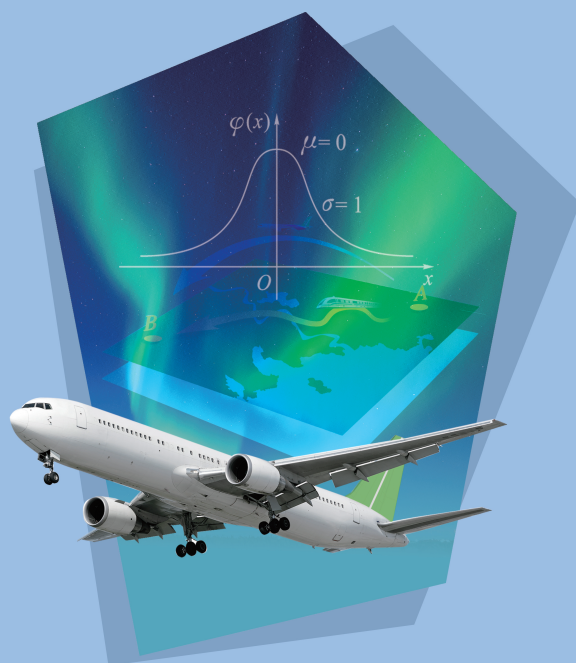
“十四五”职业教育国家规划教材
(中等职业学校公共基础课程教材)

数学

SHUXUE

拓展模块一 下册

丘维声 主编

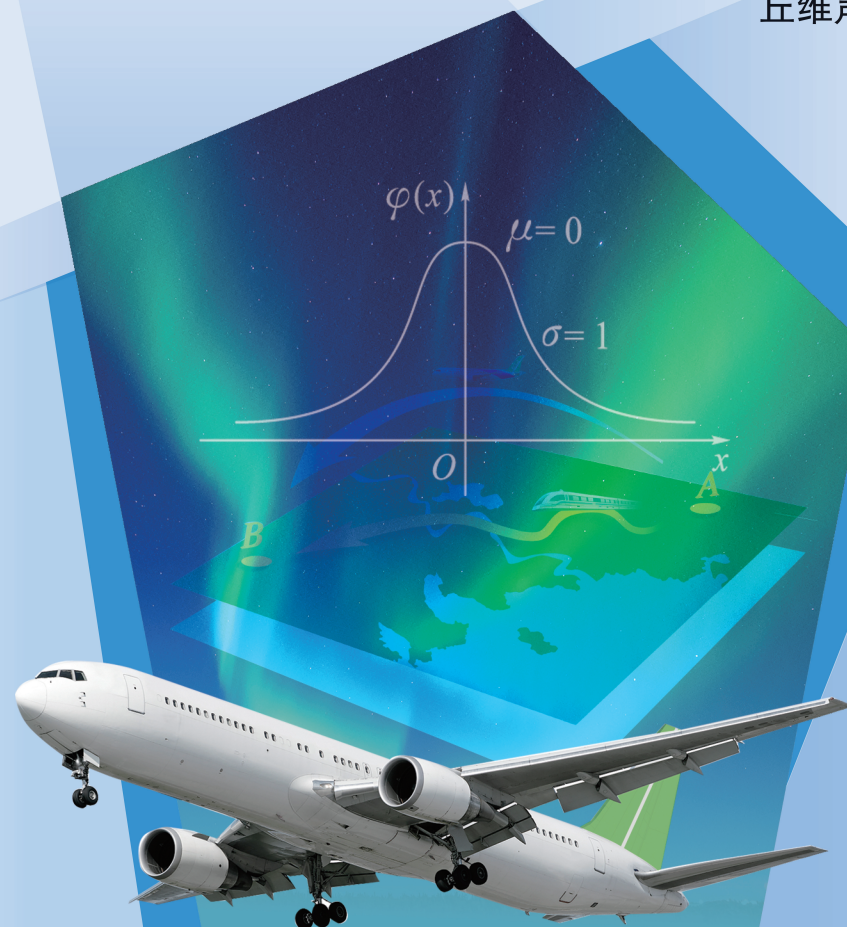


责任编辑: 邹楚林 李漫溢 袁 军
责任美编: 殷 健

ISBN 978-7-5710-1505-3



定价: 26.71 元



CTS | 湖南科学技术出版社

目录

CONTENTS

第6章 立体几何 1

6.1 平面的基本性质	3
6.2 两条直线的位置关系	8
6.3 两条异面直线所成的角，异面直线垂直的判定	11
6.4 直线与平面的位置关系，直线与平面平行的判定和性质	16
6.5 直线与平面垂直的判定和性质	21
6.6 直线与平面所成的角	27
6.7 两个平面的位置关系，平面与平面平行的判定和性质	33
6.8 二面角·平面与平面垂直的判定和性质	38
本章小结	45
复习题六	46

第7章 复数 48

7.1 复数的概念	50
7.2 复数的运算	53
7.3 复数的几何表示	60
7.4 复数的应用	66
本章小结	69
复习题七	70

第8章 排列组合 72

8.1 分类计数原理与分步计数原理	74
-------------------------	----

8.2 排 列	78
8.3 组 合	83
8.4 组合数的性质	88
8.5 排列组合的应用	91
8.6 二项式定理	94
本章小结	98
复习题八	99

第9章 随机变量及其分布 101

9.1 离散型随机变量及其分布	103
9.2 二项分布	114
9.3 正态分布	123
本章小结	132
复习题九	134

第10章 统 计 137

10.1 用样本估计总体	139
10.2 一元线性回归	150
数学实验 用数学软件 Mathematica 求一元线性回归方程	161
本章小结	162
复习题十	164
数学文化 中华璀璨文化使我们学好概率与统计	166

附表 标准正态分布 171



第6章

立体几何

本章结构

- 6.1 平面的基本性质
- 6.2 两条直线的位置关系
- 6.3 两条异面直线所成的角，异面直线垂直的判定
- 6.4 直线与平面的位置关系，直线与平面平行的判定和性质
- 6.5 直线与平面垂直的判定和性质
- 6.6 直线与平面所成的角
- 6.7 两个平面的位置关系，平面与平面平行的判定和性质
- 6.8 二面角·平面与平面垂直的判定和性质

学以致用

由现实空间抽象出几何空间. 几何空间是由点组成的集合. 经过几何空间中任意给定的两个不同的点, 有且只有一条直线. 经过不在同一条直线上的三点, 有且只有一个平面. 点、直线、平面是几何空间中最基本的要素.

几何空间中两条直线的位置关系有且只有 4 种情形: (1) 重合(有两个不同的公共点, 从而有无穷多个公共点); (2) 相交(有且只有一个公共点); (3) 平行(在同一个平面内, 且没有公共点); (4) 异面(不在任何一个平面内, 从而没有公共点). 我们给出了异面直线的判定方法, 给出了平行关系的传递性, 给出了两条异面直线所成的角的定义, 给出了异面直线垂直的判定方法.

几何空间中直线与平面的位置关系有且只有 3 种情形: (1) 直线在平面内(有两个公共点, 从而直线上所有点都在平面内); (2) 直线与平面相交(有且只有一个公共点); (3) 直线与平面平行(没有公共点). 我们给出了直线与平面平行的判定方法, 给出了直线与平面平行的性质; 给出了直线与平面垂直的定义, 证明了直线与平面垂直的判定定理和性质定理, 给出了直线与平面所成的角的定义.

几何空间中两个平面的位置关系有且只有 3 种情形: (1) 两个平面平行(没有公共点); (2) 两个平面相交(所有公共点位于一条直线上); (3) 两个平面重合(有 3 个公共点不在一条直线上, 从而它们的所有点都是公共点). 我们给出了两个平面平行的判定定理和性质定理, 给出了二面角及其平面角的定义, 给出了两个平面所成的角的定义, 证明了两个平面垂直的判定定理和性质定理.

这一章是立体几何的理论基础.

6.1 平面的基本性质



观察

现实世界中有各种形状的物体，如果只考虑形状和大小，我们可以由这些物体抽象出许多常见图形，如图 6.1-1 所示.

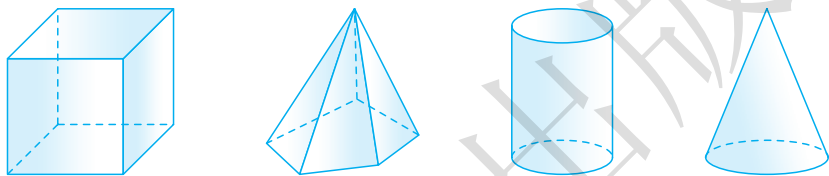


图 6.1-1

这些图形都是由点、线、面构成的.



抽象

点是空间的最基本的要素. 空间可以看成是由点组成的集合, 记作 U . 空间中任何一个图形都可以看成是由一些点组成的集合, 因此它们可以看成是 U 的子集.

直线也是空间的基本要素. 两条直线如果作为 U 的子集是相等的, 则称这两条直线**重合**.

经过空间中任意给定的两个不同的点, 有且只有一条直线. 这个结论也可以说成空间中两个不同的点确定一条直线.

当我们说“有且只有一条直线”或“确定一条直线”时, 都是把重合的直线看成一条直线.

静止的水面、课桌面、黑板面、教室的地面等等, 它们有一个共同的特征: 平坦、没有起伏. 由大量这样的实际例子抽象出**平面**的概念, 它是平坦而且可以无限伸展的图形, 并且没有厚度. 平面是空间的又一个基本要素, 平面通常

用小写希腊字母 $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ 来表示.

为了直观形象, 我们通常画平行四边形来表示平面, 如图 6.1-2 所示.

研究空间图形性质的基本方法是: 把人们经过长期实践总结出来的有关平面、直线、点的最基本的性质作为**公理**, 然后从这些公理出发, 经过逻辑推理, 揭示空间图形的性质.

“空间中两个不同的点确定一条直线”就是一条公理.



图 6.1-2



探索

把一根拉紧的细绳的两端固定在桌面上, 这根绳子和桌面有什么关系?
这根绳子紧贴在桌面上.

由大量类似这样的事实总结出平面的一条基本性质, 即

公理 1 如果一条直线上的两点在一个平面内, 那么这条直线上的所有点都在这个平面内.

此时称**直线在平面内**或**平面经过直线**, 如图 6.1-3 所示.

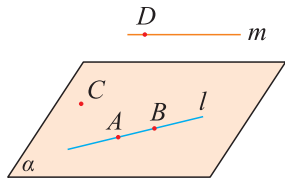


图 6.1-3

平面和直线都是空间 U 的子集. 如图 6.1-3, 直线 l 在平面 α 内, 记作 $l \subset \alpha$; 直线 m 不在平面 α 内, 记作 $m \not\subset \alpha$. 点 A 在直线 l 上, 记作 $A \in l$; 点 C 不在直线 l 上, 记作 $C \notin l$. 点 A 在平面 α 内, 记作 $A \in \alpha$; 点 D 不在平面 α 内, 记作 $D \notin \alpha$.

两个平面如果作为空间 U 的子集是相等的, 则称这两个平面**重合**.

拿一块硬纸板立在桌面上, 那么硬纸板和桌面的所有公共点位于同一条直线上. 从大量类似这样的事实总结出平面的另一条基本性质:

公理 2 如果两个不重合的平面有一个公共点, 那么它们的所有公共点组成的集合是过该点的一条直线.

此时称这两个平面**相交**, 把所有公共点组成的直线叫作**交线**, 如图 6.1-4 所示. 为了使图形的立体感强一些, 一个平面被另一个平面遮住的部分, 相应的线段画

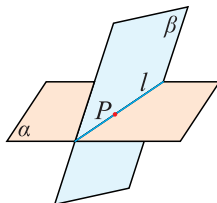


图 6.1-4

成虚线或者不画.

平面 α 与平面 β 相交, 交线是 l , 记作 $\alpha \cap \beta = l$.



画相交平面时,
一定要画出交线.

在桌面上要放几颗图钉(尖朝上)才能架起一块硬纸板?

如果在桌面上只放一颗或两颗图钉(尖朝上), 那么很难把一块硬纸板架起, 而且也架不稳. 如果在桌面上放置三颗图钉(尖朝上)而且它们不在一条直线上, 那么很容易架起一块硬纸板, 并且架得很稳.

从大量类似这样的事实总结出如下结论:

公理 3 经过不在同一条直线上的三点, 有且只有一个平面.

“有且只有一个平面”也可以说成“确定一个平面”, 于是公理 3 也可以说成不共线的三点确定一个平面, 如图 6.1-5 所示.

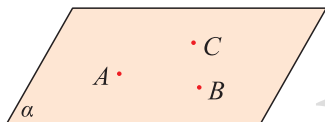


图 6.1-5

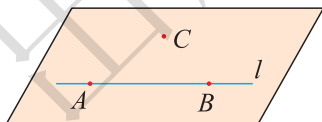


图 6.1-6

过不共线三点 A, B, C 的平面也可以记成平面 ABC .

当我们说“有且只有一个平面”或“确定一个平面”时, 都是把重合的平面看成一个平面.

如图 6.1-6 所示, 由公理 3 可以得出:

推论 1 经过一条直线和这条直线外的一点, 有且只有一个平面.

如图 6.1-7 所示, 由推论 1 得出:

推论 2 经过两条相交直线, 有且只有一个平面.



公理 3 的唯一性
可以由公理 2 推导出.

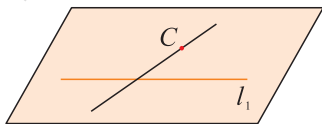


图 6.1-7

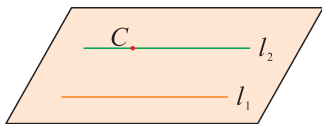


图 6.1-8

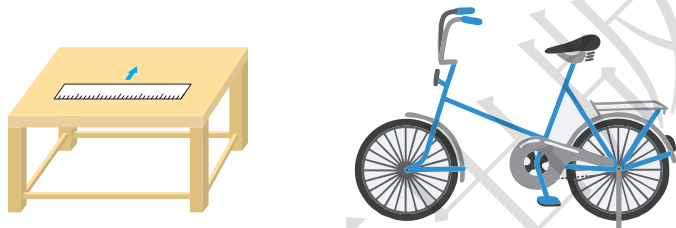
根据平行公理“空间中, 过直线外一点有且只有一条直线和这条直线平行”, 可以得出: “给了两条平行直线”等价于“给了一条直线和这条直线外的一点”, 如图 6.1-8 所示. 因此从推论 1 得出:

推论 3 经过两条平行直线，有且只有一个平面。

如果几个点(或几条直线)在同一个平面内，则称这些点(或这些直线)**共面**；否则称它们**不共面**。

如何用一把直尺来检查课桌面是否平坦？

用一把直尺沿着两个不同的方向平移，每次平移都使得它上面有两个点贴着课桌面，检查直尺的其他所有点是否都贴着课桌面。如果是，那么课桌面平坦；否则，课桌面不平坦。这样做的理论依据是公理 1 和推论 2。



有不少自行车的后轮旁只安装一只撑脚，就能立得稳，这是什么道理？

自行车的前轮、后轮分别与地面有一个接触点，添上撑脚与地面的这一个接触点，共有不在同一条直线上的三个点，它们确定一个平面，从而自行车立得稳。

例 证明：两两相交且不过同一个点的三条直线共面。

已知：如图 6.1-9 所示，三条直线两两相交，交点分别为 A ， B ， C 。

求证：直线 AB ， BC ， AC 共面。

证明 由于相交直线 AB 与 BC 确定一个平面 α ，

于是点 $A \in \alpha$ ，且点 $C \in \alpha$ ，

从而直线 $AC \subset \alpha$ 。

因此直线 AB ， BC ， AC 共面。

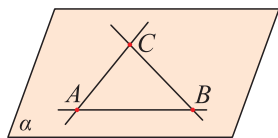


图 6.1-9

?
为什么要限定
“不过同一个点”？

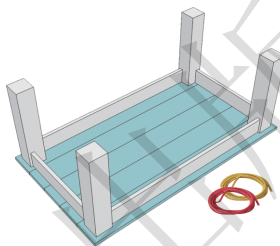
练习

A 组

1. 画出有公共点的两个平面.
2. 如果线段 AB 在平面 α 内, 那么直线 AB 是否在平面 α 内? 为什么?
3. 在用水泥制作盖房子用的预制板时, 如何保证预制板的表面平坦没有起伏? 这种做法的理论根据是什么?
4. 照相机为什么要用三脚架来支撑? 用两脚架支撑行不行?



(第4题)



(第5题)

5. 怎样用两根细绳来检查一张桌子的四条腿的底部是否在同一个平面内?
6. 三角形、平行四边形是否一定是平面图形? 为什么?

B 组

1. 判断下列命题的真假:
 - (1) 平面 α 和 β 只有一个公共点;
 - (2) 过一条直线的平面有无穷多个;
 - (3) 任意三点确定一个平面.
2. 梯形是否一定是平面图形? 为什么?
3. 证明: 如果一条直线与两条平行直线都相交, 那么这三条直线共面.
4. 过已知直线外一点与这条直线上的三点分别画三条直线. 证明: 这三条直线共面.
5. 设四点 A, B, C, D 不共面, 说明其中任意三点都不共线.
6. 三条直线两两平行, 但不共面, 它们可以确定几个平面?

6.2 两条直线的位置关系



观察

如图 6.2-1 所示, 长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中下列各对线段所在直线的位置关系如何?

- (1) AB 与 AD ;
- (2) AB 与 DC ;
- (3) AB 与 D_1D .

显然, 直线 AB 与 AD 相交于点 A , 直线 AB 与直线 DC 平行.

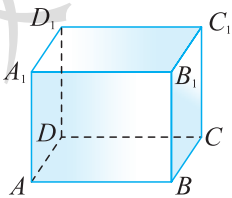


图 6.2-1

直观上看, 直线 AB 与直线 D_1D 不在同一个平面内. 这可以得到证明: 假如直线 AB 与 D_1D 在同一个平面内, 那么这个平面经过直线 AB 和点 D . 而经过直线 AB 和点 D 的平面只有一个, 即平面 $ABCD$, 于是直线 D_1D 在平面 $ABCD$ 内, 从而顶点 D_1 在平面 $ABCD$ 内, 与题设矛盾. 因此直线 AB 与 D_1D 不在同一个平面内.

