



湖南省

普通高等学校对口招生考试

湖南省普通高等学校对口招生考试语文复习指导
湖南省普通高等学校对口招生考试语文同步强化
湖南省普通高等学校对口招生考试语文考前冲刺试卷

湖南省普通高等学校对口招生考试数学复习指导
湖南省普通高等学校对口招生考试数学同步强化
湖南省普通高等学校对口招生考试数学考前冲刺试卷

湖南省普通高等学校对口招生考试英语复习指导
湖南省普通高等学校对口招生考试英语同步强化
湖南省普通高等学校对口招生考试英语考前冲刺试卷

湖南省普通高等学校对口招生考试数学复习指导



上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS



扫描二维码
关注上海交通大学出版社
官方微信

ISBN 978-7-313-27300-0



9 787313 273000 >

定价:63.00元

免费提供

精品教学资料包

服务热线: 400-615-1233
www.huatengzy.com

华腾新思®

湖南省

普通高等学校对口招生考试

数学复习指导

主编 邹誉瑞

内容权威 严格依据湖南省对口招生考试大纲编写, 针对性强

考点全面 涵盖考纲要求的全部考点, 准确把握命题趋势

高附加值 配套教学资料包, 内含教学课件等教学资料



上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

湖南省
普通高等学校对口招生考试

数学复习指导

主 编 邹誉瑞
副主编 李 凡 黄 浩



上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

内容提要

全书包括集合、不等式、函数、指数函数与对数函数、三角函数、数列、平面向量、解析几何、立体几何、概率与统计、三角函数的应用、复数及其应用、算法与程序框图、命题与逻辑联结词、线性规划共十五章内容。每章根据考纲的要求详述相关知识点。全书体例科学,栏目丰富,“知识结构”对本章知识点进行了总结;“考纲揭秘”详细分析了考试大纲对每一知识点的要求;“命题趋势”对命题情况进行了分析;“真题链接”从命题的角度对真题进行剖析,使考生准确把握考点,快速找到解题思路;“知识梳理”对每一个知识点、考点进行了细致的讲解;“典例解析”对典型例题进行分析,然后给出详细的解题思路;“巩固练习”针对考点知识设置了练习题,以帮助考生巩固所学知识,提高答题能力。

本书既可以作为普通高等学校招收中职毕业生考试的复习用书,也可以作为广大中等职业学校学生的学习资料。

图书在版编目(CIP)数据

湖南省普通高等学校对口招生考试数学复习指导 /
邹誉瑞主编. — 上海:上海交通大学出版社,2022.9(2023.7重印)
ISBN 978-7-313-27300-0

I. ①湖… II. ①邹… III. ①数学课—中等专业学校
—升学参考资料 IV. ①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2022)第 155626 号

湖南省普通高等学校对口招生考试数学复习指导

HUNAN SHENG PUTONG GAODENG XUEXIAO DUIKOU ZHAOSHENG KAOSHI SHUXUE FUXI ZHIDAO

主 编:邹誉瑞

出版发行:上海交通大学出版社

地 址:上海市番禺路 951 号

邮政编码:200030

电 话:021-64071208

印 制:三河市骏杰印刷有限公司

经 销:全国新华书店

开 本:880 mm×1 230 mm 1/16

印 张:18

字 数:449 千字

版 次:2022 年 9 月第 1 版

印 次:2023 年 7 月第 2 次印刷

书 号:ISBN 978-7-313-27300-0

定 价:63.00 元

版权所有 侵权必究

告读者:如发现本书有印装质量问题请与印刷厂质量科联系

联系电话:0316-3662258

Preface

前言



通过多年的摸索与实践,湖南省普通高等学校对口招生考试越来越规范有序。从考试内容和考试形式上来看,参加招生考试的考生将面临更大的挑战,多数考生都为如何在短期内熟悉考试形式、了解考试内容、把握考试重难点、弥补“短板”而备受困扰,亟须通过高效的学习来快速提升应试能力,从而在考试中脱颖而出。

