

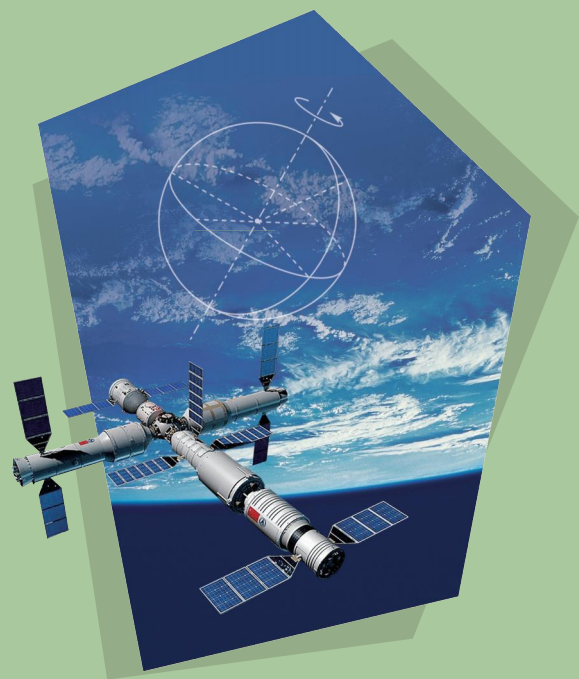


“十四五”职业教育国家规划教材
(中等职业学校公共基础课程教材)

数学

基础模块

下册



责任编辑: 邹楚林 李漫溢 袁 军
责任美编: 殷 健

ISBN 978-7-5710-1082-9



定价: 31.25 元

CIS

湖南科学技术出版社



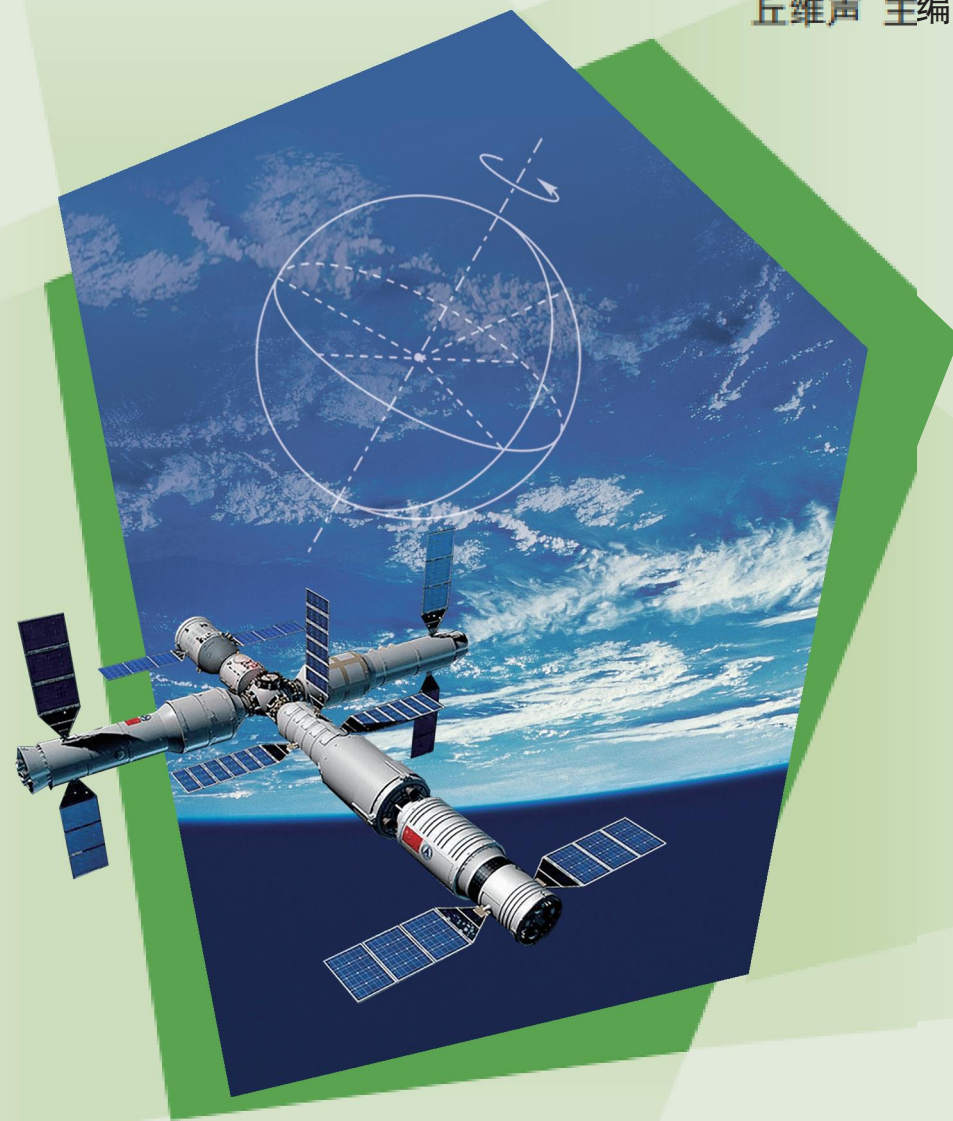
“十四五”职业教育国家规划教材
(中等职业学校公共基础课程教材)