如果两条直线不同在任何一个平面内, 那么称它们为**异面直线**.

两条异面直线一定没有公共点. 这是因为: 假如它们有且只有一个公共点, 那么它们相交, 从而它们在同一个平面内, 矛盾; 假如它们有两个不同的公共点, 那么它们重合, 从而也在同一个平面内, 矛盾. 所以它们没有公共点.

在上述例子中, 直线 AB 与 D_1D 是异面直线.



抽象

空间中两条直线的位置关系有且只有下列 4 种情形:

- (1) **重合**——有两个不同的(从而有无穷多个)公共点;
- (2) **相交**——有且只有一个公共点;

(3) **平行**——在同一个平面内且没有公共点；

(4) **异面**——不同在任何一个平面内(从而没有公共点).

如何判别两条直线是否为异面直线呢?

在上面的例子中, 直线 AB 与 D_1D 是异面直线, 观察这一对直线的特点, 猜想出下述命题, 并且可以证明这个命题为真.

命题 1 平面内一点与平面外一点的连线, 与平面内不经过该点的直线是异面直线.

已知: 平面 α 内一条直线 l_1 , 点 $A \in \alpha$, 且 $A \notin l_1$, 点 $B \notin \alpha$, 如图 6.2-2 所示.

求证: 直线 AB 与 l_1 是异面直线.

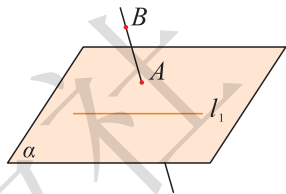


图 6.2-2

证明 假如直线 AB 与 l_1 在同一个平面内, 那么这个平面经过直线 l_1 和点 A , 而经过 l_1 和点 A 的平面只有一个, 即平面 α , 因此直线 $AB \subset \alpha$, 从而点 $B \in \alpha$, 这与已知 $B \notin \alpha$ 矛盾. 所以直线 AB 与 l_1 是异面直线.

例 1 在图 6.2-1 所示的长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 下列各对线段所在直线是否为异面直线?

(1) A_1A 与 BC ; (2) B_1B 与 D_1C_1 .

解 (1) BC 在平面 $ABCD$ 内, 点 $A \in$ 平面 $ABCD$, 点 $A \notin BC$, 点 $A_1 \notin$ 平面 $ABCD$, 因此根据命题 1 得, A_1A 与 BC 是异面直线.

(2) $D_1C_1 \subset$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$, $B_1 \in$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$, $B_1 \notin D_1C_1$, $B \notin$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$, 因此根据命题 1 得, B_1B 与 D_1C_1 是异面直线.

根据初中数学知识可知, 在同一平面内, 如果两条不重合的直线都和第三条直线平行, 那么这两条直线平行.

空间中的直线也有类似的结论:

命题 2 平行于同一条直线的两条不重合的直线平行.

命题 2 称为**平行关系的传递性**.



命题 2 的证明放在 6.4 节后面的“阅读材料”中.

例 2 在图 6.2-1 所示的长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 直线 D_1C_1 与

直线 AB 平行吗? 为什么?

解 由于四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 是平行四边形, 因此 $D_1C_1 \parallel A_1B_1$.

由于四边形 ABB_1A_1 是平行四边形, 因此 $AB \parallel A_1B_1$.

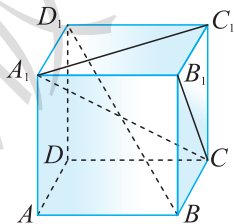
于是根据命题 2 得, $D_1C_1 \parallel AB$.

练习

A 组

1. 说出如图所示的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中各对线段所在直线的位置关系:

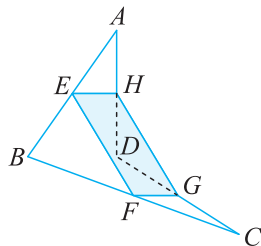
- | | |
|-----------------------|-------------------------|
| (1) AB 和 CC_1 ; | (2) A_1C 和 BD_1 ; |
| (3) A_1A 和 CB_1 ; | (4) A_1C_1 和 CB_1 ; |
| (5) A_1B_1 和 DC ; | (6) BD_1 和 DC . |



(第 1 题)

2. 在一块长方体形状的木块的上底面内有一点 P , 过点 P 画一条直线与下底面的一条边平行, 应如何画?

3. 设四边形 $ABCD$ 是空间四边形(四个顶点不共面的四边形), E, F, G, H 分别是边 AB, BC, CD, DA 的中点, 如图所示. 证明: 四边形 $EFGH$ 是平行四边形.



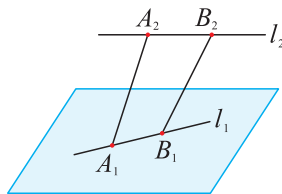
(第 3 题)

B 组

1. 判断下列命题的真假:

- (1) 如果两条直线没有公共点, 则它们平行;
- (2) 如果两条直线分别在两个平面内, 则它们异面;
- (3) 设直线 l_1 在平面 α 内, 而直线 l_2 不在平面 α 内, 则 l_1 与 l_2 异面.

2. 设 l_1 与 l_2 是异面直线, 点 A_1, B_1 是 l_1 上两个不同的点, 点 A_2, B_2 是 l_2 上两个不同的点, 如图所示. 证明: 直线 A_1A_2 与直线 B_1B_2 是异面直线.



(第 2 题)

3. 设 l_1 与 l_2 是异面直线, 直线 l 与 l_1 平行, 且 l 与 l_2 不相交. 证明: l 与 l_2 是异面直线.

6.3 两条异面直线所成的角， 异面直线垂直的判定



探索

如图 6.3-1 所示，在棱长为 1 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，由于 $AB \subset$ 平面 ABB_1A_1 ， $A_1 \in$ 平面 ABB_1A_1 ， $A_1 \notin AB$ ， $D_1 \notin$ 平面 ABB_1A_1 ，因此根据 6.2 节的命题 1 得， A_1D_1 与 AB 是异面直线。

如何定义两条异面直线所成的角呢？

在图 6.3-1 所示的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，因为在 AB 上取一点 A ， $AD \parallel A_1D_1$ ，所以我们将 AD 与 AB 的夹角称为 A_1D_1 与 AB 所成的角，它等于 $\frac{\pi}{2}$ 。

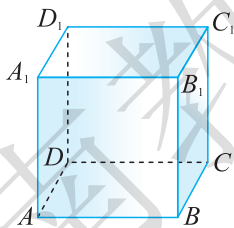


图 6.3-1

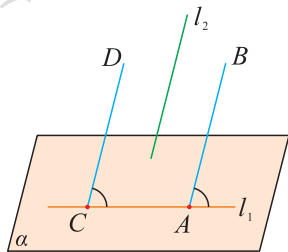


图 6.3-2

由这个例子受到启发，我们引出下述定义：

定义 1 设 l_1 与 l_2 是异面直线，在 l_1 上取一点 A ，过点 A 有且只有一条直线 AB 与 l_2 平行(根据平行公理)，我们把 AB 与 l_1 的夹角中不大于 $\frac{\pi}{2}$ 的那个角称为 l_1 与 l_2 所成的角，如图 6.3-2 所示。

注意：如果在 l_1 上取另一个点 C ，过点 C 有且只有一条直线 CD 与 l_2 平行。根据平行关系的传递性得， $CD \parallel AB$ 。根据“两直线平行，同位角相等”可知， CD 与 l_1 所成的角等于 AB 与 l_1 所成的角。因此按照上述定义得到的异面直线 l_1 与 l_2 所成的角是唯一的。

例 1 如图 6.3-3 所示, 在棱长为 1 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 判断下列各对线段所在的直线是否为异面直线, 并求每一对直线所成的角.

- (1) AB 与 B_1C_1 ; (2) AB_1 与 DD_1 ;
(3) BC_1 与 AD ; (4) AB_1 与 BC_1 .

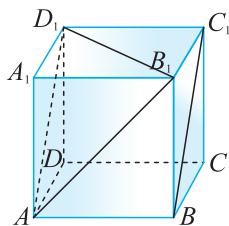


图 6.3-3

解 (1) 由于 $AB \subset$ 平面 ABB_1A_1 , $B_1 \in$ 平面 ABB_1A_1 , $B_1 \notin AB$, $C_1 \notin$ 平面 ABB_1A_1 ,

因此根据 6.2 节的命题 1 得, AB 与 B_1C_1 是异面直线.

在 AB 上取一点 B , 由于 $BC \parallel B_1C_1$, AB 与 BC 的夹角是 $\frac{\pi}{2}$,

因此根据定义 1 得, AB 与 B_1C_1 所成的角是 $\frac{\pi}{2}$.

(2) 由于 $DD_1 \subset$ 平面 ADD_1A_1 , $A \in$ 平面 ADD_1A_1 , $A \notin DD_1$, $B_1 \notin$ 平面 ADD_1A_1 , 因此根据 6.2 节的命题 1 得, AB_1 与 DD_1 是异面直线.

在 AB_1 上取一点 A , 由于 $AA_1 \parallel DD_1$, AA_1 与 AB_1 的夹角 $\angle A_1AB_1 = \frac{\pi}{4}$,

因此根据定义 1 得, AB_1 与 DD_1 所成的角是 $\frac{\pi}{4}$.

(3) 由于 $AD \subset$ 平面 $ABCD$, $B \in$ 平面 $ABCD$, $B \notin AD$, $C_1 \notin$ 平面 $ABCD$, 因此根据 6.2 节的命题 1 得, BC_1 与 AD 是异面直线.

在 BC_1 上取一点 B , 由于 $BC \parallel AD$, BC 与 BC_1 的夹角 $\angle CBC_1 = \frac{\pi}{4}$,

因此根据定义 1 得, BC_1 与 AD 所成的角是 $\frac{\pi}{4}$.

(4) 由于 $AB_1 \subset$ 平面 ABB_1A_1 , $B \in$ 平面 ABB_1A_1 , $B \notin AB_1$, $C_1 \notin$ 平面 ABB_1A_1 , 因此根据 6.2 节的命题 1 得, AB_1 与 BC_1 是异面直线.

在 AB_1 上取一点 A , 由于 $AB \parallel D_1C_1$, 且 $AB = D_1C_1$, 因此四边形 ABC_1D_1 是平行四边形, 从而 $AD_1 \parallel BC_1$. 连接 B_1D_1 , 由于 $AB_1 = AD_1 = B_1D_1$, 因此 $\triangle AB_1D_1$ 是等边三角形. 于是 AD_1 与 AB_1 的夹角 $\angle D_1AB_1 = \frac{\pi}{3}$.

因此根据定义 1 得, AB_1 与 BC_1 所成的角是 $\frac{\pi}{3}$.



抽象

定义 2 如果两条异面直线所成的角为 $\frac{\pi}{2}$, 那么称这两条异面直线互相垂直.

例如, 在图 6.3-3 所示的棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 根据本节开头所说的, 异面直线 A_1D_1 与 AB 互相垂直; 根据例 1 的(1)小题, 异面直线 AB 与 B_1C_1 互相垂直, 相交直线 AB 与 AD 也互相垂直.

从这些例子中可以看到, 空间中互相垂直的两条直线可能是相交直线, 也可能是异面直线(它们不相交).

例 2 如图 6.3-4 所示, 在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 线段 D_1B 所在直线与线段 AC 所在直线是否为异面直线? 是否垂直?

解 由于 $AC \subset$ 平面 $ABCD$, $B \in$ 平面 $ABCD$, $B \notin AC$, $D_1 \notin$ 平面 $ABCD$, 因此根据 6.2 节的命题 1 得, 直线 D_1B 与直线 AC 是异面直线.

由于 $A_1D_1 \parallel BC$, 且 $A_1D_1 = BC$, 因此四边形 A_1BCD_1 是平行四边形, 它的两条对角线 D_1B 与 A_1C 的交点 F 是 D_1B 的中点, 也是 A_1C 的中点. 设 A_1A 的中点为 E , 则在 $\triangle A_1AC$ 中, $EF \parallel AC$.

我们来求 EF 与 D_1B 的夹角 $\angle EFD_1$. 由于 $D_1E^2 = A_1D_1^2 + A_1E^2 = AB^2 + AE^2 = EB^2$, 因此 $D_1E = EB$. 从而 $\triangle D_1EB$ 是等腰三角形, 于是它的底边 D_1B 上的中线 EF 也是 D_1B 上的高, 因此 $\angle EFD_1 = \frac{\pi}{2}$.

从而根据定义 1 得, D_1B 与 AC 所成的角是 $\frac{\pi}{2}$, 因此 D_1B 与 AC 垂直.

在例 2 的求解过程中, 为了求异面直线 D_1B 与 AC 所成的角, 根据定义 1, 需要在 D_1B 上选取一个合适的点, 并且过这个点有一条直线与 AC 平行.

于是, 第一步, 考虑四边形 A_1BCD_1 , 若能证明它是平行四边形, 则能由它的对角线互相平分, 得到两条对角线的交点 F .

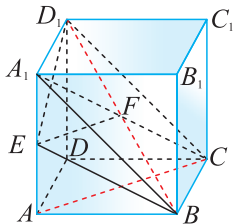


图 6.3-4

第二步, 在 A_1A 上取中点 E , 考虑 $\triangle A_1AC$, 得出 $EF \parallel AC$. 于是求 EF 与 D_1B 的夹角 $\angle EFD_1$ 是多少成为下一步要做的工作.

第三步, 考虑 $\triangle D_1EB$, 证明它是等腰三角形, 从而得出 $EF \perp D_1B$, 于是 $\angle EFD_1 = \frac{\pi}{2}$. 因此 D_1B 与 AC 所成的角是 $\frac{\pi}{2}$, 从而 $D_1B \perp AC$.

整个过程依次在平面 A_1BCD_1 、平面 A_1AC 、平面 D_1EB 内进行, 这样就可以分别利用初中学习过的几何知识来解决. 这是判断两条异面直线是否垂直的一种方法.

命题 设 l_1 与 l_2 是异面直线, 若 $l_3 \parallel l_2$, 则 l_3 与 l_1 所成的角等于 l_2 与 l_1 所成的角; 从而若 l_1 与 l_2 垂直, 则 l_1 与 l_3 垂直.

证明 如图 6.3-5 所示, l_1 与 l_2 是异面直线, 且 $l_3 \parallel l_2$. 在 l_1 上取一点 A , 过点 A 有且只有一条直线 AB 与 l_2 平行.

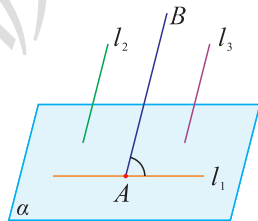


图 6.3-5

根据定义 1, AB 与 l_1 的夹角中不大于 $\frac{\pi}{2}$ 的那个角是 l_1 与 l_2 所成的角.

由于 $l_3 \parallel l_2$, 因此根据平行关系的传递性得, $AB \parallel l_3$. 于是 AB 与 l_1 的夹角中不大于 $\frac{\pi}{2}$ 的那个角是 l_1 与 l_3 所成的角.

因此 l_1 与 l_3 所成的角等于 l_1 与 l_2 所成的角.

从而若 l_1 与 l_2 垂直, 则 l_1 与 l_3 垂直.

例 3 如图 6.3-6 所示, 在棱长为 1 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, A_1C_1 与 D_1B 是否垂直?

解 在例 2 中已证明 D_1B 与 AC 垂直.

由于 $A_1A \parallel C_1C$, 并且 $A_1A = C_1C$,

因此四边形 A_1ACC_1 是平行四边形, 从而 $A_1C_1 \parallel AC$.

根据上述命题得, A_1C_1 与 D_1B 垂直.

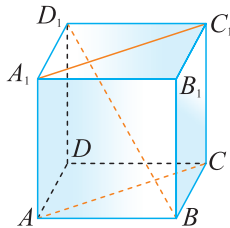


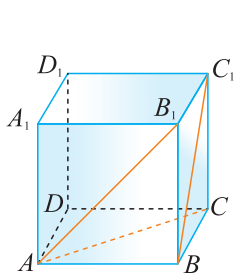
图 6.3-6

练习

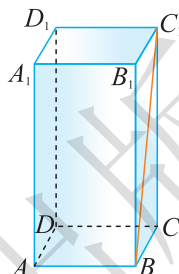
A 组

1. 如图, 在棱长为 1 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 下列各对线段所在的直线是否为异面直线? 并求每一对直线所成的角.

- (1) AA_1 与 B_1C_1 ; (2) AB_1 与 D_1C_1 ;
(3) AC 与 BC_1 .



(第 1 题)



(第 2 题)

2. 如图, 长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的底面是边长为 1 的正方形, 高为 2. 判断下列各对线段所在的直线是否为异面直线, 并求每一对直线所成的角的正弦值.

- (1) B_1C_1 与 AB ; (2) AD 与 BC_1 .

B 组

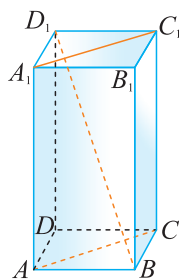
1. 如图, 长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的底面是边长为 1 的正方形, 高为 2.

(1) 线段 D_1B 所在直线与线段 AC 所在直线是否为异面直线? 是否垂直?

(2) 线段 A_1C_1 所在直线与线段 D_1B 所在直线是否垂直?

2. 长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的底面是边长为 1 的正方形, 高为 2, M 是 A_1B_1 的中点.

- (1) 线段 AM 所在直线与线段 B_1C_1 所在直线是否为异面直线?
(2) 求直线 AM 与直线 B_1C_1 所成的角.
(3) 直线 AM 与直线 B_1C_1 是否垂直?