为了帮助广大考生在较短的时间内高效、便捷、准确地把握考试的脉络,我们特组织多所一线院校的任课教师,根据考试科目的大纲要求,深入研究了近几年湖南省普通高等学校对口招生考试的命题情况,针对命题中出现的最新变化,精心编写了这套湖南省普通高等学校对口招生考试复习丛书,供广大考生在复习时使用。

本书是该系列丛书之《湖南省普通高等学校对口招生考试数学复习指导》。数学是对口升学考试的必考科目之一,其知识点较多、难度较大,也是考生备考的重点和难点所在。本书在编写时紧扣考试大纲,紧密结合真题,内容充实,结构严谨,要点突出,指导性强,是广大考生进行考试复习和储备知识的重要参考资料。

本书具有以下鲜明特色:

1. 编写阵容强大,熟知学情考情

编写成员均系湖南省中等职业学校的骨干教师,他们始终工作在教学一线,常年从事中职毕业生对口招生的命题研究工作,对考试规律和命题形式有深入的研究,能够精准把握考试的命题趋势,在知识点的讲解和试题的选择上都具有权威性。

2. 立足考试大纲,全面服务考生

本书是为参加湖南省普通高等学校对口招生考试的考生量身定做的复习用书。知识点的选取、题型、试题难度等设计均参照了历年考试真题和最新考试大纲,体现出考试特色,做到既能把握考试的命题特点,又能体现其发展趋势。

3. 编排合理,设计科学

本书对考点进行归纳和整理,使零散的知识形成有机的整体,从而使考生掌握知识规律和技能,找到解题方法。书中每章按照“知识结构”“考纲揭秘”“命题趋势”“真题链接”“知识梳理”“典例解析”“巩固练习”的框架编写。

“知识结构”对本章知识点进行了总结。

“考纲揭秘”详细分析了考试大纲对每一知识点的要求。

“命题趋势”对命题情况进行了分析。

“真题链接”从命题的角度对真题进行剖析,使考生准确把握考点,快速找到解题思路。

“知识梳理”对每一个知识点、考点进行了细致的讲解。

“典例解析”对典型例题进行分析,然后给出详细的解题思路。

“巩固练习”针对考点知识设置了练习题,以帮助考生巩固所学知识,提高答题能力。

4. 配套齐全,全方位助力备考

本书配套有《湖南省普通高等学校对口招生考试数学同步强化》和《湖南省普通高等学校对口招生考试数学考前冲刺试卷》。衷心希望本套湖南省普通高等学校对口招生考试复习丛书能为广大考生的复习备考带来实质性的帮助。对书中的不足之处,敬请各位读者不吝指正。

最后,预祝广大考生在考试中取得好成绩!

编者

Contents 目 录



第一章	集合	1
第一节	集合的概念与集合之间的关系	2
第二节	集合的运算	8
第三节	充要条件	12
第二章	不等式	17
第一节	不等式的基本性质与区间	18
第二节	一元二次不等式及其应用	23
第三节	含绝对值的不等式	28
第三章	函数	32
第一节	函数的概念及其表示	33
第二节	函数的单调性	41
第三节	函数的奇偶性	47
第四节	函数的实际应用	52
第四章	指数函数与对数函数	56
第一节	实数指数幂和幂函数	57
第二节	指数函数	62
第三节	对数及其运算	66
第四节	对数函数	69
第五章	三角函数	76
第一节	角的概念推广与弧度制	77
第二节	任意角的三角函数	81
第三节	同角三角函数的基本关系式	85
第四节	诱导公式	88
第五节	三角函数的图像与性质	92
第六节	和角公式与倍角公式	97
第七节	正弦型函数的图像与性质	103
第八节	正弦定理和余弦定理	108
第六章	数列	114
第一节	数列的概念	115