数学

SHUXUE

基础模块 下册

丘维声 主编



CIS 湖南科学技术出版社



绿色印刷产品

前言

FOREWORD

根据教育部职业教育与成人教育司于2020年颁布的《中等职业学校数学课程标准》，我们编写了《数学·基础模块(上册)》《数学·基础模块(下册)》。这套教材的主要特色如下：

一、寓思想政治教育于教材内容中

《数学·基础模块(上册)》第1章《集合》的章头使用庆祝中华人民共和国成立70周年大会盛况的照片。第3章3.6节介绍了“中国天眼”，“中国天眼”的主要目标之一是寻找脉冲星，截至2021年3月，“中国天眼”发现脉冲星300余颗。脉冲星会不断发出脉冲信号。我们编写了一个脉冲信号的例子，画了它的图像。3.2节我们列表给出北京市从2013年至2020年全年空气质量优良的天数，其中2020年空气质量优良的天数为276天，占全年天数的 $\frac{3}{4}$ 。《数学·基础模块(下册)》第7章7.1节的开头语是：“锄禾日当午，汗滴禾下土。谁知盘中餐，粒粒皆辛苦。”接着说：“物体在太阳光线照射下会在地面留下它的影子，若中午的太阳光线与地面垂直，把物体对应到它的影子叫作正投影。”画三视图的关键是空间在平面上的正投影。

在第2章数学文化中，我们写上了“2021年5月15日7时18分，‘天问一号’着陆巡视器成功着陆于火星，我国首次火星探测任务着陆火星取得圆满成功”。

二、按照数学的思维方式编写教材

数学的思维方式把数学课程标准中的数学学科核心素养贯穿起来，突出数学学科核心素养的培养：数学运算、直观想象、逻辑推理、数学抽象、数据分析和数学建模。

数学的思维方式是一个全过程：观察客观现象，提出要研究的问题，抓住主要特征，抽象出概念；运用解剖麻雀、直觉、想象、归纳、类比、联想、逻

辑推理等进行探索，猜测可能有的规律；只使用公理、定义和已经证明了的定理进行逻辑推理来严密论证，揭示出事物的内在规律，从而使纷繁复杂的现象变得井然有序。“观察——抽象——探索——猜测——论证”是数学思维方式全过程的五个重要环节。

按照数学的思维方式学习数学是学好数学的正确途径，在学习数学的过程中受到数学思维方式的熏陶和训练，这有助于培养创新能力，有助于培养能工巧匠、大国工匠。

三、教材内容体系严密，科学性强，富有时代特色.