(第 1 题)

6.4 直线与平面的位置关系，直线与平面平行的判定和性质



观察

把一支铅笔平放在课桌面上，这时铅笔所在的直线位于课桌面所在的平面内.
把一支铅笔立起来放在课桌面上，这时铅笔所在的直线与课桌面所在的平面有且只有一个公共点.
教室黑板所在墙面的最上边一条直线与地面所在平面没有公共点.



抽象

从上述例子受到启发，一条直线与一个平面的位置关系有且只有以下3种情形：

- (1) 直线在平面内——有两个公共点(从而直线上所有点都在平面内)；
- (2) 直线和平面相交——有且只有一个公共点；
- (3) 直线和平面平行——没有公共点.

我们把直线和平面相交或平行的情况统称直线在平面外.

当直线 l 在平面 α 内时，记作 $l \subset \alpha$ ；

当 l 在平面 α 外时，记作 $l \not\subset \alpha$ ；

当 l 与 α 平行时，记作 $l \parallel \alpha$ ；

当 l 与 α 相交于点 A 时，记作 $l \cap \alpha = \{A\}$ ，简记作 $l \cap \alpha = A$.

图 6.4-1 分别表示了直线与平面的 3 种位置关系.

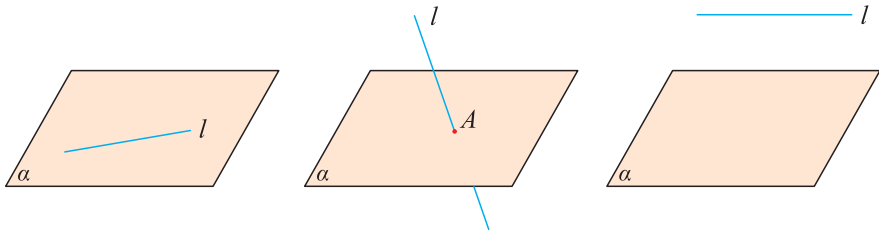


图 6.4-1



探索

如图 6.4-2 所示, 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 由于四边形 A_1ABB_1 是平行四边形, 因此 $A_1A \parallel B_1B$.

直观上看, 直线 A_1A 与平面 B_1BCC_1 没有公共点, 从而

$$A_1A \parallel \text{平面 } B_1BCC_1.$$

由此受到启发, 我们猜想并且证明下述定理:

定理 1 (直线与平面平行的判定定理) 如果平面外一条直线和这个平面内的一条直线平行, 那么这条直线和这个平面平行.

已知: 平面 α 外一条直线 l 与平面 α 内一条直线 l_1 平行, 如图 6.4-3 所示.

求证: $l \parallel \alpha$.

证明 由于 $l \parallel l_1$, 因此 l 与 l_1 确定一个平面 β , 从而 $\alpha \cap \beta = l_1$.

假如 l 与 α 不平行, 由于 $l \not\subset \alpha$, 因此 l 与 α 相交, 设交点为 A .

由于 $A \in \beta$, 且 $A \in \alpha$, 因此 $A \in \alpha \cap \beta$, 即 $A \in l_1$.

从而 A 是 l 与 l_1 的一个公共点, 这与 $l \parallel l_1$ 矛盾, 所以 $l \parallel \alpha$.

利用定理 1 立即得出, 图 6.4-2 中的直线 A_1A 与平面 B_1BCC_1 平行.

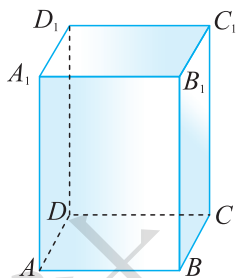


图 6.4-2

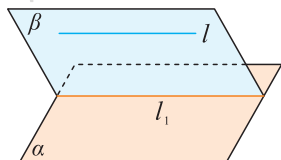


图 6.4-3

为了证平面 α 外的一条直线 l 与 α 平行, 只需要证 l 与平面 α 内的一条直线平行.

例 1 证明: 空间四边形相邻两边中点的连线, 平行于经过另外两边的平面.

已知: 如图 6.4-4 所示, 空间四边形 $ABCD$ 中, E, F 分别是边 AB, AD 的中点, 平面 α 经过 BC 和 CD .

求证: 直线 $EF \parallel \alpha$.

证明 连接 BD .

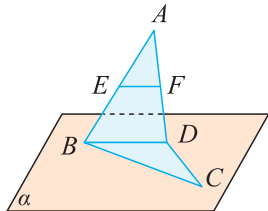


图 6.4-4

在 $\triangle ABD$ 中, 由已知条件得, $EF \parallel BD$.

由于 $EF \not\subset \alpha$, $BD \subset \alpha$,

因此 $EF \parallel \alpha$.



观察

如图 6.4-5 所示, 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 线段 A_1A 所在的直线与平面 B_1BCC_1 平行, 连接 A_1C_1 , AC .

由于四边形 A_1ACC_1 是平行四边形,

于是 $A_1A \parallel C_1C$.

由此受到启发, 我们猜想并且来证明下述定理.

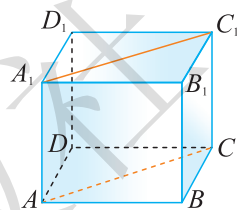


图 6.4-5



抽象

定理 2 (直线与平面平行的性质定理) 如果一条直线和一个平面平行, 并且经过这条直线的平面和这个平面相交, 那么这条直线和交线平行.

已知: 如图 6.4-6 所示, 直线 l 平行于平面 α , 经过 l 的平面 β 与 α 相交于直线 l_1 .

求证: $l \parallel l_1$.

证明 由已知条件得, l 与 l_1 在同一个平面 β 内, 由于 $l \parallel \alpha$, 因此 l 与 α 没有公共点.

又由于 $l_1 \subset \alpha$,

因此 l 与 l_1 没有公共点, 从而 $l \parallel l_1$.

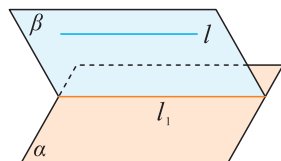


图 6.4-6

例 2 设直线 l 与平面 α 平行, 试问: 平面 α 内有多少条直线与 l 平行? 这些直线的位置关系怎样?

解 若 $l \parallel \alpha$, 则根据定理 2 得, 过 l 的任一平面若与平面 α 相交, 则它们的交线与 l 平行.

因此平面 α 内有无穷多条直线与 l 平行.

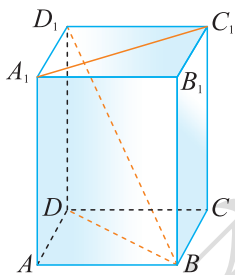
由平行关系的传递性得, 这些直线互相平行.

练习

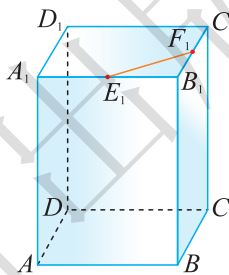
A 组

1. 如图, 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 说出下列线段所在的直线与长方体的面所在的平面的位置关系:

- (1) 直线 BD 与平面 $ABCD$;
- (2) 直线 BB_1 与平面 $ABCD$;
- (3) 直线 BD_1 与平面 $ABCD$;
- (4) 直线 B_1C_1 与平面 $ABCD$;
- (5) 直线 A_1C_1 与平面 $ABCD$.



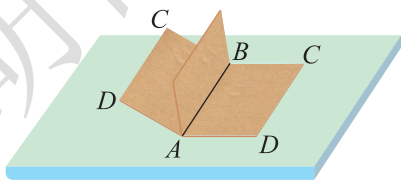
(第1题)



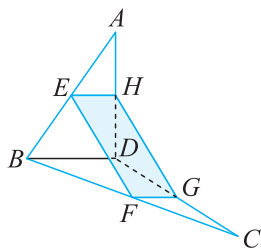
(第2题)

2. 如图, 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 若 E_1, F_1 分别是棱 A_1B_1, B_1C_1 的中点, 判断直线 E_1F_1 与平面 $ABCD$ 的位置关系, 并说明理由.

3. 使一块矩形硬纸板 $ABCD$ 的边 AB 紧贴桌面, 让硬纸板绕 AB 转动, AB 的对边 CD 在各个位置时, 是不是都和桌面平行? 为什么?



(第3题)



(第4题)

4. 设 E, F, G, H 分别是空间四边形 $ABCD$ 的边 AB, BC, CD, DA 的中点, 如图所示, 证明:

- (1) E, F, G, H 四点共面;
- (2) 直线 $BD \parallel$ 平面 $EFGH$.

B 组

1. 判断下列命题的真假:

(1) 一条直线和一个平面平行, 这条直线就和这个平面内的任意一条直线平行;

(2) 直线 l_1 与 l_2 平行, 直线 l_1 就和过 l_2 的任何平面平行;

(3) 平行于同一平面的两条直线互相平行.

2. 经过平面 α 外一点 A , 如何画一条直线与平面 α 平行? 过点 A 能画出多少条直线与平面 α 平行?

3. 证明: 经过两条异面直线中的一条, 有一个平面与另一条直线平行.

阅读材料

平行于同一条直线的两条不重合的直线平行

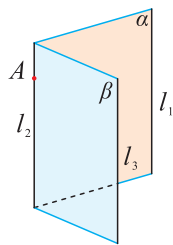
定理 平行于同一条直线的两条不重合的直线平行.

已知: $l_1 // l_3$, $l_2 // l_3$, 且 l_1 与 l_2 不重合.

求证: $l_1 // l_2$.

证明 如果 l_1, l_2, l_3 在同一个平面内, 那么初中数学中已证明过这个结论.

下面设 l_1, l_2, l_3 不在同一个平面内. 如图, 在 l_2 上取一点 $A \notin l_1$, 点 A 和 l_1 确定一个平面 α . 由已知条件得, l_3 不在 α 内, 于是点 A 和 l_3 确定另一个平面 β . 从而 α 与 β 相交于过点 A 的一条直线 l_4 . 由于 $l_3 // l_1$, 因此 $l_3 // \alpha$. 又由于 $l_3 \subset \beta$, 且 $\beta \cap \alpha = l_4$, 因此 $l_3 // l_4$. 又已知 $l_3 // l_2$, 且 l_4 与 l_2 都经过点 A , 因此根据平行公理得, l_4 与 l_2 重合. 由于 $l_1 // l_3$, 因此 $l_1 // \beta$. 又由于 $l_1 \subset \alpha$, 且 $\alpha \cap \beta = l_4$, 因此 $l_1 // l_4$. 即 $l_1 // l_2$.



从上述定理的证明过程看到, 为证明 $l_1 // l_2$, 需要利用直线和平面平行的判定定理和性质定理. 这表明为了证线线平行需要利用线面平行. 这是辩证法的生动体现.

6.5 直线与平面垂直的判定和性质



观察

以 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的一条直角边 AB 所在的直线为轴，其余两边绕这根轴旋转一周，如图 6.5-1 所示. 显然直线 AB 与直线 BC 在旋转过程中产生的任何一条直线垂直. 由此受到启发，我们引出下述概念.

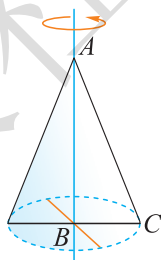


图 6.5-1



抽象

如果一条直线和一个平面内的任何一条直线都垂直，则称**这条直线和这个平面互相垂直**. 这条直线称为**这个平面的垂线**，这个平面叫作**这条直线的垂面**. 直线 l 和平面 α 互相垂直，记作 $l \perp \alpha$.

由于直线和平面的位置关系只有 3 种可能情况，因此如果一条直线和一个平面垂直，那么这条直线一定和这个平面相交，交点称为**垂足**.

从大量实践中总结出下述事实：

过一点有且只有一条直线和已知平面垂直；过一点有一个平面和已知直线垂直.

画直线 l 和平面 α 垂直时，要把直线 l 画成和表示平面 α 的平行四边形的横边垂直，如图 6.5-2 所示.

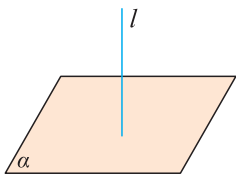


图 6.5-2



探索

如何判定一条直线和一个平面垂直？如果根据定义去判断，需要证明这条直线和已知平面内的任何一条直线都垂直，这比较难做到. 有没有较简单的办法呢？

与直线 l 上的一个非零向量共线的向量 $\boldsymbol{v}$ 称为 l 的一个方向向量.

设直线 l' 的一个方向向量为 $\boldsymbol{v}'$, 则

$$l \perp l' \Leftrightarrow l \text{ 与 } l' \text{ 所成的角等于 } \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}' \rangle = \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}' = 0.$$

平面 α 内的两个向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 若不共线, 则平面 α 内任一向量 $\boldsymbol{c}$ 可以唯一地表示成 $\boldsymbol{c} = k_1 \boldsymbol{a} + k_2 \boldsymbol{b}$.

由上述两个结论受到启发, 我们猜测并且来证明下述定理:

定理 1 (直线与平面垂直的判定定理) 如果一条直线和一个平面内的两条相交直线都垂直, 那么这条直线与这个平面垂直.

已知: 如图 6.5-3 所示, 直线 l 与平面 α 内的两条相交直线 l_1 , l_2 都垂直.

求证: $l \perp \alpha$.

证明 在平面 α 内任取一条直线 l_3 .

设 l , l_1 , l_2 , l_3 的一个方向向量分别为 $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$.

在平面 α 内, 由于 $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ 不共线,

因此 $\boldsymbol{v}_3 = k_1 \boldsymbol{v}_1 + k_2 \boldsymbol{v}_2$.

由于 $l \perp l_1$, $l \perp l_2$,

因此 $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}_1 = 0$, $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}_2 = 0$.

数学上已经证明, 空间向量的内积也具有线性性.

从而由上式得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}_3 &= \boldsymbol{v} \cdot (k_1 \boldsymbol{v}_1 + k_2 \boldsymbol{v}_2) \\ &= k_1 \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}_1 + k_2 \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}_2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

因此 $l \perp l_3$, 于是 $l \perp \alpha$.

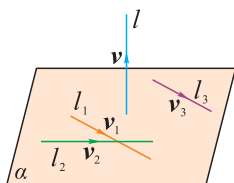


图 6.5-3



定理中的“两条相交直线”这一条件不能忽略.

如何在平坦的地面上立一根木杆, 使木杆与地面垂直?

如图 6.5-4 所示, 在准备立木杆的点 A 处画两条相交直线 l_1, l_2 , 立木杆使它与 l_1, l_2 所成的角都是直角, 则木杆与地面垂直. 这种做法的理论依据是直线与平面垂直的判定定理.

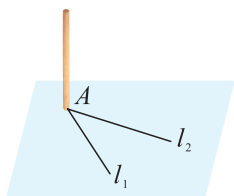


图 6.5-4

例 1 如果两条平行直线中的一条垂直于一个平面, 那么另一条也垂直于这个平面.

已知: 直线 $l_1 // l_2$, l_1 垂直于平面 α , 如图 6.5-5 所示.

求证: $l_2 \perp \alpha$.

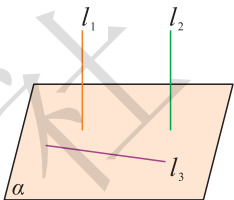


图 6.5-5

证明 在平面 α 内任取一条直线 l_3 , 设 l_1, l_2, l_3 的一个方向向量分别为 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$.

由于 $l_1 // l_2$, 因此 $\mathbf{v}_2 = k\mathbf{v}_1$.

由于 $l_1 \perp \alpha$, 因此 $l_1 \perp l_3$, 从而 $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3 = 0$,

因此 $\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3 = (k\mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{v}_3 = k(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3) = 0$.

于是 $l_2 \perp l_3$, 从而 $l_2 \perp \alpha$.



观察

某公路两旁相隔 100 m 立了两根电线杆, 每根电线杆都与地面垂直, 试问: 这两根电线杆是否平行?



抽象

定理 2 (直线与平面垂直的性质定理) 垂直于同一个平面的两条不重合的直线平行.

已知: 直线 l_1, l_2 都垂直于平面 α , 且 l_1 与 l_2 不重合, 如图 6.5-6 所示.

求证: $l_1 // l_2$.

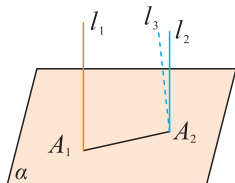


图 6.5-6

证明 已知 $l_1 \perp \alpha, l_2 \perp \alpha$, 设垂足分别为 A_1, A_2 .

由于过点 A_1 有且只有一条直线与平面 α 垂直, 且 l_1 与 l_2 不重合, 因此点 A_2 与 A_1 不重合.

连接 A_1A_2 .

在由 l_1 与 A_1A_2 确定的平面内, 过点 A_2 作直线 $l_3 \parallel l_1$.

由于 $l_1 \perp \alpha$, 因此根据上述例 1 得, $l_3 \perp \alpha$.

由于 $l_2 \perp \alpha$, 并且过点 A_2 有且只有一条直线与平面 α 垂直, 因此 l_3 与 l_2 重合, 从而 $l_2 \parallel l_1$.

从平面外一点引这个平面的垂线, 这个点和垂足间的距离叫作[这个点到这个平面的距离](#).

例 2 与一个平面平行的一条直线上各点到这个平面的距离相等.

已知: 直线 l 与平面 α 平行, 在 l 上任取两点 A, B , 如图 6.5-7 所示.

求证: 点 A 与点 B 到平面 α 的距离相等.

证明 从点 A, B 分别引平面 α 的垂线, 垂足分别为 A', B' , 如图 6.5-7 所示.

根据定理 2 得, $AA' \parallel BB'$.

于是直线 AA' 和 BB' 确定一个平面 β , 并且 β 与平面 α 相交, 它们的交线是 $A'B'$.

由于 $l \parallel \alpha$, 且 l 在平面 β 内,

因此 $l \parallel A'B'$.

于是四边形 $AA'B'B$ 是平行四边形,

从而 $AA' = BB'$,

即点 A 与点 B 到平面 α 的距离相等.