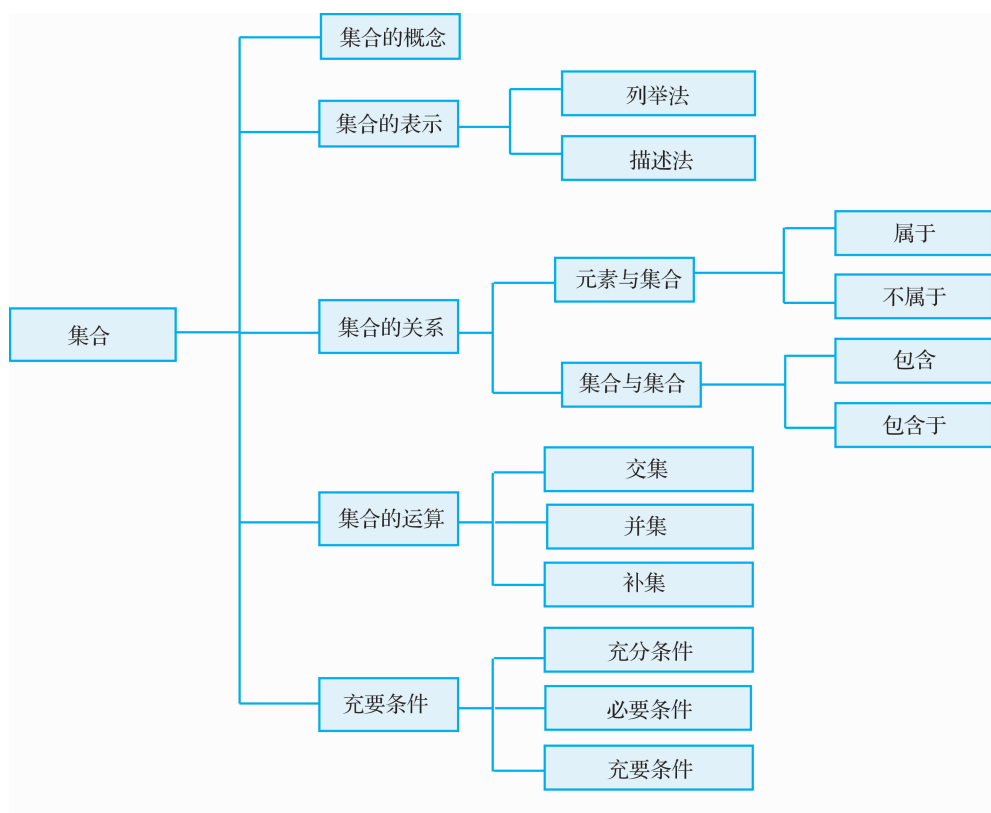
第二节	等差数列	120
第三节	等比数列	125
第四节	等差数列与等比数列的应用	130
第七章	平面向量	133
第一节	平面向量的概念及线性运算	134
第二节	平面向量的坐标表示	140
第三节	平面向量的内积	144
第八章	解析几何	149
第一节	两点间的距离公式与线段中点的坐标	150
第二节	直线的方程	153
第三节	两条直线的位置关系	157
第四节	圆的方程	161
第五节	椭圆	167
第六节	双曲线	174
第七节	抛物线	180
第九章	立体几何	186
第一节	平面的基本性质	187
第二节	空间的平行关系	190
第三节	空间的垂直关系	197
第四节	柱、锥、球及其组合体	204
第十章	概率与统计	213
第一节	计数原理	214
第二节	排列与组合	217
第三节	二项式定理	221
第四节	概率	225
第五节	统计	230
第六节	离散型随机变量及其分布	237
第十一章	三角函数的应用	244
第十二章	复数及其应用	251
第十三章	算法与程序框图	260
第十四章	命题与逻辑联结词	269
第十五章	线性规划	274

第一章

集 合



知识结构



考纲揭秘

- (1)理解集合、元素及其关系,掌握集合的表示法.
- (2)掌握集合之间的关系(子集、真子集、相等).