《数学·基础模块(上、下册)》体系严密，科学性强，作者遵循中职学生的认知规律，精心编写每一学时的内容和练习题，行文流畅，阐述清晰，富有时代特色，使得教师好教、学生易学.

集合是数学中最基础的概念，为后续内容打下了坚实的基础，函数的定义域、函数的图像、函数的单调区间，与角 α 终边相同的所有角，随机事件的刻画等都要用到集合.

函数的图像是非常重要的，我们给出了函数的图像的定义：设 $y=f(x)$ 是定义域为 A 的一个函数，在平面直角坐标系 xOy 里，以自变量 x 取的一个值 a 为横坐标，相应的函数值 $f(a)$ 为纵坐标，描出点 $M(a, f(a))$ ，当 a 取遍 A 的所有元素时，坐标为 $(a, f(a))$ 的点组成的集合称为函数 $y=f(x)$ 的图像. 从这个定义得出

点 $M(a, b)$ 在定义域为 A 的函数 $y=f(x)$ 的图像上

$\Leftrightarrow a \in A$ 且 $b=f(a)$.

这个结论是数形结合的根基.

关于函数的奇偶性，设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 A ，图像为 E . 我们引导学生探索在什么条件下， $y=f(x)$ 的图像 E 关于 y 轴对称.

$y=f(x)$ 的图像 E 关于 y 轴对称

$\Leftrightarrow E$ 上的每一个点 $P(a, f(a))$ 关于 y 轴的对称点 $Q(-a, f(a))$ 仍在 E 上

$\Leftrightarrow -a \in A$ ，且 $f(-a)=f(a)$ ，对于一切 $a \in A$.

从这个结论我们引出了偶函数的概念，并且得到了偶函数的图像关于 y 轴对称的结论，达到了一箭双雕的效果.

关于概率的定义,我们作了改进.掷一枚硬币出现正面向上的频率接近于 $\frac{1}{2}$,并且硬币是均匀的、对称的,因此每一次掷硬币,出现正面向上与出现反面向上的可能性是一样的.大量例子表明:在随机现象中,出现的每一个结果的可能性大小是客观存在的,它可以用一个不超过1的非负实数来刻画,这个数就叫作出现这个结果的概率.

四、从生活到数学,用生活中的例子引出数学概念和数学知识,并且用到生活中去.

在《数学·基础模块(上册)》第3章3.2节,我们讲了:北京市鼓励居民节约用水,对自来水费实行阶梯水价,2020年对于5人(含)以下的家庭,单位水价 y (元/ m^3)是一年累计用水量 x (m^3)的函数:

$$y = \begin{cases} 2.07, & 0 \leq x \leq 180, \\ 4.07, & 180 < x \leq 260, \\ 6.07, & x > 260. \end{cases}$$

从这个生活中的实际例子引出了分段函数的概念.

在第4章4.6节,把对数函数用到药物的半衰期上.

五、把数学文化融入教材内容中,结合数学教学的内容,写了多个数学文化,展示中华优秀传统文化,弘扬中华优秀传统文化.

第1章的数学文化是:集合与全局在胸、言简意赅.第2章的数学文化是:实数大小的比较与“天生一个仙人洞,无限风光在险峰”.第3章的数学文化是:函数的概念与更上一层楼.第4章的数学文化是:数学的讲道理.第6章的数学文化是:数形结合与鱼水相依.第8章的数学文化是:数学的思维方式.

在《数学·基础模块(上册)》写有《数学文化:数学的讲道理》,我们写道:

讲道理是中华民族的传统美德.中国人民对于知书达理、通情达理、合情合理、言之有理、有条有理、以理服人、顺理成章这些词语耳熟能详.