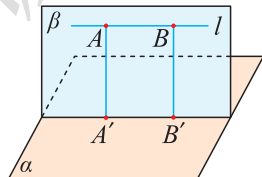


图 6.5-7

与一个平面平行的一条直线上任意一点到这个平面的距离称为[这条直线到这个平面的距离](#).

例 3 如图 6.5-8 所示, 已知一个棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$.

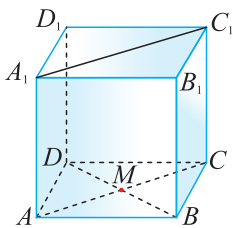


图 6.5-8

- (1) 求点 A 到平面 BCC_1B_1 的距离;
- (2) 求直线 AA_1 到平面 BCC_1B_1 的距离;
- (3) 求点 B 到平面 ACC_1A_1 的距离;
- (4) 求直线 B_1B 到平面 ACC_1A_1 的距离.

解 (1) 因为 $AB \perp B_1B$, $AB \perp BC$, 且 $B_1B \cap BC = B$,
所以 $AB \perp$ 平面 BCC_1B_1 .

从而点 A 到平面 BCC_1B_1 的距离等于棱 AB 的长度 1.

(2) 由于 $AA_1 \parallel BB_1$, 且 $BB_1 \subset$ 平面 BCC_1B_1 , $AA_1 \not\subset$ 平面 BCC_1B_1 ,
因此 $AA_1 \parallel$ 平面 BCC_1B_1 ,

从而直线 AA_1 到平面 BCC_1B_1 的距离等于点 A 到平面 BCC_1B_1 的距离,
这个距离等于 1.

(3) 连接 BD , AC , 它们相交于点 M .

因为 $A_1A \perp$ 平面 $ABCD$, 所以 $A_1A \perp BD$.

因为四边形 $ABCD$ 是正方形, 所以 $BD \perp AC$.

又 $A_1A \cap AC = A$,

所以 $BD \perp$ 平面 ACC_1A_1 , 显然垂足为 M .

$$\text{由于 } |BM| = \frac{1}{2} |BD| = \frac{1}{2} \sqrt{1^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

因此点 B 到平面 ACC_1A_1 的距离等于 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(4) 由于 $B_1B \parallel A_1A$, $A_1A \subset$ 平面 ACC_1A_1 , $B_1B \not\subset$ 平面 ACC_1A_1 ,
因此 $B_1B \parallel$ 平面 ACC_1A_1 .

从而直线 B_1B 到平面 ACC_1A_1 的距离等于点 B 到这个平面的距离.

据(3)可得, 所求距离等于 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

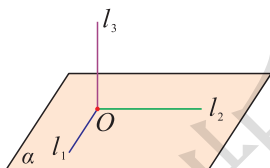
练习

A 组

1. 如果一条直线 l 垂直于平面 α 内的两条平行直线, 试问: l 是否与 α 垂直?
2. 在工件表面钻孔时, 如何调整工件表面使它和钻杆垂直?

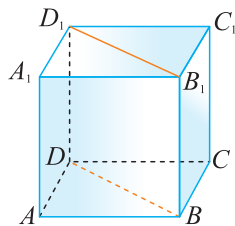


(第 2 题)



(第 3 题)

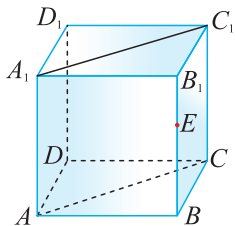
3. 证明: 如果三条直线相交于一点, 并且它们两两垂直, 那么其中一条直线垂直于另两条直线确定的平面.
4. 证明: 与三角形两边同时垂直的直线, 也与第三边垂直.
5. 证明: 平面外一点与平面内各点连接的线段中, 垂直平面的线段最短.
6. 如图, 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1.
 - (1) 求点 A 到平面 DCC_1D_1 的距离;
 - (2) 求直线 AB 到平面 DCC_1D_1 的距离;
 - (3) 求点 A 到平面 DBB_1D_1 的距离;
 - (4) 求直线 A_1A 到平面 DBB_1D_1 的距离.



(第 6 题)

B 组

1. 证明: 如果一条直线平行于一个平面, 那么这个平面的任何垂线都和这条直线垂直.
2. 如图, 已知一个棱长为 1 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$, E 是棱 B_1B 上任意一点.
 - (1) 求点 E 到平面 ADD_1A_1 的距离;
 - (2) 求点 E 到平面 ACC_1A_1 的距离.



(第 2 题)

6.6 直线与平面所成的角



观察

在太阳光线的照射下,人、树、电线杆等在地面上都有影子.当太阳光线垂直照射地面时,人的影子就在脚下,加固电线杆用的斜拉粗铁丝的影子是地面上的一条线段,等等.



抽象

从空间中的任一点 P 向平面 α 引垂线,垂足 P' 称为点 P 在平面 α 上的射影.点 P 与垂足 P' 间的线段 PP' 称为点 P 到平面 α 的垂线段(如图 6.6-1 所示).

如果一条直线和一个平面相交,但不和这个平面垂直,那么这条直线称为这个平面的斜线,斜线和平面的交点称为斜足.斜线上一点与斜足间的线段叫作这个点到这个平面的斜线段.

如图 6.6-1 所示,直线 l 是平面 α 的斜线,点 M 是斜足,线段 PM 是点 P 到平面 α 的斜线段.由于 $PP' \perp P'M$, 因此 $\triangle PP'M$ 是直角三角形,从而 $|PP'| < |PM|$.

这表明:从平面外一点向平面引垂线段和斜线段,则垂线段比任何一条斜线段都短.

从斜线上一点向平面引垂线,过垂足和斜足的直线称为斜线在这个平面上的射影.垂足和斜足间的线段称为这点到平面的斜线段在这个平面上的射影.斜线上任意一点在平面上的射影一定在斜线的射影上.

如图 6.6-1 所示,斜线 l 上一点 P 在平面 α 上的射影是 P' .直线 $P'M$ 是斜线 l 在平面 α 上的射影,线段 $P'M$ 是斜线段 PM 在平面 α 上的射影.

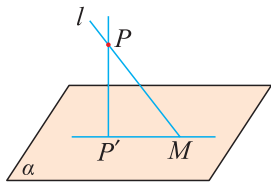


图 6.6-1

形象地说, 斜线段 PM 在地面上的射影就是当太阳光线垂直照射地面时, 斜线段 PM 在地面上的影子 $P'M$.

利用直角三角形的性质, 当两条斜线 PA , PB 和平面 α 所成的角相等时, 容易得到下列结论:

两条斜线段的长度相等当且仅当它们的射影的长度相等;
斜线段较长当且仅当它的射影较长.

例 1 如图 6.6-2 所示, 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$.

- (1) 斜线 D_1B 在平面 $ABCD$ 上的射影是哪条直线?
- (2) AC 和 DB 垂直吗?
- (3) AC 和 D_1B 垂直吗?

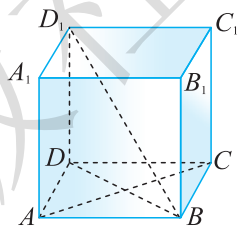


图 6.6-2

解 (1) 斜线 D_1B 在平面 $ABCD$ 上的射影是 DB .

(2) 由于四边形 $ABCD$ 是正方形, 因此, $AC \perp DB$.

(3) 因为 $D_1D \perp$ 平面 $ABCD$, 所以 $D_1D \perp AC$.

又 $AC \perp DB$, $D_1D \cap DB = D$,

所以 $AC \perp$ 平面 D_1DB , 从而 $AC \perp D_1B$.

从(3)小题看到, 从 $AC \perp DB$ 推出了 $AC \perp D_1B$. 即在图 6.6-2 中, 从平面 $ABCD$ 内一条直线 AC 与斜线 D_1B 的射影 DB 垂直, 推出了 AC 与斜线 D_1B 垂直. 这在一般情形下也成立吗? 反过来, 从平面内一条直线与一条斜线垂直, 能否推出这条直线和这条斜线的射影垂直?

三垂线定理 平面内的一条直线和这个平面的一条斜线垂直当且仅当它和这条斜线的射影垂直.

已知: l_1 是平面 α 内一条直线, l 是 α 的斜线, 斜足为 M . 过 l 上一点 P 向平面 α 引垂线, 垂足为 P' , 如图 6.6-3 所示.

求证: $l_1 \perp l \Leftrightarrow l_1 \perp P'M$.

证明 由于 $PP' \perp \alpha$, 且 $l_1 \subset \alpha$,

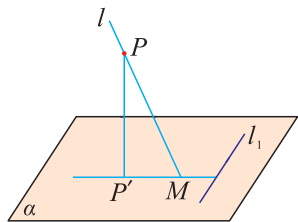


图 6.6-3

因此 $PP' \perp l_1$.

从而若 $l_1 \perp l$, 且 $l \cap PP' = P$, 则 $l_1 \perp$ 平面 $PP'M$, 于是 $l_1 \perp P'M$.

反之, 若 $l_1 \perp P'M$, 由于 $l_1 \perp PP'$, 且 $P'M \cap PP' = P'$,

因此 $l_1 \perp$ 平面 $PP'M$. 于是 $l_1 \perp l$.

例 2 已知: 点 O 是 $\triangle ABC$ 的三条高线的交点,

PO 与平面 ABC 垂直, 如图 6.6-4 所示.

求证: $PA \perp BC$.

证明 OA 是斜线 PA 在平面 ABC 上的射影.

由已知条件得, $OA \perp BC$, 因此 $PA \perp BC$.

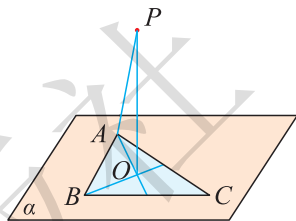


图 6.6-4

例 3 如果一个角所在平面外一点到角的两边距离相等, 那么这个点在这个平面上的射影在这个角的平分线上.

已知: 如图 6.6-5 所示, $\angle BAC$ 在平面 α 内, 从 α 外一点 P 分别引 AB , AC 的垂线, 垂足分别为 E , F , 且 $PE = PF$. 点 P 在 α 上的射影为 P' .

求证: 点 P' 在 $\angle BAC$ 的平分线上.

证明 $P'E$, $P'F$ 分别是斜线 PE , PF 在平面 α 上的射影. 由于 $PE \perp AB$, 因此 $P'E \perp AB$.

由于 $PF \perp AC$, 因此 $P'F \perp AC$.

由于 $PE = PF$, 因此由勾股定理得 $P'E = P'F$.

从而点 P' 在 $\angle BAC$ 的平分线上.

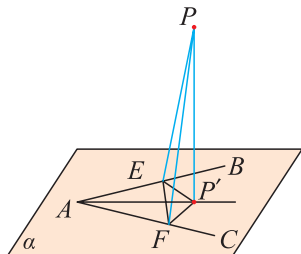


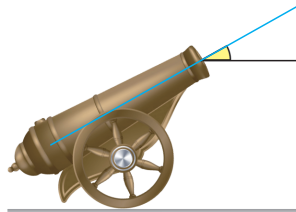
图 6.6-5



观察

在发射炮弹时, 需要调整好炮筒与地平面所成的角, 以便击中目标.

如图 6.6-2 所示, 斜线 D_1B 和它在平面 $ABCD$ 上的射影 DB 所成的锐角是 $\angle D_1BD$, 我们可用这个角来度量斜线 D_1B 和平面 $ABCD$ 所成的角.





抽象

平面的一条斜线和它在平面上的射影所成的锐角，叫作这条直线和这个平面所成的角，如图 6.6-6 所示.

平面的一条垂线和这个平面所成的角是直角.

平面的一条平行线或平面内的一条直线和这个平面所成的角是 0° 的角(或 0 弧度的角).

可以证明：斜线和平面所成的角，是这条斜线和平面内经过斜足的直线所成的一切角中最小的角.

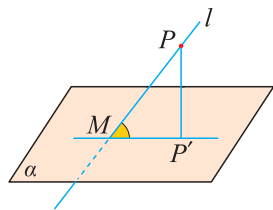


图 6.6-6

例 4 如图 6.6-7 所示，在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， $AB=1$ ， $AD=\sqrt{2}$ ， $AA_1=3$ ，求对角线 AC_1 与底面 $ABCD$ 所成的角.

解 连接 AC ，因为 $C_1C \perp$ 底面 $ABCD$ ，所以 AC 为斜线 AC_1 在底面 $ABCD$ 内的射影， $\angle C_1AC$ 为对角线 AC_1 与底面 $ABCD$ 所成的角.

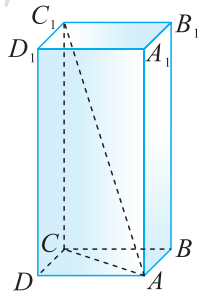


图 6.6-7

因为 $AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = \sqrt{AD^2 + AB^2}$,

$$= \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{3},$$

而 $CC_1 = AA_1 = 3$,

$$\text{所以 } \tan \angle C_1AC = \frac{CC_1}{AC} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

所以 $\angle C_1AC = 60^\circ$.

因此，对角线 AC_1 与底面 $ABCD$ 所成的角为 60° .

例 5 两条斜线 PA ， PB 和平面 α 所成的角相等当且仅当斜线段 PA 与 PB 的长度相等.

已知： PA ， PB 是平面 α 的两条斜线，斜足分别为 A ， B ， PP' 是 α 的垂线段，如图 6.6-8 所示.

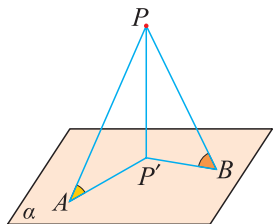


图 6.6-8

求证: $\angle PAP' = \angle PBP' \Leftrightarrow PA = PB$.

证明 由于 $PP' \perp \alpha$,

因此 $PP' \perp P'A$, $PP' \perp P'B$,

从而 $\triangle PP'A$ 和 $\triangle PP'B$ 都是直角三角形, 它们有公共边 PP' .

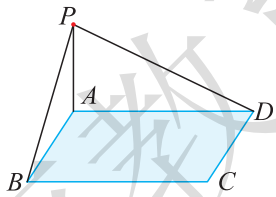
于是 $\angle PAP' = \angle PBP' \Leftrightarrow \triangle PP'A \cong \triangle PP'B \Leftrightarrow PA = PB$.

练习

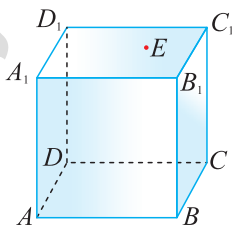
A 组

1. 已知点 O 是 $\triangle ABC$ 的三条高线的交点, PO 与平面 ABC 垂直. 证明: $PC \perp AB$.

2. 设四边形 $ABCD$ 是矩形, PA 与平面 $ABCD$ 垂直, 如图所示. 证明: $PB \perp BC$, $PD \perp DC$.



(第2题)



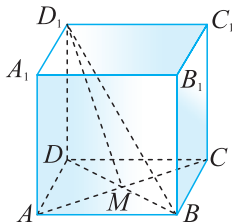
(第3题)

3. 如图所示是一个长方体木块, 上底面上有一点 E . 如果想在上述面上画一条经过 E 的线段 l , 使得 l 与 C, E 的连线垂直, 应当怎样画?

4. 已知斜线段的长度是它在平面 α 上的射影的长度的 2 倍, 求斜线和平面 α 所成的角.

5. 如图, 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, AC 与 BD 相交于点 M , 连接 D_1M . 求:

- (1) 直线 D_1M 和平面 ABC 所成角的正切值;
- (2) 直线 D_1B 和平面 ABC 所成角的正切值;
- (3) 直线 AC 和平面 DCC_1 所成角的大小.



(第5题)

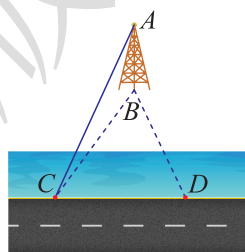
B 组

1. 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 设 $AB = 2$ cm, $AD = 1$ cm, $AA_1 = \sqrt{5}$ cm, G, H 分别是棱 B_1B, DC 的中点. 求:

- (1) 直线 D_1B 和平面 ABC 所成角的弧度数;
- (2) 直线 DB 和平面 ABB_1 所成角的正切值;
- (3) 直线 A_1G 和平面 B_1BC 所成角的正切值;
- (4) 直线 A_1H 和平面 ABC 所成角的正切值.

2. 两条直线和一个平面所成的角相等, 它们平行吗?

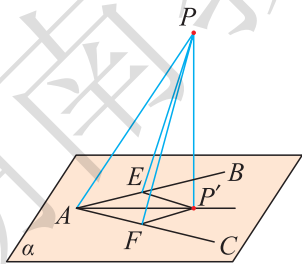
3. 如图, 一条公路的旁边有一条河, 河对岸有一座铁塔 AB , 高 15 m. 现想利用测角器和皮尺作测量工具, 求出铁塔顶 A 与公路边(靠近河岸的一边)的距离. 为此, 在公路边上寻找一点 C , 使得 BC 与公路边所成的角为 90° . 再在公路边上取一点 D , 使水平角 $\angle BDC$ 为 45° . 量得 C, D 两点间的距离为 20 m. 求铁塔顶 A 与公路边的距离.



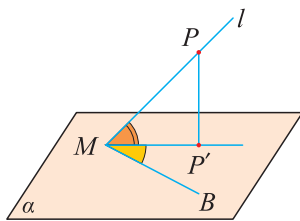
(第 3 题)

4. 经过一个角的顶点引这个角所在平面的斜线. 证明:

如果一条斜线分别和这个角的两边所成的角相等, 那么这条斜线在这个平面上的射影是这个角的平分线所在的直线.



(第 4 题)



(第 5 题)

5. 如图, 斜线 l 在平面 α 上的射影为 MP' , 其中 M 是斜足, P' 是 l 上一点 P 在 α 上的射影. 直线 MB 在平面 α 内, 且和 MP' 的夹角为 45° . 如果斜线 l 和平面 α 所成的角为 45° , 求 l 和直线 MB 所成的角.