(3)理解集合的运算(交、并、补).

(4)了解充要条件.



命题趋势

本章在历年高考题中多以选择题形式出现,难度不大,要求不高,主要从两个方面考查:一是考查集合的基本运算,命题常以两个集合的交集、并集和补集运算为主,多与不等式、绝对值等相结合;二是考查充分不必要条件、必要不充分条件、充要条件的判定,多与函数等相结合.

第一节

集合的概念与集合之间的关系



知识梳理

知识点一

集合的概念

1. 集合

将某些确定的对象看成一个整体就构成一个集合,简称为集,常用大写英文字母 $A, B, C, \dots$ 表示.

2. 元素

组成集合的对象叫作这个集合的元素,常用小写英文字母 $a, b, c, \dots$ 表示.

3. 元素与集合的关系及性质

如果 a 是集合 A 的元素,就说 a 属于 A ,记作 $a \in A$;如果 a 不是集合 A 的元素,就说 a 不属于 A ,记作 $a \notin A$. 集合中的元素具有确定性、互异性、无序性的特征.

4. 集合的分类

(1)按元素个数分类:

①有限集:含有元素的个数有限的集合叫作有限集.

②无限集:含有元素的个数无限的集合叫作无限集.

③空集:不含任何元素的集合叫作空集,记作 $\emptyset$.

注意: $\emptyset$ 不是 $\{0\}$.

(2)按元素的特征分类:数集、点集等.

5. 常用的集合

常用的集合有正整数集($\mathbf{N}_+$ 或 $\mathbf{N}^*$)、自然数集($\mathbf{N}$)、整数集($\mathbf{Z}$)、有理数集($\mathbf{Q}$)、实数集($\mathbf{R}$).

(1)正整数集:所有正整数组成的集合叫作正整数集,记作 $\mathbf{N}_+$ 或 $\mathbf{N}^*$.

(2)自然数集:所有自然数组成的集合叫作自然数集,记作 $\mathbf{N}$.

(3)整数集:所有整数组成的集合叫作整数集,记作 $\mathbf{Z}$.

(4)有理数集:所有有理数组成的集合叫作有理数集,记作 $\mathbf{Q}$.

(5)实数集:所有实数组成的集合叫作实数集,记作 $\mathbf{R}$.

知识点二 集合的表示法

1. 列举法

将集合的元素一一列出,用逗号分隔,再用花括号括为一个整体,这种表示集合的方法叫作列举法.

注意:用列举法表示集合时,要注意以下几点:

- (1)元素之间用逗号“,”隔开.
- (2)元素不能重复(满足集合中元素的互异性).
- (3)元素不能遗漏.

(4)当集合中的元素较少时,用列举法比较简单;当集合中的元素较多或无限,但存在一定的规律时,在不发生误解的情况下,也可以用列举法表示.

2. 描述法

利用元素的特征性质来表示集合的方法称为描述法.

具体方法是:在花括号中画一条竖线,竖线的左侧写上集合的代表元素 x ,并标出元素的取值范围,竖线右侧写出元素所具有的特征性质.

注意:用描述法表示集合时,要注意以下几点:

- (1)写清楚集合中元素的代表形式(一般用小写字母表示).
- (2)写明集合中元素的特征或性质.
- (3)用于描述元素特征的语句要力求简明、准确,不产生歧义;多层描述时,应当准确使用“且”“或”等关联词.
- (4)所有描述的内容都要写在大括号内.
- (5)在不引起混淆的情况下,用描述法表示集合有时也可以省去竖线和竖线左边的部分.例如,正整数的集合可简记为{正整数},但是,集合 $\{x|x>1\}$ 就不能省略竖线及其左边的“ x ”.

知识点三 集合间的关系

1. 子集

一般地,对于两个集合 A, B ,如果集合 A 中任何一个元素都是集合 B 的元素,那么,集合 A 就称作集合 B 的子集,记作 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$,读作“ A 包含于 B ”或“ B 包含 A ”.