数学是讲道理的,学习数学要掌握数学知识,还要学习讲道理,这有助于培养高素质技术技能人才.

数学讲道理的特征之一是顺理成章,环环相扣.

数学讲道理的特征之二是严谨精确，滴水不漏.

数学讲道理的特征之三是茅塞顿开，豁然开朗.

在《数学·基础模块(下册)》写有《数学文化：数学的思维方式》，其中写道：

数学以公式之优美、理论之奇妙、论证之严密、应用之广泛令人惊叹不已！究其原因，数学的思维方式发挥着巨大的威力.

数学的思维方式是一个全过程(详见前文). 数学的思维方式在创新中起着重要作用. 一个重要的数学概念的提出，往往是数学创新迈出的第一步. 进行艰辛的探索是数学创新的必经之路. 在探索的基础上产生的想法(通常称之为猜想)是在创新旅程中迈上的一个新台阶. 寻求对于猜想的论证吸引着众多的数学家呕心沥血，最终取得的突破性进展是数学创新的一个标志.

按照数学的思维方式学习数学是学好数学的正确途径，在学习数学的过程中受到数学思维方式的熏陶和训练，这有助于培养创新能力.

六、与信息技术相结合，利用计算机软件画图.

在第4章后设栏目：用计算机画函数的图像.

在第7章后设栏目：用计算机画空间图形的直观图.

在第8章后设栏目：用计算机模拟掷质地均匀的硬币试验.

本书是基础模块下册，内容包括：三角函数、直线与圆的方程、简单几何体、概率与统计初步. 完成本书教学需要63学时，学时分配见下表：

学时分配表

章内容	学时数
第5章 三角函数	20+1
第6章 直线与圆的方程	16+1
第7章 简单几何体	12+1
第8章 概率与统计初步	11+1

本套教材由丘维声任主编，副主编为：郭玉峰、王晓宏. 参加教材编写的有：丘维声、郭玉峰、王晓宏、曹永刚、李义林、胡旺、李超贵、刘亚利、邹

楚林、方勇、周文洁、牛文瑞、胡顺华.

作者感谢教育部职业教育与成人教育司中等职业学校公共基础课程教学教材评审组的全体专家对本套教材的初稿提出的宝贵意见. 作者感谢参加试教的中职数学老师提出的宝贵意见. 作者感谢为本书做出大量工作的出版社领导和编辑.

作者欢迎广大读者对本套教材提出宝贵意见.

丘维声

于北京大学数学科学学院

2021 年 5 月

第 5 章 三角函数 1

5.1 角的概念, 弧度制	2
5.2 三角函数的概念	9
5.3 同角三角函数值的基本关系式	16
5.4 诱导公式	19
5.5 三角函数的周期	26
5.6 正弦函数的性质与图像	29
5.7 余弦函数的性质与图像	34
5.8 已知三角函数值求指定区间内的角	39
本章小结	49
复习题五	51

第 6 章 直线与圆的方程 53

6.1 两点间距离公式和线段的中点坐标公式	54
6.2 直线的倾斜角与斜率	60
6.3 直线的点斜式和斜截式方程	65
6.4 直线的一般式方程	69
6.5 平面上两条直线的位置关系	73
6.6 平面上两条直线垂直的条件	78
6.7 点到直线的距离公式	83
6.8 圆的方程	87
6.9 直线与圆的位置关系	92
6.10 直线的方程与圆的方程应用举例	100
本章小结	103

复习题六	105
数学文化 数形结合与鱼水相依	107

第7章 简单几何体 109

7.1 三视图	111
7.2 空间图形的画法	115
7.3 直棱柱、正棱锥的表面积	118
7.4 圆柱、圆锥、球的表面积	127
7.5 柱、锥、球的体积	132
本章小结	138
复习题七	140
数学实验 用计算机软件画空间图形的直观图	142