6.7 两个平面的位置关系，平面与平面平行的判定和性质



观察

如图 6.7-1 所示，在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，上底面 $A_1B_1C_1D_1$ 与下底面 $ABCD$ 平行，右侧面 BCC_1B_1 与下底面 $ABCD$ 相交。

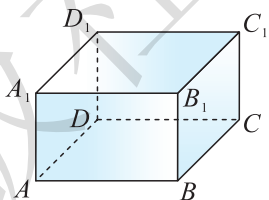


图 6.7-1



抽象

从上述例子受到启发，两个平面的位置关系有且只有下述 3 种情形：

- (1) 两个平面**平行**——没有公共点；
- (2) 两个平面**相交**——所有公共点位于一条直线上；
- (3) 两个平面**重合**——有 3 个公共点不在一条直线上（从而它们的所有点都是公共点）。

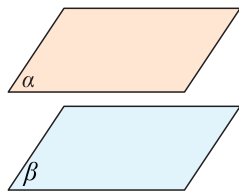


图 6.7-2

在画两个平行的平面时，注意要使表示这两个平面的两个平行四边形的对应边平行，如图 6.7-2 所示。

平面 α 和 β 平行，记作 $\alpha // \beta$ 。



探索

如果两个平面平行，则它们没有公共点，从而其中一个平面内的任意一条直线都和另一个平面平行。反之如何？我们有如下结论：

定理 1 (两个平面平行的判定定理) 如果一个平面内有两条相交直线都平行于另一个平面，那么这两个平面平行。

已知：平面 α 内有两条相交直线 l_1, l_2 都和平面 β 平行，如图 6.7-3 所示。

求证： $\alpha \parallel \beta$ 。

证明 由于 $l_1 \parallel \beta$ ，因此 α 与 β 不重合。

假如 α 与 β 相交，设交线为 l 。

由于 $l_1 \parallel \beta$ ，且 $l_1 \subset \alpha$ ，因此 $l_1 \parallel l$ 。

同理， $l_2 \parallel l$ 。从而 $l_1 \parallel l_2$ ，这与已知 l_1 与 l_2 相交矛盾。

所以 α 与 β 不相交。于是 $\alpha \parallel \beta$ 。

两个平面平行的判定定理在实际生活中有许多应用。例如，木工师傅常将气泡水平仪在桌面上交叉放两次，若每次气泡均在中间，则可判断该桌面是水平的。

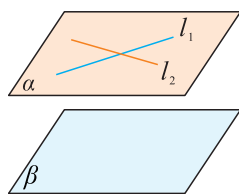
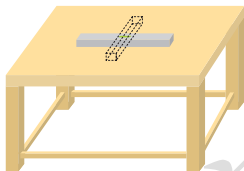
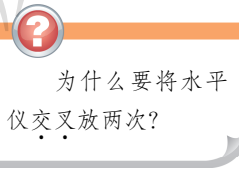


图 6.7-3



观察

教室里天花板与左墙面的交线 l_1 ，跟地面与左墙面的交线 l_2 之间的位置关系如何？



抽象

上述例子里， l_1 与 l_2 平行。由此受到启发，猜测有下述结论：

定理 2(两个平面平行的性质定理) 如果两个平行平面同时和第三个平面相交，那么它们的交线平行。

已知：平面 α 与平面 β 平行，平面 γ 与 α, β 都相交，交线分别为 l_1, l_2 ，如图 6.7-4 所示。

求证： $l_1 \parallel l_2$ 。

证明 由于 $\alpha \parallel \beta$ ，

因此 α 与 β 没有公共点，从而 l_1 与 l_2 也没有公共点。

又由于 l_1 与 l_2 都在平面 γ 内，因此 $l_1 \parallel l_2$ 。

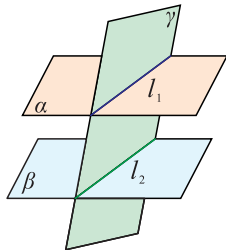


图 6.7-4

例 1 证明：夹在两个平行平面间的平行线段的长度相等.

已知：平面 α 与平面 β 平行， A, C 是 α 上两点， B, D 是 β 上两点，且 $AB \parallel CD$ ，如图 6.7-5 所示.

求证：线段 AB 与线段 CD 的长度相等.

证明 由于 $AB \parallel CD$,

因此直线 AB 与 CD 确定一个平面，且这个平面与 α, β 分别相交于直线 AC, BD .

由于 $\alpha \parallel \beta$ ，因此 $AC \parallel BD$ ，

从而四边形 $ABDC$ 是平行四边形.

于是对边 AB 与 CD 的长度相等.

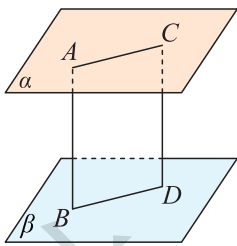


图 6.7-5

例 2 如果一条直线垂直于两个平行平面中的一个平面，那么它也垂直于另一个平面.

已知：平面 $\alpha \parallel \beta$ ，直线 $l \perp \alpha$ ，如图 6.7-6 所示.

求证： $l \perp \beta$.

证明 在平面 β 内任取一条直线 l_2 ，过 l_2 作平面 γ 与平面 α 相交，交线为 l_1 .

由于 $\alpha \parallel \beta$ ，因此根据定理 2 得， $l_1 \parallel l_2$.

由于 $l \perp \alpha$ ，因此 $l \perp l_1$.

由于 $l_1 \parallel l_2$ ，因此根据 6.3 节的命题得， $l \perp l_2$.

从而 $l \perp \beta$.

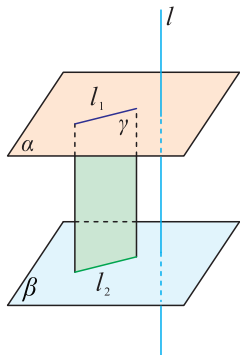


图 6.7-6

与两个平行平面同时垂直的直线称为这两个平行平面的公垂线，它夹在这两个平行平面间的部分，称为这两个平行平面的公垂线段.

根据直线与平面垂直的性质定理以及例 1 立即得到下述结论：

两个平行平面的公垂线段的长度都相等.

由此可给出下述概念：

两个平行平面的公垂线段的长度叫作这两个平行平面的距离. 容易看出，它等于一个平面上任意一点到另一个平面的距离.

例 3 如图 6.7-7 所示, 长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的底面是边长为 1 的正方形, 高为 2. 求平面 ADD_1A_1 和平面 BCC_1B_1 之间的距离.

解 因为 $AA_1 \parallel BB_1$, $BB_1 \subset$ 平面 BCC_1B_1 , $AA_1 \not\subset$ 平面 BCC_1B_1 , 所以 $AA_1 \parallel$ 平面 BCC_1B_1 .

因为 $AD \parallel BC$, $BC \subset$ 平面 BCC_1B_1 , $AD \not\subset$ 平面 BCC_1B_1 , 所以 $AD \parallel$ 平面 BCC_1B_1 .

又 $AA_1 \cap AD = A$, 所以平面 $ADD_1A_1 \parallel$ 平面 BCC_1B_1 .

于是平面 ADD_1A_1 和平面 BCC_1B_1 之间的距离等于点 A 到平面 BCC_1B_1 的距离.

又 $AB \perp BC$, $AB \perp BB_1$, 且 $BC \cap BB_1 = B$,
所以 $AB \perp$ 平面 BCC_1B_1 .

于是点 A 到平面 BCC_1B_1 的距离等于 AB 的长度 1.

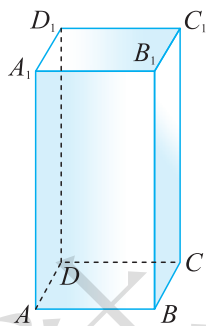


图 6.7-7

例 4 垂直于同一条直线的两个不重合的平面平行.

已知: 平面 α 和平面 β 都与直线 l 垂直, 且 α 与 β 不重合, 如图 6.7-8 所示.

求证: $\alpha \parallel \beta$.

证明 已知 $l \perp \alpha$, 设垂足为 A .

在平面 α 内过点 A 作相交直线 l_1 与 l_2 , 直线 l 与 l_1 确定一个平面 γ , γ 与 β 相交于 l'_1 .

由于 α 与 β 不重合, 因此 l_1 与 l'_1 不重合.

由于 $l \perp \alpha$, 因此 $l \perp l_1$.

由于 $l \perp \beta$, 因此 $l \perp l'_1$.

于是 $l_1 \parallel l'_1$, 从而 $l_1 \parallel \beta$.

同理可证 $l_2 \parallel \beta$.

根据定理 1 得, $\alpha \parallel \beta$.

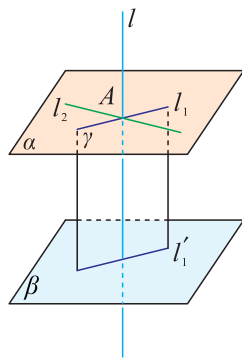


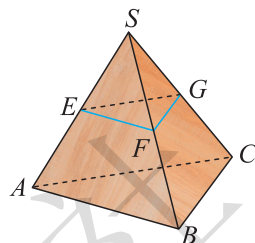
图 6.7-8

从例 4 立即得出: 过一点与一条直线垂直的平面只有一个.

练习

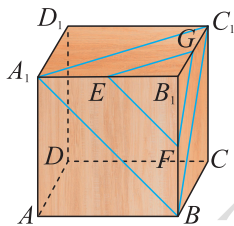
A 组

1. 如图所示是一个三棱锥木块, E, F, G 分别是棱 SA, SB, SC 的中点, 连接 EF, FG, GE . 沿着所画的线 EF, FG, GE 把木块锯开, 则下半块的上底面 EFG 与下底面 ABC 平行, 为什么?

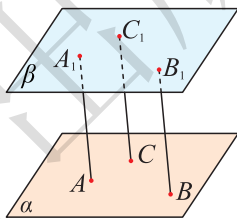


(第1题)

2. 如图所示是一个正方体木块, E, F, G 分别是棱 A_1B_1, B_1B, B_1C_1 的中点, 连接 EF, FG, GE . 沿着所画的线 EF, FG, GE 把木块锯开, 证明: 平面 EFG 与平面 A_1BC_1 平行.



(第2题)



(第3题)

3. 如图, 以平面 α 内不共线的三点 A, B, C 为端点, 在 α 的同侧分别引三条互相平行且长度相等的线段 AA_1, BB_1, CC_1 . 证明: 过三点 A_1, B_1, C_1 的平面 β 与平面 α 平行.

B 组

1. 判断下列命题的真假:

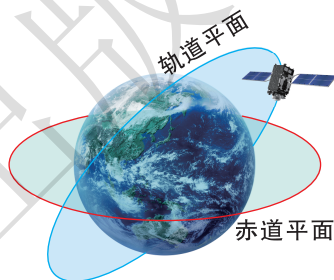
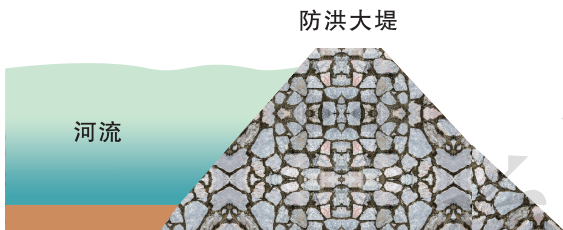
- (1) 如果一个平面内的两条直线平行于另一个平面, 那么这两个平面平行;
 - (2) 如果一个平面内的任何一条直线都平行于另一个平面, 那么这两个平面平行;
 - (3) 如果两条直线分别在两个平行平面内, 那么这两条直线平行.
2. 证明: 经过平面外一点有一个平面与这个平面平行.
3. 在本节例 3 中, 求平面 ABB_1A_1 和平面 DCC_1D_1 之间的距离.
4. 安装日光灯时, 怎样才能使灯管与天花板平行?

6.8 二面角·平面与平面垂直的判定和性质



观察

在修筑长江的防洪大堤时,为了使堤坝能有效地扛住洪水的袭击,必须使堤坝面与水平面成适当的角度.



为了使我国广大地区能收看卫星电视,人造地球卫星的运行轨道平面应当和地球赤道平面成合适的角度.

为了使房屋美观实用,屋顶的正面和侧面应成一定的角度.



抽象

像上述例子那样,实际生活中的许多问题要求我们研究两个平面所成的角.

如果两个平面平行或重合,那么我们说这两个平面所成的角是 0° 的角(或 0 弧度的角).

如果两个平面相交,那么它们的交线把每个平面分成两部分,其中的每一部分都叫作半平面.从一条直线出发的两个半平面所组成的图形叫作二面角,这条直线叫作二面角的棱,这两个半平面叫作二面角的面.如图 6.8-1 所示,由直线 l 出发的两个半平面 α 和 β 组成一个二面角,记作 $\alpha - l - \beta$.

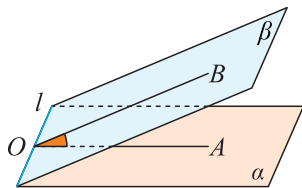


图 6.8-1



探索

把一张矩形硬纸片对折后张开,如图 6.8-1 所示,形成一个二面角.这时硬纸片的一条边经过对折再张开后形成一个角,很自然地把这个角的度数叫作二面角的度数.由此受到启发,得到研究二面角的一种方法:

以二面角的棱上任意一点为端点,在两个面内分别作垂直于棱的两条射线,这两条射线所成的角叫作**二面角的平面角**.如图 6.8-1 所示, $\angle AOB$ 是二面角 $\alpha-l-\beta$ 的一个平面角.

可以证明:在二面角的棱上取不同的点,得到的平面角是相等的.

二面角的大小可以用它的平面角来度量.把**二面角的平面角的度数**叫作这个**二面角的度数**.

当二面角的度数为 90° 时,称它为**直二面角**.

两个相交平面恰好构成 4 个二面角,它们中的任何一个(一般取不大于 90° 的那一个)叫作**这两个平面所成的角**.

此结论的证明放在本节末的“阅读材料”里.

例 1

某山坡的倾斜度(坡面与水平面形成的二面角的度数)是 30° ,如图 6.8-2 所示.在坡面 β 内,从坡脚的 A 处出发,沿一条与坡脚的水平线 l 成 60° 角的直路前进,行走 200 m 后,升高了多少米? ($\sqrt{3} \approx 1.732$)

解 设行走 200 m 后到达点 B .

设点 B 在水平面 α 上的射影为 B' ,则所求高度为 BB' .

在坡面 β 内,过点 B 作 $BC \perp l$,垂足为 C ,

则斜线 BC 在平面 α 上的射影为 $B'C$.

由于 $BC \perp l$,因此 $B'C \perp l$,

从而 $\angle BCB'$ 就是二面角 $\alpha-l-\beta$ 的一个平面角,于是 $\angle BCB' = 30^\circ$.

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中,

$$BC = AB \sin \angle BAC = 200 \cdot \sin 60^\circ = 100\sqrt{3} \text{ (m)}.$$

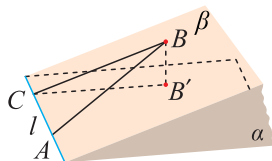


图 6.8-2

在 $\text{Rt}\triangle BB'C$ 中,

$$BB' = BC \sin \angle BCB' = 100\sqrt{3} \cdot \sin 30^\circ = 50\sqrt{3} \approx 86.6(\text{m}).$$

答: 沿直路前进 200 m 后, 升高了 86.6 m.



观察

教室里相邻的墙面之间、墙面与地面之间所成的角都是直角.



抽象

如果两个平面相交, 并且它们所成的角是直角, 则称这两个平面互相垂直. 平面 α 和 β 垂直, 记作 $\alpha \perp \beta$.

两个相交平面互相垂直当且仅当它们所成的 4 个二面角中有一个是直二面角(从而其余 3 个也是直二面角).

两个互相垂直的平面, 其画法如图 6.8-3 所示, 把直立平面的竖边画成和水平平面的横边垂直.

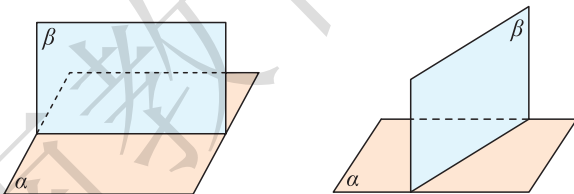


图 6.8-3

定理 1 (两个平面垂直的判定定理) 如果一个平面经过另一个平面的一条垂线, 那么这两个平面互相垂直.

已知: $l \subset \alpha$, $l \perp \beta$, 如图 6.8-4 所示.

求证: $\alpha \perp \beta$.

证明 已知 $l \perp \beta$, 设垂足为 A . 把平面 α 与 β 的交线记作 l_1 .

在平面 β 内, 过点 A 作射线 $AB \perp l_1$.

由于 $l \perp \beta$, 因此 $l \perp l_1$.

在 l 上取一点 C , 由于 $l \subset \alpha$,

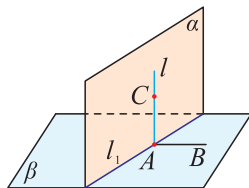


图 6.8-4

因此 $\angle CAB$ 是二面角 $\alpha-l_1-\beta$ 的一个平面角.

由于 $l \perp \beta$,

因此 $l \perp AB$, 从而 $\angle CAB = \frac{\pi}{2}$.

于是二面角 $\alpha-l_1-\beta$ 是直角, 因此 $\alpha \perp \beta$.

定理 2(两个平面垂直的性质定理) 如果两个平面互相垂直, 那么在一个平面内垂直于它们的交线的直线垂直于另一个平面.

已知: 平面 α 与 β 互相垂直, 它们的交线为 l , 平面 α 内一条直线 $l_1 \perp l$, 垂足为 A , 如图 6.8-5 所示.

求证: $l_1 \perp \beta$.