当集合 A 不包含于集合 B 或集合 B 不包含集合 A 时,记作 $A \not\subseteq B$ 或 $B \not\supseteq A$.

性质:(1)任何一个集合是它本身的子集,即 $A \subseteq A$;(2)空集是任何集合的子集,即 $\emptyset \subseteq A$;(3)对集合 A, B, C ,若 $A \subseteq B, B \subseteq C$,则 $A \subseteq C$.

注意:不能把子集说成由原来集合中的部分元素组成的集合,因为 A 的子集包括它本身,而这个子集由 A 的全体元素组成;空集也是 A 的子集,但这个子集中不包括 A 中的任何元素.

2. 真子集

如果 A 是 B 的子集,并且 B 中至少有一个元素不属于 A ,则 A 是 B 的真子集(A 包含于 B 但不等于 B),记作 $A \subsetneq B$ 或 $B \supsetneq A$.

性质:空集是任何非空集合的真子集;对于集合 A, B, C ,若 $A \subsetneq B, B \subsetneq C$,则 $A \subsetneq C$.

注意:元素与集合之间是属于关系,集合与集合之间是包含关系.

3. 集合的相等

一般地,如果两个集合的元素完全相同,我们就说这两个集合相等,集合 A 等于集合 B ,记作 $A=B$ (A, B 的所有元素均相同).

注意: (1)两个集合所含元素完全相同,即“集合 A 中的任何一个元素都是集合 B 的元素,同时集合 B 中的任何一个元素都是集合 A 的元素”.

(2)要判断两个集合是否相等,对于元素较少的有限集,主要看它们的元素是否完全相同;若是无限集,则从“互为子集”入手进行判断.



典例解析

题型一 集合的概念

例 1 在下列每组对象中:

- (1)我国著名的数学家;
- (2)超过 10 的所有自然数;
- (3)某校 2021 年新入学的高个子学生;
- (4)方程 $x-1=0$ 的实数解;
- (5)在直角坐标平面内,第二象限的所有点.

其中能构成集合的是().

A. (1)(2)(3)

B. (2)(3)(4)

C. (2)(4)(5)

D. (3)(4)(5)



解析

(1)“我国著名的数学家”不是一个明确的标准,不能构成一个集合;(3)“高个子学生”这一标准也不确定,无法判定某人是高还是矮,也不能构成集合;(2)(4)的对象是确定的;(5)的对象虽然有无限个,但它是确定的.因此选 C.



技巧点拨

判断某组对象能否构成集合,关键看对象是否为整体的和确定的.标准一定要是明确的,不能模糊,否则无法判断.



变式训练 1

下列语句中,能构成集合的是().

A. 我班数学好的男生

B. 与 0 接近的全体实数

C. 大于 π 的自然数

D. 优秀的中等职业学校

题型二 集合与元素的关系及性质

例 2 已知集合 $A = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 3, x \in \mathbf{Z}, y \in \mathbf{Z}\}$, 则 A 中元素的个数为().

A. 9

B. 8

C. 5

D. 4



解析

由 $x^2 + y^2 \leq 3$ 可知, $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$, $-\sqrt{3} \leq y \leq \sqrt{3}$. 又因为 $x \in \mathbf{Z}, y \in \mathbf{Z}$, 所以 $x \in \{-1, 0, 1\}, y \in \{-1, 0, 1\}$. 所以 A 中元素的个数为 9.



技巧点拨

对于求解集合中元素个数的题目,首先求出集合,然后根据集合中元素的互异性求出集合中元素的个数,或利用数形结合的方法求出集合中元素的个数.



变式训练 2

已知集合 $A = \{1, 2, 4\}$, 集合 $B = \{x \mid x = a + b, a \in A, b \in A\}$, 则集合 B 中元素的个数为_____.