第8章 概率与统计初步 143

8.1 随机事件及其概率	144
8.2 古典概率模型	151
8.3 概率的简单性质	156
8.4 总体与样本, 抽样方法	162
8.5 统计图表	167
8.6 样本的均值和标准差	174
本章小结	180
复习题八	182
数学文化 数学的思维方式	185
数学实验 用计算机模拟掷质地均匀的硬币试验	189

后记	190
----------	-----

第5章

三角函数

本章结构

- 5.1 角的概念，弧度制
- 5.2 三角函数的概念
- 5.3 同角三角函数值的基本关系式
- 5.4 诱导公式
- 5.5 三角函数的周期
- 5.6 正弦函数的性质与图像
- 5.7 余弦函数的性质与图像
- 5.8 已知三角函数值求指定区间内的角

学以致用

现实世界中许多现象是随着时间而发生周期性变化的. 研究这类现象的主要工具是正弦函数 $y=\sin x$ 和余弦函数 $y=\cos x$. 为了给出正弦函数和余弦函数的概念, 需要把锐角的正弦、余弦推广到任意角的正弦、余弦, 并且采用弧度制度量角的大小. 研究平面上的直线需要把锐角的正切推广到任意角的正切. 本章的主线是研究正弦函数、余弦函数的性质和图像, 为此需要先讲诱导公式以及周期函数的概念. 许多实际问题的解决需从已知三角函数值求指定区间的角. 诱导公式在解三角形中也有用.

5.1 角的概念，弧度制



回顾

同学们在初中学习了角的概念. 有公共端点的两条射线组成的图形叫作**角**, 这个公共端点叫作角的**顶点**, 两条射线都叫作角的**边**.

手表的秒针绕表盘中心旋转(图 5-1), 旋转的方向称为**顺时针方向**; 反过来的旋转方向称为**逆时针方向**.



图 5-1

角可以看成是平面内一条射线绕它的端点从一个位置旋转到另一个位置形成的图形, 射线的端点称为角的**顶点**, 射线在旋转初始位置时, 称它为角的**始边**, 射线在旋转终止位置时, 称它为角的**终边**. 按**逆时针**方向旋转而成的角称为**正角**, 如图 5-2 所示; 按**顺时针**方向旋转而成的角称为**负角**, 如图 5-3 所示. 当一条射线没有旋转时, 我们也认为它形成了一个角, 并把这个角称为**零角**, 记作 0.

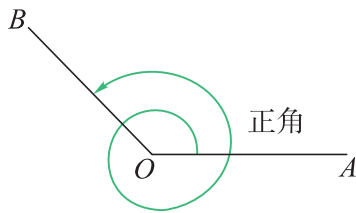


图 5-2

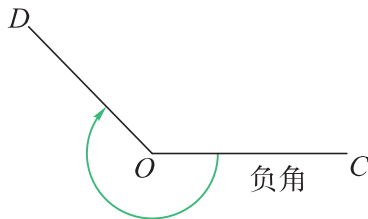


图 5-3

角的概念包含两部分: 射线旋转的方向和旋转的数量. 旋转的数量称为**角的大小**.

角可以用小写希腊字母(如 α , β , γ , ...)来表示.

角 α 与角 β 如果射线的旋转方向相同, 并且旋转的数量相等, 那么称这两个角**相等**, 记作 $\alpha = \beta$.

度量角的大小的一种方法是: 把一条射线绕它的端点旋转一周形成的角的大小规定为 360° , 也就是把旋转 $\frac{1}{360}$ 周形成的角的大小规定为 1° ; 零角的大小规

定为 0° . 这种度量角的大小的方法称为**角度制**.

一条射线绕它的端点从初始位置按逆时针方向旋转一周形成的角是 360° 角；按顺时针方向旋转一周形成的角是 -360° 角.

注意：表示负角时，要在它的大小前面添上负号. 角 α 的大小记作 $|\alpha|$.