证明 在平面 β 内从点 A 作射线 $AB \perp l$.

在 l_1 上取一点 C , 则 $\angle BAC$ 是 α 与 β 所成的二面角的一个平面角.

由于 $\alpha \perp \beta$,

因此 $\angle BAC = 90^\circ$, 从而 $l_1 \perp AB$.

又已知 $l_1 \perp l$,

因此 $l_1 \perp \beta$.

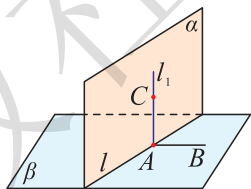


图 6.8-5

例 2 如果两个平面互相垂直, 那么经过第一个平面的一点垂直于第二个平面的直线, 一定在第一个平面内.

已知: $\alpha \perp \beta$, 点 $P \in \alpha$, $P \in l$, $l \perp \beta$, 如图 6.8-6 所示.

求证: $l \subset \alpha$.

证明 已知 $\alpha \perp \beta$, 设 α 与 β 的交线为 l_1 .

在平面 α 内, 过点 P 作直线 $PA \perp l_1$, 垂足为 A .

根据定理 2 得, $PA \perp \beta$.

又已知 $l \perp \beta$, 由于经过点 P 只有一条直线与平面 β 垂直,

因此直线 PA 与 l 重合, 从而 $l \subset \alpha$.

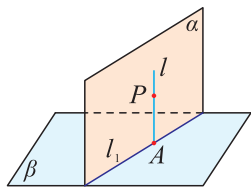
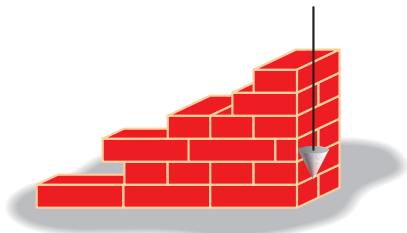


图 6.8-6

盖房子时，一定要保证墙面与水平面垂直. 建筑工人检查的办法是：用下端系有铅锤的线(它与水平面垂直)的上端贴住墙面，如果这根线紧贴墙面，那么墙面与水平面垂直；否则，墙面与水平面不垂直. 这么做的依据是什么呢？

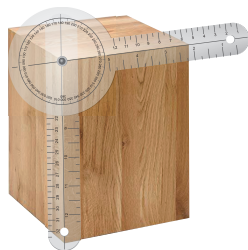


前一个结论的依据是定理 1，后一个结论的依据是例 2.

练习

A 组

1. 举出实际生活中二面角的例子.
2. 一个平面垂直于二面角的棱，它和二面角的两个面相交所得射线组成的角就是二面角的平面角，请说出道理.
3. 在 60° 的二面角的一个面内有一个点，它到另一个面的距离是 15 cm，求它到棱的距离.
4. 在一个山坡上，从坡脚的某处出发，沿一条与坡脚的水平线成 30° 角的直路前进. 如果行走 20 m 后升高了 5 m，求山坡的倾斜度.
5. 在一个二面角的一个面内有一点，它到棱的距离等于到另一个面的距离的 2 倍，求该二面角的大小.
6. 画互相垂直的两个平面，画两两垂直的三个平面.
7. 检查工件的相邻两个面是否垂直可采用下述方法：用测角计的一边紧贴在工件的一个面上，另一边转动，使另一边和另一个面紧贴，没有空隙. 若这时测角计指明的度数是 90° ，则这相邻的两个面互相垂直. 说明其中的道理.
8. 证明：如果一个平面的一条垂线平行于另一个平面，那么这两个平面互相垂直.



(第 7 题)

B 组

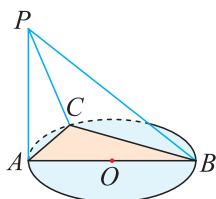
1. 从二面角内的一点分别向两个面引垂线. 证明: 它们所成的角与二面角的平面角互补.

2. 从二面角 $\alpha-l-\beta$ 的棱上一点在平面 β 内引一条射线, 此射线和平面 α 成 30° 角, 此射线和棱成 45° 角, 求二面角 $\alpha-l-\beta$ 的大小.

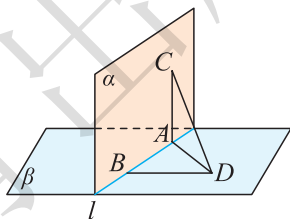
3. 从 120° 的二面角 $\alpha-l-\beta$ 内一点 P , 分别引平面 α, β 的垂线 PA, PB , 垂足分别为 A, B . 设 $PA=8$ cm, $PB=6$ cm, 求 AB 的长.

4. 试问: 垂直于同一个平面的两个不重合的平面平行吗?

5. 如图, AB 是圆 O 的直径, PA 垂直于圆 O 所在的平面, C 是圆上任意一点. 证明: 平面 $PAC \perp$ 平面 PBC .



(第5题)



(第6题)

6. 如图, 设平面 α 与 β 垂直, 它们的交线 l 上有两点 A, B , 在平面 α 内作 $AC \perp l$, 在平面 β 内作 $BD \perp l$. 若 $AC=6$ cm, $BD=4$ cm, $AB=3$ cm, 求 CD 的长.

阅读材料

证明二面角的平面角相等

命题 1 如果一个角的两边与另一个角的两边分别平行并且方向相同, 那么这两个角相等.

已知: $\angle AOB$ 与 $\angle A'O'B'$ 的两边分别平行并且方向相同, 如图(1)所示.

求证: $\angle AOB = \angle A'O'B'$.

证明 将 $\angle AOB$ 沿 $\overrightarrow{OO'}$ 的方向平移, 则点 O 的像为点 O' , 设射线 OA 的像为射线 $O'A''$, 射线 OB 的像为射线 $O'B''$.

由于平移把直线变成与它平行的直线, 因此 $OA \parallel O'A''$, $OB \parallel O'B''$.

又已知 $OA \parallel O'A'$, $OB \parallel O'B'$, 并且射线 OA 与射线 $O'A'$ 的方向相同, 射线 OB 与射线 $O'B'$ 的方向相同, 因此运用平行公理得, 射线 $O'A''$ 与射线 $O'A'$ 重合, 射线 $O'B''$ 与射线 $O'B'$ 重合.

于是在上述平移下, $\angle AOB$ 的像是 $\angle A'O'B'$. 又由于平移不改变角的大小, 因此 $\angle AOB = \angle A'O'B'$.

命题 2 在二面角的棱上取不同的点, 得到的平面角是相等的.

已知: 在二面角 $\alpha-l-\beta$ 的棱 l 上取两个不同的点 A, B . 在平面 α 内, 过点 A 作射线 $AC \perp l$, 过点 B 作射线 $BD \perp l$, 在平面 β 内, 过点 A 作射线 $AE \perp l$, 过点 B 作射线 $BF \perp l$, 得到两个平面角: $\angle EAC, \angle FBD$, 如图(2)所示.

求证: $\angle EAC = \angle FBD$.

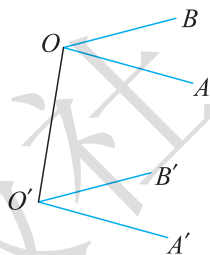
证明 在平面 α 内, 由于 $AC \perp l, BD \perp l$,

因此 $AC \parallel BD$, 且射线 AC 与射线 BD 的方向相同.

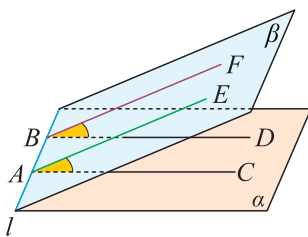
在平面 β 内, 由于 $AE \perp l, BF \perp l$,

因此 $AE \parallel BF$, 且射线 AE 与射线 BF 的方向相同.

根据命题 1 得, $\angle EAC = \angle FBD$.



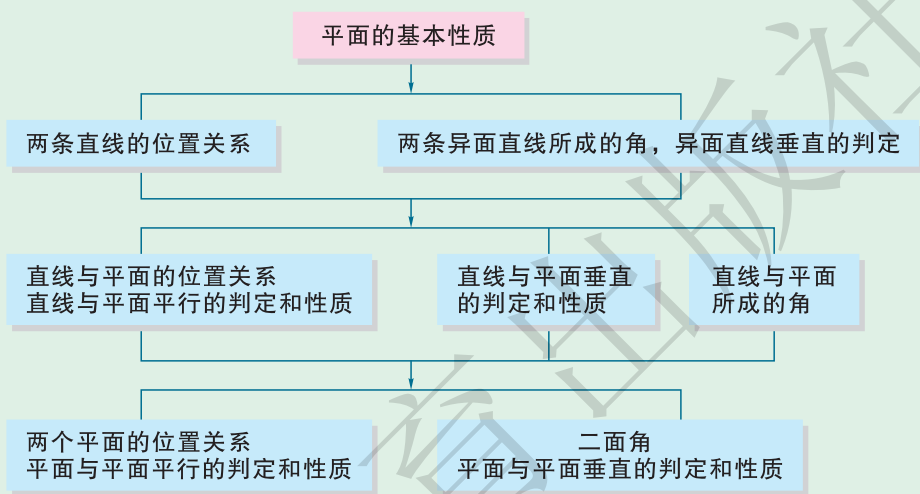
(1)



(2)

本章小结

一、本章知识结构



二、本章知识要点

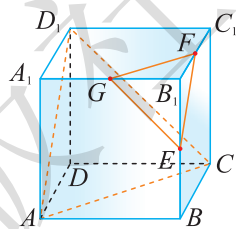
- 平面的基本性质：公理 1，公理 2，公理 3，推论 1，推论 2，推论 3.
- 两条直线的位置关系，异面直线的判定.
- 平行关系的传递性：平行于同一条直线的两条不重合的直线平行.
- 两条异面直线所成的角；异面直线垂直的判定.
- 直线与平面的位置关系，直线与平面平行的判定和性质.
- 直线与平面垂直的定义；直线与平面垂直的判定和性质.
- 斜线在平面上的射影，三垂线定理，直线与平面所成的角.
- 两个平面的位置关系；平面与平面平行的判定和性质.
- 二面角，二面角的平面角，两个平面所成的角.
- 平面与平面垂直的判定和性质.

复习题六

A 组

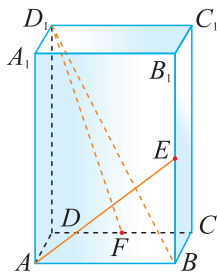
1. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, A_1D_1 与哪几条棱所在的直线异面?
2. 证明: 如果两个相交平面分别经过两条平行直线中的一条, 且这两条平行直线都不是交线, 那么它们的交线和这两条直线平行.

3. 如图, 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E, F, G 分别是棱 B_1B, B_1C_1, B_1A_1 的中点. 证明: 平面 EFG 与平面 ACD_1 平行.



(第3题)

4. 在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 求:
 - (1) 点 D 到平面 ACC_1 的距离;
 - (2) 直线 D_1D 到平面 ACC_1 的距离.
5. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,
 - (1) 证明: $B_1D \perp AC$;
 - (2) 求 B_1D 与平面 ABC 所成角的正切值.
6. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 求二面角 D_1-AC-D 的正切值.
7. 如图, 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=2$, $AD=1$, $AA_1=3$, E, F 分别是棱 BB_1, DC 的中点. 求:
 - (1) D_1B 和 DC 所成角的余弦值;
 - (2) AE 和 A_1D_1 所成角的大小;
 - (3) D_1F 和 BC 所成角的大小.
8. 证明: 如果一个平面和不在这个平面内的一条直线都垂直于另一个平面, 那么这个平面和这条直线平行.
9. 证明: 如果两个平行平面中的一个垂直于第三个平面, 那么另一个也垂直于第三个平面.



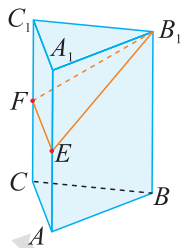
(第7题)

B 组

1. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E, F, G 分别是棱 B_1B, B_1C_1, B_1A_1 的中点. 求二面角 $B-FG-E$ 的余弦值.

2. 正三棱锥的底面边长为 a , 高为 $2a$, 求侧面与底面所成的角的正切值.

3. 如图, 直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面是直角三角形, 其中 $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1 = 90^\circ$, $AB = 2$, $AC = 1$, 棱柱的高是 3, E, F 分别是侧棱 A_1A, C_1C 的中点. 求:



(第3题)

(1) B_1E 与 AC 所成角的大小;

(2) B_1E 与 BC 所成角的余弦值;

(3) 截面 EB_1F 的面积.

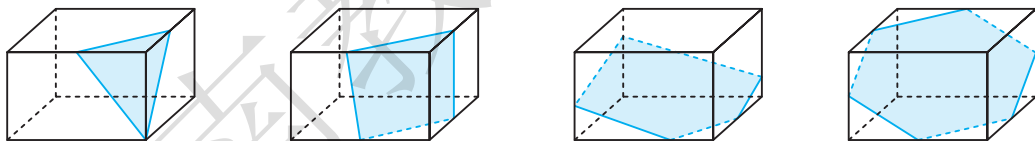
4. 在四面体 $ABCD$ 中, $AB = CD$, M, N, G, H 分别是 AC, BD, AD, BC 的中点. 证明: $MN \perp GH$.

5. 设 $S-ABC$ 是正三棱锥, 证明: $SA \perp BC$.

6. 证明: 如果两个相交平面都和第三个平面垂直, 那么它们的交线与第三个平面垂直.

7. (数学探究活动) 用一个平面去截长方体, 截面的形状将会是什么样的?

若想看到截面的样子, 可以用一个长方体的盒子, 内装一定量的液体, 以不同的方向角度倾斜. 观察液体表面的变化, 我们看到: 液面可以是三角形、四边形、五边形或六边形. 观察并思考下列问题:



(第7题)

(1) 液面不会是七边形, 为什么?

(2) 当液面是三角形时, 一定是锐角三角形, 为什么?

(3) 当液面是四边形时, 这个四边形有什么特点?

(4) 设长方体有公共顶点的三条棱长分别为 a, b, c ($a < b < c$), 液面会是正方形吗?

(5) 液面不会是正五边形, 为什么?

(6) 在什么条件下, 液面呈正六边形?

(7) 当液面是三角形时, 液体体积与长方体体积之比的范围是多少?

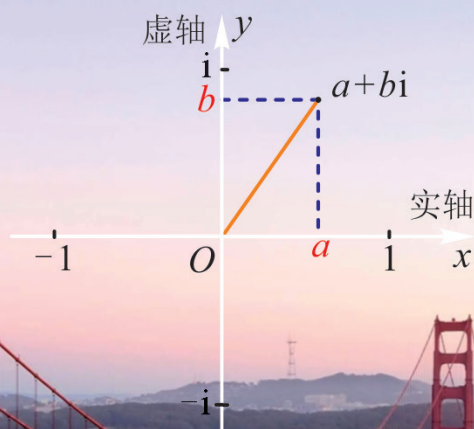
(8) 当液面是六边形时, 液体体积与长方体体积之比的范围是多少?

第7章

复数

本章结构

- 7.1 复数的概念
- 7.2 复数的运算
- 7.3 复数的几何表示
- 7.4 复数的应用



学以致用

为了能够解 $x^2+1=0$ 这样的方程, 人们引入了一个新的数 i , 叫作虚数单位, 它具有下列性质: $i^2=-1$; 实数与 i 进行四则运算时, 原有的加法、乘法运算法则仍然成立. 形如 $a+bi$ (其中 $a, b \in \mathbf{R}$) 的数叫作复数, 其中 a 叫作实部, b 叫作虚部. 当 $b=0$ 时, 复数 $a+0i$ 就是实数 a ; 当 $b \neq 0$ 时, 复数 $a+bi$ 叫作虚数; 当 $a=0$ 且 $b \neq 0$ 时, 复数 bi 叫作纯虚数. $a+bi=c+di$ 当且仅当 $a=c$ 且 $b=d$. 实数集 $\mathbf{R}$ 是复数集 $\mathbf{C}$ 的真子集.

复数有加法、减法和乘法运算: $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$, $(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$, $(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$.

人们发现复数的加法(减法)运算, 实数与复数的乘法运算与平面向量的加法(减法)运算, 数乘向量的运算有许多相像之处, 于是引入了复平面的概念, 每一个复数 $z=a+bi$ 对应于复平面上唯一确定的点 $Z(a, b)$; 进而每一个复数 $z=a+bi$ 对应于复平面上唯一确定的向量 $\overrightarrow{OZ}$, 其中 $\overrightarrow{OZ}$ 的坐标为 (a, b) . 向量 $\overrightarrow{OZ}$ 的长度 $|\overrightarrow{OZ}|$ 称为复数 z 的模, 记作 $|z|$. 复平面上两点的距离等于对应的两个复数之差的模. 复平面上单位圆的方程是 $|z|=1$. 复数的几何表示为复数的应用打开了闸门.

实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0 (a \neq 0)$ 当判别式 $\Delta=b^2-4ac < 0$ 时, 有且只有一对共轭虚根: $x_1 = \frac{-b+\sqrt{-(b^2-4ac)}i}{2a}$, $x_2 = \frac{-b-\sqrt{-(b^2-4ac)}i}{2a}$. 根与系数的关系为 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$, $x_1x_2=\frac{c}{a}$. 于是在复数集中, 实系数一元二次方程都有根.

7.1 复数的概念



观察

在实数集 $\mathbf{R}$ 中, 方程 $x^2 + 1 = 0$ 没有解, 因为任何实数的平方都不会等于 -1 .



探索

为了使二次方程 $x^2 + 1 = 0$ 有解, 人们引入了一个新的数 i , 叫作**虚数单位**, 它具有下列性质:

(i) $i^2 = -1$;

(ii) 实数与 i 进行四则运算时, 原有的加法、乘法运算法则仍然成立.

根据上述性质, 实数 b 与 i 相乘, 其乘积可写成 bi ; 再将 bi 与实数 a 相加, 其和可以写成 $a + bi$.