给出角 α 和角 β ，设角 α 的始边是 OA ，终边是 OB . 接着 OB 绕点 O 旋转到 OC 形成的角等于 β ，则这两次旋转的总效果形成的角（其初始位置为 OA ，终止位置为 OC ）称为 α 与 β 的**和**，记作 $\alpha + \beta$. 如图 5-4 所示，不难看出， $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.

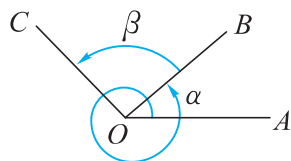


图 5-4

与角 β 的旋转方向相反而旋转的数量相同的角称为 β 的负角，记作 $-\beta$. 容易看出

$$\beta + (-\beta) = 0, \quad (-\beta) + \beta = 0.$$

角的减法运算规定为

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta).$$

为了统一地研究所有的角，在平面上建立一个直角坐标系 xOy ，把所有角的顶点都放在原点 O 的位置上，让所有角的始边（除顶点外）都与 x 轴的正半轴重合，这时一个角的终边在第几象限，就说这个角是第几象限的角. 如果角的终边在坐标轴上，就认为这个角不属于任何象限.

如果 $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ，那么 α 是第一象限的角；

如果 $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ ，那么 α 是第二象限的角；

如果 $180^\circ < \alpha < 270^\circ$ ，那么 α 是第三象限的角；

如果 $270^\circ < \alpha < 360^\circ$ ，那么 α 是第四象限的角.

例 1 下列各角分别是第几象限的角？

$$135^\circ, 210^\circ, 60^\circ, 300^\circ, 120^\circ.$$

解 因为 $90^\circ < 135^\circ < 180^\circ$ ，所以 135° 是第二象限的角.

因为 $180^\circ < 210^\circ < 270^\circ$ ，所以 210° 是第三象限的角.

因为 $0^\circ < 60^\circ < 90^\circ$ ，所以 60° 是第一象限的角.

因为 $270^\circ < 300^\circ < 360^\circ$, 所以 300° 是第四象限的角.

因为 $90^\circ < 120^\circ < 180^\circ$, 所以 120° 是第二象限的角.

如图 5-5, 设角 α 的终边为 OA , 任取一个正整数 m , 则 $\alpha + m \cdot 360^\circ$ 的终边仍然是 OA , $\alpha + (-m) \cdot 360^\circ$ 的终边仍然是 OA . 反之, 若角 β 的终边与角 α 的终边相同, 则 $\beta - \alpha$ 一定是 360° 的整数倍, 从而 $\beta = \alpha + k \cdot 360^\circ$, k 是某个整数. 综上所述, 与角 α 的终边相同的所有角组成的集合是

$$\{\alpha + k \cdot 360^\circ \mid k \in \mathbf{Z}\}.$$

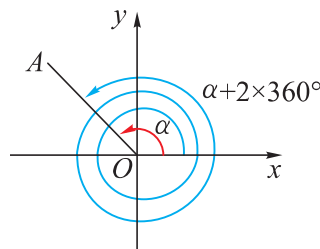


图 5-5

例 2 下列角中哪些角的终边与 30° 角的终边相同?

$$390^\circ, 400^\circ, -330^\circ, 330^\circ.$$

解 因为 $390^\circ = 30^\circ + 360^\circ$, 所以 390° 角的终边与 30° 角的终边相同.

因为 $400^\circ = 40^\circ + 360^\circ$, 所以 400° 角的终边与 40° 角的终边相同, 从而 400° 角的终边与 30° 角的终边不同.

因为 $-330^\circ = 30^\circ + (-1) \cdot 360^\circ$, 所以 -330° 角的终边与 30° 角的终边相同.

因为 $330^\circ = -30^\circ + 360^\circ$, 所以 330° 角的终边与 -30° 角的终边相同, 从而 330° 角的终边与 30° 角的终边不同.