形如 $a + bi$ (其中 $a, b \in \mathbf{R}$) 的数叫作**复数**, 其中 a 叫作复数的**实部**, b 叫作复数的**虚部**. $a + bi$ 称为复数的**代数形式**.



i 是数学家欧拉最早引入的, 它是 imaginary (虚幻的) 的首字母.



例 1 求以下复数的实部和虚部:

(1) $1 - i$; (2) $3 + 2\sqrt{2}$; (3) $-i$.



解 (1) $1 - i = 1 + (-1)i$, 实部为 1, 虚部为 -1 .

(2) $3 + 2\sqrt{2} = (3 + 2\sqrt{2}) + 0i$, 实部为 $3 + 2\sqrt{2}$, 虚部为 0.

(3) $-i = 0 + (-1)i$, 实部为 0, 虚部为 -1 .

当 $b = 0$ 时, 复数 $a + 0i$ 就是实数 a ;

当 $b \neq 0$ 时, 复数 $a+bi$ 叫作**虚数**;

当 $a=0$ 且 $b \neq 0$ 时, 复数 bi 叫作**纯虚数**.

例如, 0.618 , $\frac{2}{7}i$, 0 , i , $5i+8$, $3-9\sqrt{2}i$ 中, 0.618 , 0 是实数, $\frac{2}{7}i$, i , $5i+8$, $3-9\sqrt{2}i$ 是虚数, 其中 $\frac{2}{7}i$, i 是纯虚数.

如果两个复数 $a+bi$ 与 $c+di$ 的实部与虚部分别相等, 那么称这两个**复数相等**, 记作 $a+bi=c+di$, 即

$$a+bi=c+di \Leftrightarrow a=c \text{ 且 } b=d.$$

从而

$$a+bi=0 \Leftrightarrow a=0 \text{ 且 } b=0.$$

所有复数组成的集合叫作**复数集**, 用 $\mathbf{C}$ 表示, 即

$$\mathbf{C}=\{a+bi|a,b \in \mathbf{R}\}.$$

显然, 实数集 $\mathbf{R}$ 是复数集 $\mathbf{C}$ 的真子集.

$\mathbf{C}$ 与 $\mathbf{R}$ 有一些不同的性质. 例如, 任意两个实数都可以比较大小; 而两个复数, 如果不全是实数, 那么不能比较它们的大小.

在复数集 $\mathbf{C}$ 中, 方程 $x^2+1=0$ 至少有一个解: $x=i$. 由此看出把实数集扩充成复数集的好处, 可以把 i 写成 $\sqrt{-1}$.

通常用小写英文字母 z , w , $\cdots$ 表示复数.

例 2 已知 $(2a-1)+(3-a)i=a-(3+b)i$, 其中 $a, b \in \mathbf{R}$, 求 a 与 b .

解 根据复数相等的定义, 得

$$\begin{cases} 2a-1=a, \\ 3-a=-(3+b). \end{cases}$$

解得

$$a=1, b=-5.$$

练习

A 组

1. 下列各数中, 哪些是实数, 哪些是虚数?

$$\pi, i^2, -1+i, -i, \sqrt{5}.$$

2. 说出下列复数的实部与虚部:

$$-1-i, \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i, -2i, 0.$$

3. 已知实数 a, b 分别满足下列各式, 求 a 与 b .

(1) $2a+(a-3b)i=6;$

(2) $[1-(a+b)]+(a-b)i=0.$

B 组

1. 下列各数中, 哪些是实数, 哪些是虚数, 哪些是纯虚数?

$$\cos \frac{2\pi}{3}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}, i \sin \frac{\pi}{3}.$$

2. 说出下列复数的实部与虚部:

$$2i+1, \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}, i \sin \frac{\pi}{2}.$$

3. 已知实数 a, b 分别满足下列各式, 求 a 与 b .

(1) $(2a-3b)+4bi=12-8i;$

(2) $(3a+b)-(4b-3a)i=2-23i;$

(3) $(2a+5b-9)+(2a-3b)i=17i.$

4. 求 m 为何实数时, 复数 $z=m^2+m-6+(m^2-2m-15)i$ 是:

(1) 实数;

(2) 虚数;

(3) 纯虚数.

7.2 复数的运算



回顾

我们已经学过一元多项式的加法运算，例如，

$$(a+bx)+(c+dx)=(a+c)+(b+d)x.$$



抽象

类似地，复数的加法运算规定为

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i,$$

即两个复数相加只要把它们的实部、虚部分别相加，作为和的实部、虚部。

容易验证，复数的加法满足下列运算法则：

对任意复数 z_1, z_2, z_3, z ，有

(i) $z_1+z_2=z_2+z_1$ (交换律)；

(ii) $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$ (结合律)；

(iii) $z+0=0+z=z$ ；

(iv) 设 $z=a+bi$ ，令 $-z=(-a)+(-b)i$ ，则

$$z+(-z)=(-z)+z=0,$$

把 $-z$ 叫作 z 的相反数。

复数的减法运算规定如下：

$$z_1-z_2=z_1+(-z_2).$$

于是

$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i,$$

即两个复数相减只要把被减数的实部、虚部分别减去减数的实部、虚部，作为

差的实部、虚部.

例 1 设 $z_1 = 2 + 5i$, $z_2 = -1 + i$, 求 $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$.

解 $z_1 + z_2 = (2 + 5i) + (-1 + i) = [2 + (-1)] + (5 + 1)i = 1 + 6i$;

$z_1 - z_2 = (2 + 5i) - (-1 + i) = [2 - (-1)] + (5 - 1)i = 3 + 4i$.

例 2 设 $z_1 = 3i$, $z_2 = 1 - i$, $z_3 = -2 + 5i$, 求 $z_1 + z_2 - z_3$.

解 $z_1 + z_2 - z_3 = 3i + (1 - i) - (-2 + 5i)$
 $= [0 + 1 - (-2)] + [3 + (-1) - 5]i$
 $= 3 - 3i$.



回顾

我们已经学过一元多项式的乘法, 例如,

$$(a + bx)(c + dx) = ac + adx + bcx + bdx^2 = ac + (ad + bc)x + bdx^2.$$



抽象

类似地, **复数的乘法**运算规定为

$$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

容易验证, 复数的乘法满足下列运算法则:

对任意复数 z_1, z_2, z_3, z , 有

(i) $z_1 z_2 = z_2 z_1$ (交换律);

(ii) $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$ (结合律);

(iii) $1 \cdot z = z \cdot 1 = z$;

(iv) $z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$, $(z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$ (分配律).

例 3 设 $z_1 = 2 + 5i$, $z_2 = -1 + i$, 求 $z_1 z_2$.

解 $z_1 z_2 = (2+5i)(-1+i) = -2+2i-5i+5i^2 = -7-3i.$

例 4 计算 $(1-3i)(2+i)(-2+4i).$

解
$$\begin{aligned}(1-3i)(2+i)(-2+4i) &= (2+i-6i-3i^2)(-2+4i) \\ &= (5-5i)(-2+4i) \\ &= -10+20i+10i-20i^2 = 10+30i.\end{aligned}$$



抽象

由于复数的乘法满足结合律, 因此可以规定

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \cdots \cdot z}_{n\text{个}}, n \in \mathbf{N}^*,$$

我们还规定

$$z^0 = 1, \text{ 其中 } z \neq 0.$$

容易验证, 对任意复数 z, z_1, z_2 , 以及任意正整数 n, m , 有

$$\begin{aligned}z^n \cdot z^m &= z^{n+m}, \\ (z^n)^m &= z^{nm}, \\ (z_1 \cdot z_2)^n &= z_1^n \cdot z_2^n.\end{aligned}$$

下面我们来计算 i 的正整数指数幂:

$$\begin{aligned}i^1 &= i, i^2 = -1, \\ i^3 &= i^2 \cdot i = -i, \\ i^4 &= (i^2)^2 = (-1)^2 = 1.\end{aligned}$$

从而对任意正整数 n , 有

$$\begin{aligned}i^{4n} &= (i^4)^n = 1^n = 1, \\ i^{4n+1} &= i^{4n} \cdot i = 1 \cdot i = i, \\ i^{4n+2} &= i^{4n} \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1, \\ i^{4n+3} &= i^{4n} \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i.\end{aligned}$$

即对任意正整数 n , 有

$$i^{4n} = 1, i^{4n+1} = i, i^{4n+2} = -1, i^{4n+3} = -i.$$

由于复数的乘法满足交换律, 因此完全平方公式与平方差公式在复数集中仍然成立, 即对任意复数 z_1, z_2 , 有

$$(z_1 + z_2)^2 = z_1^2 + 2z_1z_2 + z_2^2,$$

$$(z_1 - z_2)^2 = z_1^2 - 2z_1z_2 + z_2^2,$$

$$(z_1 + z_2)(z_1 - z_2) = z_1^2 - z_2^2.$$

例 5 设 $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, 求 z^2, z^3 .

解 $z^2 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times \frac{\sqrt{3}}{2}i + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{3}{4}$$

$$= -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i;$$

$$z^3 = z \cdot z^2 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2$$

$$= \frac{1}{4} - \left(-\frac{3}{4}\right) = 1.$$

例 6 计算 $(a+bi)(a-bi)$.

解 $(a+bi)(a-bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - (-b^2)$
 $= a^2 + b^2.$



抽象

设 $z = a + bi$, 我们把 $a - bi$ 叫作 z 的**共轭复数**, 记作 $\bar{z}$.

从共轭复数的定义和复数相等的定义,得

$$z = \bar{z} \Leftrightarrow b = -b$$

$$\Leftrightarrow b = 0$$

$$\Leftrightarrow z \text{ 是实数.}$$

即复数 z 是实数当且仅当 $z = \bar{z}$.

又容易得出,

$$z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a.$$

即复数 z 与它的共轭复数 $\bar{z}$ 的和是一个实数,它等于 z 的实部的2倍.

从例6得出, $z\bar{z}$ 是一个实数,它等于 z 的实部与虚部的平方和,即 $z\bar{z} = a^2 + b^2$, 其中 $z = a + bi$.

命题 设 z_1 和 z_2 都是复数, 则

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2, \quad (1)$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2, \quad (2)$$

即两个复数的和(差、积)的共轭复数等于它们的共轭复数的和(差、积).

证明 设 $z_1 = a_1 + b_1i$, $z_2 = a_2 + b_2i$, 则

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i, \quad z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i,$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i.$$

于是

$$\overline{z_1 + z_2} = (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2)i = (a_1 - b_1i) + (a_2 - b_2i) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2,$$

$$\overline{z_1 - z_2} = (a_1 - a_2) - (b_1 - b_2)i = (a_1 - b_1i) - (a_2 - b_2i) = \bar{z}_1 - \bar{z}_2,$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = (a_1a_2 - b_1b_2) - (a_1b_2 + a_2b_1)i = (a_1 - b_1i)(a_2 - b_2i) = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2.$$

例 7 设 $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, 证明: z 与 $\bar{z}$ 都是一元二次方程 $x^2 + x + 1 = 0$

的根.

证明 在例5中已求出

$$z^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

于是

$$z^2 + z + 1 = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + 1 = 0,$$

因此 z 是方程 $x^2 + x + 1 = 0$ 的一个根.

在等式 $z^2 + z + 1 = 0$ 两边取共轭复数, 利用(1)、(2)式得

$$\bar{z}^2 + \bar{z} + 1 = 0.$$

因此 $\bar{z}$ 也是方程 $x^2 + x + 1 = 0$ 的一个根.

练习

A 组

1. 计算:

(1) $(1+i) + (1-i);$

(2) $(2-i) + (-3+5i);$

(3) $-7i + (6-5i);$

(4) $(5-i) + (-5-i);$

(5) $6 + (-2+3i);$

(6) $(-3-i) + 9i.$

2. 计算:

(1) $(1-i) - (1+i);$

(2) $(2+3i) - (5-4i);$

(3) $5 - (1+3i);$

(4) $-2i - (6+7i).$

3. 计算:

(1) $(-1+i) + (1-3i) - 5i;$

(2) $5i - (3-2i) + (1+4i).$

4. 计算:

(1) $(-1+\sqrt{3}i)(-1-\sqrt{3}i);$

(2) $-2i(3+4i);$

(3) $(2-3i)(4+7i);$

(4) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right);$

(5) $(1-i)^2;$

(6) $(1+i)^3;$

(7) $\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2;$

(8) $(1+i)^2 + (1-i)^2.$

5. 计算 $i^5, i^7, i^8, i^{11}, i^{14}.$

6. 已知复数 z , 求 $\bar{z}$ 以及 $z\bar{z}$, $z+\bar{z}$.

(1) $z=2+3i$;

(2) $z=5-4i$;

(3) $z=-\frac{\sqrt{3}}{2}i$;

(4) $z=\sqrt{3}$.

7. 证明: i 与 $-i$ 都是方程 $x^2+1=0$ 的根.

8. 设 $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, 证明: z 与 $\bar{z}$ 都是方程 $x^3=1$ 的根.

B 组

1. 计算:

(1) $\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right) + \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right)$;

(2) $(\cos \pi + i \sin \pi) - \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}\right)$.

2. 求复数 z :

(1) $z+(5-3i)=1+4i$;

(2) $z-(1+2i)=2-7i$.

3. 计算:

(1) i^4-1 ;

(2) $(-i)^4-1$;

(3) $(i^4-1)(i^4+1)$;

(4) $(i^3-1)(i^3+1)$;

(5) $\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right) \left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3}\right)$.

4. 已知 $z+\bar{z}=6$, $z\bar{z}=25$, 求 z .

7.3 复数的几何表示

为了使方程 $x^2+1=0$ 有解, 引入了虚数单位 i , 即 $\sqrt{-1}$, 从而把实数集扩充成了复数集. 历史上, 当虚数 $a+bi$ 没有在现实世界中获得应用时, 不少人对它投下怀疑的目光. 在复数有了几何表示而使得其在现实世界中得到应用时, 人们才消除了对虚数的疑虑.



探索

我们已经知道, 每一个复数 z 能唯一地写成 $a+bi$ (其中 $a, b \in \mathbf{R}$) 的形式, 从而每一个复数 $z=a+bi$ 确定了唯一的有序实数对 (a, b) . 而在平面上建立了直角坐标系 xOy 后, 每一个有序实数对 (a, b) 确定了平面上唯一的一个点 Z , 它的坐标是 (a, b) .

因此, 每一个复数 $z=a+bi$ 对应于平面上唯一确定的点 $Z(a, b)$. 反之, 平面上每一个点 $Z(a, b)$ 对应于唯一确定的复数 $z=a+bi$.

这表明, 在平面上建立直角坐标系 xOy 后, 复数集 $\mathbf{C}$ 与平面上所有的点组成的集合 S 之间有一个一一对应.

于是复数 $z=a+bi$ 可以用平面上的点 $Z(a, b)$ 来表示. 建立了直角坐标系来表示复数的平面叫作复平面, 如图 7.3-1 所示.

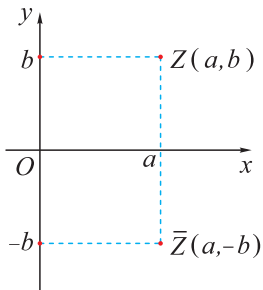


图 7.3-1



1831 年, 高斯系统地表述了复数 $a+bi$ 与笛卡儿直角坐标平面上的点的一一对应关系, 从而进一步肯定了复平面这一概念. 后人也将复平面称为高斯平面.

显然有

z 是实数 $a \Leftrightarrow$ 点 $Z(a, 0)$ 在 x 轴上;

z 是纯虚数 $bi \Leftrightarrow$ 点 $Z(0, b)$ 在 y 轴上且不是原点.

因此, 我们把 x 轴叫作**实轴**, 把 y 轴叫作**虚轴**. 于是**实轴上的点都表示实数, 虚轴上的点除去原点以外都表示纯虚数**.

在复平面内, 复数 $z = a + bi$ 用点 $Z(a, b)$ 表示, 它的共轭复数 $\bar{z} = a - bi$ 用点 $\bar{Z}(a, -b)$ 表示. 容易看出, 点 $Z(a, b)$ 与点 $\bar{Z}(a, -b)$ 关于实轴对称, 如图 7.3-1 所示.



虚轴上的原点 O 不表示纯虚数, 而是表示实数 0 .

例 1 在复平面内分别描出表示下列复数的点:

(1) $1 + i$;

(2) $-\frac{1}{2}i$.

解 如图 7.3-2 所示, 点 A 表示复数 $1 + i$, 点 B 表

示 $-\frac{1}{2}i$.

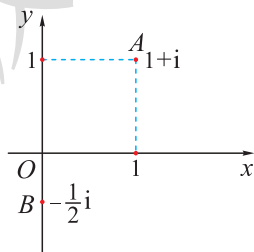


图 7.3-2

由于平面上所有点组成的集合与平面上所有定位向量 (即以原点 O 为起点的向量) 组成的集合之间有一个一一对应, 因此**复数集 $\mathbf{C}$ 与复平面上所有定位向量组成的集合之间有一个一一对应: 每一个复数 $z = a + bi$ 对应于向量 $\overrightarrow{OZ}$, 其中 $\overrightarrow{OZ}$ 的坐标为 (a, b) , 于是复数 $z = a + bi$ 可以用向量 $\overrightarrow{OZ}$ 表示**, 如图 7.3-3 所示.

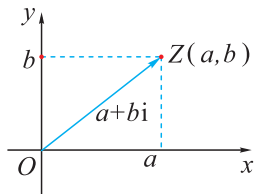


图 7.3-3

用复平面上的向量 $\overrightarrow{OZ}$ 表示复数 $z = a + bi$, 比起用点 Z 表示复数 z 有许多优越的地方, 其中一个优点是: 向量有长度.

如果复数 $z = a + bi$ 对应于向量 $\overrightarrow{OZ}$, 那么我们把 $\overrightarrow{OZ}$ 的长度 $|\overrightarrow{OZ}|$ 叫作**复数 z 的模**, 记作 $|z|$.

由于 $\overrightarrow{OZ}$ 的坐标是 (a, b) , 因此 $|\overrightarrow{OZ}| = \sqrt{a^2 + b^2}$, 从而

$$|z| = |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2},$$

即复数 z 的模等于它的实部与虚部的平方和的算术平方根.

由于 $z\bar{z} = a^2 + b^2$, 因此

$$z\bar{z} = |z|^2.$$



想一想, 当复数 z 是实数时, 用这个公式算出的 $|z|$ 是否与以前熟悉的绝对值一致?

例 2 求下列复数的模:

$$(1) z_1 = 1-i; \quad (2) z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

解 (1) $|z_1| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2};$

$$(2) |z_2| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1.$$

例 3 设复数 z 分别满足下列条件, 那么在复平面上 z 对应的点 Z 的集合是什么图形?

$$(1) |z| = 3; \quad (2) 1 \leq |z| \leq 3.$$

解 (1) 由于 $|z| = 3 \Leftrightarrow |\overrightarrow{OZ}| = 3 \Leftrightarrow$ 点 Z 与原点 O 的距离为 3, 因此满足 $|z| = 3$ 的点 Z 的集合是以原点 O 为圆心, 半径为 3 的圆, 如图 7.3-4 所示.

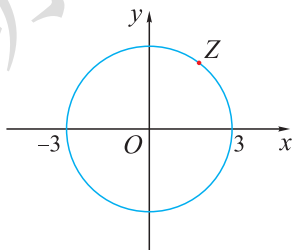


图 7.3-4

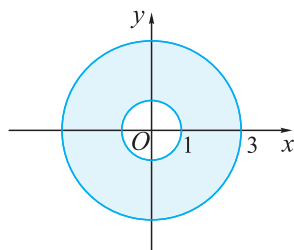


图 7.3-5

(2) 由于 $|z| \leq 3 \Leftrightarrow |\overrightarrow{OZ}| \leq 3 \Leftrightarrow$ 点 Z 与原点 O 的距离小于或等于 3, 因此满足 $|z| \leq 3$ 的点 Z 的集合是: 以原点 O 为圆心, 半径为 3 的圆和它的内部.

类似地, 我们可以知道, 满足 $|z| \geq 1$ 的点 Z 的集合是: 以原点 O 为圆心, 半径为 1 的圆以及它的外部.

因此满足 $1 \leq |z| \leq 3$ 的点 Z 的集合是上述两个集合的交集, 即以原点 O 为圆心, 半径分别为 3 和 1 的两个圆所夹的圆环及其边界部分, 如图 7.3-5 所示.

评注 用向量表示复数的另一个优点是: 向量有加法运算以及数乘向量的运算, 而复数也有加法运算以及实数乘复数的运算, 并且复数与向量的对应分别保持了这两种运算. 意思是:

如果复数 z_1, z_2 分别对应于向量 $\overrightarrow{OZ_1}, \overrightarrow{OZ_2}$, 那么 $z_1 + z_2$ 对应于 $\overrightarrow{OZ_1} + \overrightarrow{OZ_2}$; $z_1 - z_2$ 对应于 $\overrightarrow{OZ_1} - \overrightarrow{OZ_2}$; kz_1 对应于 $k\overrightarrow{OZ_1}$, 其中 k 是任意实数.

例 4 用复数的语言表述复平面上两点的距离.

解 设复平面上两点 Z_1, Z_2 分别对应于复数 z_1, z_2 , 如图 7.3-6 所示, 则 Z_1, Z_2 两点的距离为

$$|Z_2 Z_1| = |\overrightarrow{OZ_1} - \overrightarrow{OZ_2}| = |z_1 - z_2|.$$

即 Z_1, Z_2 两点的距离等于 $|z_1 - z_2|$.

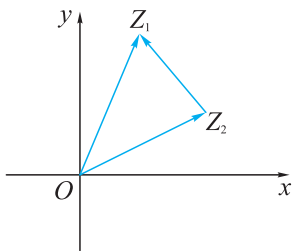


图 7.3-6

例 4 表明, 复平面上两点的距离等于对应的两个复数之差的模.

例 5 用复数的语言给出复平面上以点 Z_0 为圆心, 半径为 r 的圆的方程.

解 设点 Z_0 对应于复数 z_0 , 点 Z 对应于复数 z , 则

点 Z 在以点 Z_0 为圆心, 半径为 r 的圆上

$\Leftrightarrow$ 点 Z 与点 Z_0 的距离等于 r

$\Leftrightarrow |z - z_0| = r,$

所以 $|z - z_0| = r$ 就是复平面上以点 Z_0 为圆心, 半

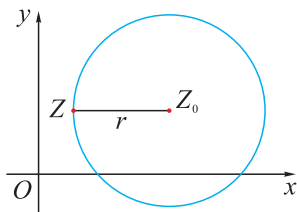


图 7.3-7

径为 r 的圆的方程, 如图 7.3-7 所示.

从例 3、例 4、例 5 看到, 让复数对应于复平面上的点, 进而对应于复平面上的定位向量后, 就可以利用复数来简洁地表示平面图形的方程, 从而可以利用复数的理论来研究平面图形的性质, 因此复数的几何表示就为复数的应用打开了闸门.

练习

A 组

1. 在复平面内分别描出表示下列复数的点:

- (1) $1-i$; (2) $-i$; (3) $-1+i$;
(4) $2i$; (5) -2 ; (6) $-2-i$.

2. 在复平面内分别描出表示下列复数及其共轭复数的点:

- (1) $2+i$; (2) $-1-i$; (3) 2 ;
(4) $\frac{3}{2}i$; (5) $-2i$; (6) $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

3. 说出下列复数对应的点分别在复平面的哪个轴上:

- $-5i$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}-1$, $\frac{3}{4}i$, $-\sqrt{7}i$.

4. 说出下列复数对应的点分别在复平面的哪个象限内:

- $2+3i$, $1-2i$, $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $-1+i$.

5. 写出下列复数对应的复平面上的定位向量的坐标:

- (1) $z_1=1-2i$; (2) $z_2=-3+7i$;
(3) $z_3=-5i$; (4) $z_4=\sqrt{3}$.

6. 求下列复数及其共轭复数的模:

- (1) $z_1=2+i$; (2) $z_2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$;
(3) $z_3=-3i$; (4) $z_4=a+bi$.

7. 设复数 z 分别满足下列条件, 那么在复平面上 z 对应的点 Z 的集合是什么图形?

(1) $|z|=\sqrt{3}$; (2) $2<|z|\leq 5$.

8. 设 $z_1=3+4i$, $z_2=4-3i$, 求它们对应的复平面上的点 Z_1 和 Z_2 之间的距离.

9. 设复数 z 分别满足下列条件, 那么在复平面上 z 对应的点 Z 的集合是什么图形? 并画出图形.

(1) $|z-1|=2$; (2) $|z-(1-i)|=1$;
(3) $|z-i|\leq 1$; (4) $|z-1|>1$.

B 组

1. 在复平面上分别描出表示下列复数及其共轭复数的点:

(1) $-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$; (2) $3+4i$;
(3) $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$; (4) $-\frac{5}{2}i$.

2. 实部为负数的复数对应的点位于复平面上的什么区域内?

3. 复数 $z=\cos \theta+i \sin \theta$ (其中 θ 是实数) 对应的复平面上的点 Z 在什么图形上?

4. 设 $z_0=-1+2i$ 对应于复平面上的点 Z_0 , 用复数的语言给出复平面上以点 Z_0 为圆心, 半径为 1 的圆的方程.

5. 设复平面上 $\triangle ABC$ 的顶点 A, B, C 对应的复数分别为 $z_1=-1+3i$, $z_2=-\frac{1}{2}-i$, $z_3=\frac{5}{2}+i$. 判断 $\triangle ABC$ 的形状.

6. 设复平面上的点 Z_1, Z_2 分别对应于复数 z_1, z_2 , 那么线段 Z_1Z_2 的中点 M 对应的复数是什么?

7. 设 $z_1=-1+2i$, $z_2=2+i$, 它们分别对应于复平面上的点 Z_1, Z_2 . 判断 $\angle Z_1OZ_2$ 是不是直角.

7.4 复数的应用



回顾

实系数一元二次方程

$$ax^2+bx+c=0(a\neq 0), \quad (1)$$

当它的判别式 $\Delta=b^2-4ac>0$ 时, 有两个不等实根; 当 $\Delta=0$ 时, 有两个相等实根; 当 $\Delta<0$ 时, 没有实根.



探索

实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 当 $\Delta=b^2-4ac<0$ 时, 在复数集中有没有根? 不妨设 $a>0$.

$$ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0. \quad (2)$$

把(2)式左端的 x 的多项式因式分解:

$$\begin{aligned} x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a} &= \left[x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2 \right] + \frac{c}{a} \\ &= \left(x+\frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \\ &= \left(x+\frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}. \end{aligned} \quad (3)$$

由于 $b^2-4ac<0$, 因此 $4ac-b^2>0$. 从而

$$b^2-4ac=(4ac-b^2)(-1)=(\sqrt{4ac-b^2})^2\mathrm{i}^2=(\sqrt{4ac-b^2}\mathrm{i})^2. \quad (4)$$

把(4)式代入(3)式得

$$\begin{aligned} x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a} &= \left(x+\frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}\mathrm{i}}{2a} \right)^2 \\ &= \left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{4ac-b^2}\mathrm{i}}{2a} \right) \left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{4ac-b^2}\mathrm{i}}{2a} \right) \end{aligned}$$

$$= \left(x + \frac{b + \sqrt{4ac - b^2}i}{2a} \right) \left(x - \frac{-b + \sqrt{4ac - b^2}i}{2a} \right),$$

于是

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x + \frac{b + \sqrt{4ac - b^2}i}{2a} = 0 \text{ 或 } x - \frac{-b + \sqrt{4ac - b^2}i}{2a} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-b - \sqrt{4ac - b^2}i}{2a} \text{ 或 } x = \frac{-b + \sqrt{4ac - b^2}i}{2a}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-b - \sqrt{-(b^2 - 4ac)}i}{2a} \text{ 或 } x = \frac{-b + \sqrt{-(b^2 - 4ac)}i}{2a}.$$

因此, 在复数集中, 当 $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ 时, 实系数一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 有且只有两个虚根:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{-(b^2 - 4ac)}i}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{-(b^2 - 4ac)}i}{2a}, \quad (5)$$

其中 $x_1 = \bar{x}_2$, 即当 $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ 时, 实系数一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 有且只有一对共轭虚根.

从(5)式得 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$,

$$x_1 x_2 = \frac{-b - \sqrt{-(b^2 - 4ac)}i}{2a} \cdot \frac{-b + \sqrt{-(b^2 - 4ac)}i}{2a}$$

$$= \left(\frac{-b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{-(b^2 - 4ac)}i}{2a} \right)^2$$

$$= \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$= \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

例 1 解方程 $x^2 + x + 2 = 0$.

解 $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -7 < 0$. 由(5)式得, 原方程的两个根是

$$z = \frac{-1 + \sqrt{7}i}{2}, \quad \bar{z} = \frac{-1 - \sqrt{7}i}{2}.$$

例 2 已知方程 $x^2 + x + 1 = 0$ 的一个根是 $z = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$, 写出这个方程

的另一个根, 并且求这两根之和与两根之积.

解 原方程的另一个根是

$$\bar{z} = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}.$$

$$z + \bar{z} = -1; z\bar{z} = 1.$$

练习

A 组

1. 解下列方程:

(1) $x^2 + 1 = 0$;

(2) $x^2 = -4$;

(3) $4x^2 + 9 = 0$;

(4) $x^2 - x + 1 = 0$;

(5) $2x^2 + x + 1 = 0$;

(6) $2x^2 - x + 1 = 0$.

2. 已知方程 $2x^2 + 2x + 1 = 0$ 的一个根是 $z = \frac{-1-i}{2}$, 写出这个方程的另一个根, 并且求这两根之和与两根之积.

B 组

1. 解下列方程:

(1) $x^2 + 2 = 0$;

(2) $x^2 = -5$;

(3) $3x^2 + 2 = 0$;

(4) $x^4 = 1$;

(5) $4x^2 + 2x + 1 = 0$;

(6) $x^2 - \sqrt{7}x + 8 = 0$.

2. 已知一元二次方程的两个根, 写出这个方程:

(1) $x_1 = \frac{-3 + \sqrt{5}i}{2}, x_2 = \frac{-3 - \sqrt{5}i}{2}$;

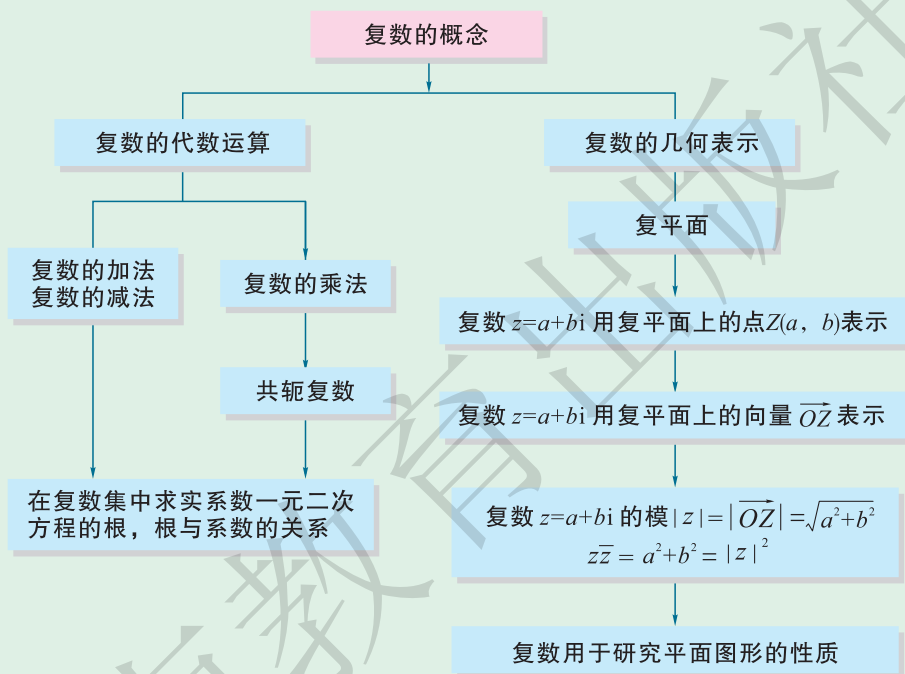
(2) $x_1 = \sqrt{13}i, x_2 = -\sqrt{13}i$.



本章小结



一、本章知识结构



二、本章知识要点

- 复数的概念, 两个复数相等的条件.
- 复数的加法运算、减法运算、乘法运算.
- 共轭复数的性质及性质.
- 复数的几何表示.
- 复数 $z=a+bi$ 的模 $|z|=|\vec{OZ}|=\sqrt{a^2+b^2}$, $z\bar{z}=|z|^2$.
- 复平面上两点的距离等于对应的两个复数之差的模.
- 复平面上的单位圆的方程是 $|z|=1$.
- 实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0 (a \neq 0)$ 当判别式 $\Delta=b^2-4ac < 0$ 时的求解.

复习题七

A 组

1. 写出下列复数的实部和虚部:

$$-3-2i, \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}, \frac{1-\sqrt{3}i}{2}, -5i, 10.$$

2. 已知实数 x, y 分别满足下列各式, 求 x 与 y :

(1) $(x-y) + (x+2y)i = -1+2i$;

(2) $(x+2) + (2x-y)i = -4i$;

(3) $(2x-y+3) + (x+3y-1)i = 0$.

3. 已知下列复数:

$$-1, i, 3-4i, 1+i, 2-\sqrt{2}i, -\sqrt{3}i.$$

(1) 求出上述每个复数的共轭复数;

(2) 在复平面内描出这些复数对应的点, 以及它们的共轭复数对应的点.

4. 已知复数 $z_1 = 2+3i, z_2 = -1+4i$, 求 $z_1 + z_2, z_1 - z_2, z_1 \cdot z_2, z_1^2, z_2^2, z_1^2 + z_2^2$.

5. 已知复数 $z = -5i$, 求 $\bar{z}, z + \bar{z}, z \cdot \bar{z}, |z|, |\bar{z}|$.

6. 设复数 z 分别满足下列条件, 那么在复平面上 z 对应的点 Z 的集合是什么图形? 并画出图形.

(1) $1 \leq |z| < 2$;

(2) $|z-3|=2$;

(3) $|z - (-1+i)| = 1$.

7. 已知复数 z_1, z_2 分别对应于复平面上的点 Z_1, Z_2 , 求 Z_1, Z_2 两点之间的距离.

(1) $z_1 = -1+2i, z_2 = 5i$;

(2) $z_1 = 2-3i, z_2 = -3+7i$.

8. 计算:

(1) $(3-2i)(1+i)(1-4i)$;

(2) $(a+bi)(a-bi)(-a+bi)(-a-bi)$;

(3) $(a+bi)(a^2-b^2-abi)$;

9. 在复数集中解下列方程:

(1) $x^2 - 2x + 3 = 0$;

(2) $2x^2 - 3x + 5 = 0$.

B 组

1. 求复数 z :

(1) $(z-3i)+z=-7i$; (2) $z-5i=-3+2i$.

2. 已知 $z+\bar{z}=8$, $z\bar{z}=64$, 求复数 z .

3. 已知一元二次方程的两个根为:

$$x_1=-1+\sqrt{3}i, x_2=-1-\sqrt{3}i,$$

写出这个方程.

4. 设 $z_1=2-3i$, $z_2=-3-2i$, 它们分别对应于复平面上的点 Z_1, Z_2 . 判断 $\angle Z_1OZ_2$ 是不是直角.

5. 在复数集中解下列方程:

(1) $x^2+3x+5=0$;

* (2) $x^3=1$;

(3) $x^4-4=0$;

* (4) $x^6=1$.