探索

同学们在初中学习了圆, 知道在同一个圆中, 相等的圆心角所对的弧相等. 于是在半径为 r 的圆中, 1° 的圆心角所对的弧长为

$$\frac{1}{360} \cdot 2\pi r = \frac{\pi r}{180}, \quad (1)$$

从而 n° 的圆心角所对的弧长为

$$l = n \frac{\pi r}{180}. \quad (2)$$

因此长度等于半径 r 的圆弧所对的圆心角的度数为

$$\left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}. \quad (3)$$

由此受到启发,我们引出度量角的大小的另一种方法:

定义 把长度等于半径的圆弧所对的圆心角的大小规定为 **1 弧度**.

例如,在图 5-6 中,圆 O 的半径为 r , $\widehat{AB}$ 的长度等于 r , $\widehat{AB}$ 所对的圆心角 $\angle AOB$ 的大小就是 1 弧度(用符号 rad 表示),这种度量角的大小的方法称为**弧度制**.

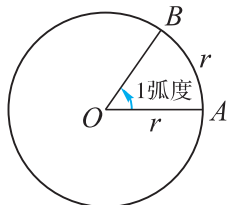


图 5-6

从(3)式得出

$$1 \text{ 弧度} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}. \quad (4)$$

今后把“弧度”省略不写,从(4)式得出

$$\pi = 180^{\circ}, \quad (5)$$

$$2\pi = 360^{\circ}, \quad (6)$$

$$1^{\circ} = \frac{\pi}{180}. \quad (7)$$

例 3 把下列各角用弧度制表示:

- (1) 30° ; (2) 45° ; (3) 60° ;
(4) 90° ; (5) 120° ; (6) -270° .

解 因为 $1^{\circ} = \frac{\pi}{180}$, 所以

$$(1) \quad 30^{\circ} = 30 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{6};$$

$$(2) \quad 45^{\circ} = 45 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{4};$$

$$(3) \quad 60^{\circ} = 60 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{3};$$

$$(4) \quad 90^{\circ} = 90 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{2};$$

$$(5) \quad 120^{\circ} = 120 \times \frac{\pi}{180} = \frac{2\pi}{3};$$

$$(6) -270^\circ = -270 \times \frac{\pi}{180} = -\frac{3\pi}{2}.$$

例 4 把下列各角用角度制表示:

$$(1) \frac{3\pi}{4}; \quad (2) \frac{5\pi}{6}; \quad (3) \frac{3\pi}{2}; \quad (4) -\frac{11\pi}{6}.$$

解 因为 $\pi = 180^\circ$, 所以

$$(1) \frac{3\pi}{4} = \frac{3}{4} \times 180^\circ = 135^\circ;$$

$$(2) \frac{5\pi}{6} = \frac{5}{6} \times 180^\circ = 150^\circ;$$

$$(3) \frac{3\pi}{2} = \frac{3}{2} \times 180^\circ = 270^\circ;$$

$$(4) -\frac{11\pi}{6} = -\frac{11}{6} \times 180^\circ = -330^\circ.$$

从上述例子得到一些特殊角的度数与弧度数的对应关系, 列成下表:

角度	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
弧度	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

评注 采用弧度制, 使每一个正角 α 对应于唯一一个实数 (α 的弧度数), 使每一个负角 β 对应于唯一一个实数 (β 的弧度数的相反数), 零角对应于实数 0; 反之, 使每一个实数 x 对应于唯一一个角 γ (γ 的弧度数等于实数 x 的绝对值). 因此, **采用弧度制我们可以把所有角组成的集合与实数集 $\mathbf{R}$ 等同看待.**

现在来看弧度制下的弧长公式和扇形面积公式.

从弧度的定义得出, 在半径为 r 的圆中, 圆心角 α 所对的弧长为

$$l = |\alpha| r. \quad (8)$$

由于半径为 r 的圆的面积为 πr^2 , 圆周长为 $2\pi r$, 因此弧长为 l 的扇形的面

积为

$$S = \frac{l}{2\pi r} \cdot \pi r^2 = \frac{1}{2}lr,$$

即

$$S = \frac{1}{2}lr. \quad (9)$$

从而圆心角为 α 弧度的扇形的面积为

$$S = \frac{1}{2}|\alpha|r^2. \quad (10)$$

练习

A 组

1. 若一条射线绕它的端点从初始位置旋转, 则:

(1) 按逆时针方向旋转半周形成的角的大小是_____;

(2) 按逆时针方向旋转 $\frac{1}{4}$ 周形成的角的大小是_____;

(3) 按逆时针方向旋转 $\frac{2}{3}$ 周形成的角的大小是_____;

(4) 按顺时针方向旋转 2 周形成的角的大小是_____.

2. 下列各角分别是第几象限的角?

$150^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 225^\circ, 240^\circ, 330^\circ, 315^\circ$.

3. 写出与 60° 角的终边相同的所有角组成的集合.

4. 下列角中哪些角的终边与 60° 角的终边相同?

$420^\circ, -300^\circ, 780^\circ, -660^\circ, 240^\circ, -120^\circ$.

5. 把下列各角用弧度制表示:

(1) 10° ; (2) 75° ; (3) 195° ;

(4) 255° ; (5) -120° ; (6) -220° .

6. 把下列各角用角度制表示:

(1) $\frac{11\pi}{6}$; (2) $-\frac{7\pi}{6}$; (3) $-\frac{5\pi}{3}$; (4) $-\frac{7\pi}{4}$.

7. 在半径为 6 cm 的圆中, 求 $\frac{\pi}{3}$ 弧度的圆心角所对的弧长.

8. 在半径为 6 cm 的圆中, 求圆心角为 $\frac{\pi}{3}$ 的扇形的面积.

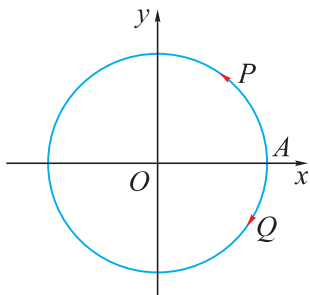
9. 在半径为 10 cm 的圆形薄板上, 剪下一块圆心角为 $\frac{2\pi}{3}$ 的扇形薄板, 求这块扇形薄板的弧长和面积.

B 组

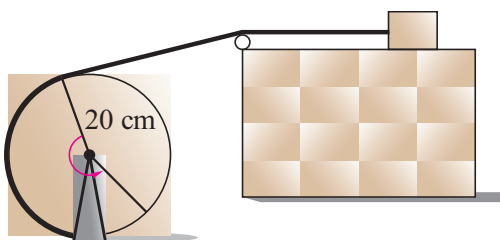
1. 电动机转子 1 s 内旋转 50π 弧度, 问转子每分钟旋转多少周?

2. $12^\circ 6' =$ _____ 弧度, $-9^\circ 18' =$ _____ 弧度.

* 3. 如图所示, 圆心为原点, 半径为 r 的圆与 x 轴正半轴相交于点 A , 圆上两个动点 P, Q 同时从点 A 出发, 沿圆周做匀速运动: 点 P 按逆时针方向每秒转 $\frac{\pi}{3}$, 点 Q 按顺时针方向每秒转 $\frac{\pi}{6}$. 求它们出发后第一次相遇时各自走过的弧长.



(第 3 题)



(第 4 题)

* 4. 如图, 已知某转轮的半径为 20 cm, 转轮上缠绕了一根缆绳, 缆绳一端连接箱子. 当转轮逆时针转动时, 会带动箱子水平移动.

(1) 如果轮子逆时针旋转 225° , 箱子会移动多远?

(2) 轮子必须旋转多少度才能使箱子移动 1 m? (结果精确到 0.1°)