题型三 集合的表示方法

例 3 用列举法表示下列集合.

(1) $A = \{x \mid -2 < x < 5, x \in \mathbf{Z}\}$;

(2) $B = \{(x, y) \mid 2x + y = 5, x \in \mathbf{N}, y \in \mathbf{N}\}$.



解析 (1) $A = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$; (2) $B = \{(0, 5), (1, 3), (2, 1)\}$.



技巧点拨 掌握集合的两种表示方法.



变式训练 3

用描述法表示下列集合.

(1) $\{11, 12, 13, 14, 15, \dots\}$;

(2) $\{1, 4, 9, 16, 25, 36\}$.

题型四 元素与集合、集合与集合之间的关系

例 4 设集合 $A = \{0\}$, 下列结论正确的是().

A. $A = 0$

B. $A \subseteq \emptyset$

C. $0 \in A$

D. $\emptyset \in A$



解析 本题考查了元素与集合、集合与集合之间的关系. 答案选 C.



技巧点拨 正确理解符号 $\in, \notin, \subseteq, \supseteq$ 的意义, 是正确处理此类问题的关键.



变式训练 4

下列说法中, 正确的有().

①空集没有子集; ②任何集合至少有两个子集; ③空集是任何集合的真子集; ④若 $\emptyset \subsetneq A$, 则 $A \neq \emptyset$.

A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

题型五 由集合之间的关系求未知数的值或范围

例 5 已知集合 $A = \{x \mid x^2 - x - 2 = 0\}$, $B = \{x \mid x^2 - 4x + p = 0\}$, 若 $B \subseteq A$, 求实数 p 的取值范围.



解析

由题意得 $A = \{-1, 2\}$, 因为 $B \subseteq A$, 所以 $B = \emptyset$ 或 $B = \{-1\}$ 或 $B = \{2\}$ 或 $B = \{-1, 2\}$.

又因为 $B = \{x | x^2 - 4x + p = 0\}$, 所以 $B = \{-1, 2\}$ 不成立.

当 $B = \emptyset$ 时, $\Delta = (-4)^2 - 4p = 16 - 4p < 0$, 解得 $p > 4$;

当 $B = \{-1\}$ 时, $\begin{cases} \Delta = 16 - 4p = 0, \\ (-1)^2 - 4 \times (-1) + p = 0 \end{cases}$ 无解;

当 $B = \{2\}$ 时, $\Delta = 16 - 4p = 0, 2^2 - 4 \times 2 + p = 0$, 解得 $p = 4$.

综上, 实数 p 的取值范围是 $[4, +\infty)$.



技巧点拨

两个集合包含或相等关系的问题, 通过建立方程(组), 然后解出未知数, 最后利用集合元素的特征进行检验即可.



变式训练 5

已知集合 $A = \{1, 1+m, 1+2m\}$, $B = \{1, n, n^2\}$, 其中 $m, n \in \mathbf{R}$, 若 $A = B$, 求 m, n 的值.



巩固练习

基础巩固

一、选择题

- 下列对象中能组成集合的是 ()
A. 好人 B. 非常小的数
C. 有趣的书 D. 小于 5 的数
- 给出下面四个关系: ① $0 \in \mathbf{Q}$; ② $\sqrt{3} \notin \mathbf{Q}$; ③ $\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Q}$; ④ $\emptyset \subseteq \{0\}$, 其中正确的个数为 ()
A. 4 B. 3 C. 2 D. 1
- 用列举法表示集合 $\{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$ 的结果是 ()
A. $(1, 2)$ B. $1, 2$
C. $\{1, 2\}$ D. 以上都不是
- 集合 $\{1, 2, 3, 4\}$ 所有子集的个数是 ()
A. 8 B. 14 C. 15 D. 16
- 下列选项中表述正确的是 ()
A. 由 $1, 3, 5, 7, 5, 3$ 组成的集合中有 6 个元素
B. 周长为 16 cm 的三角形组成的集合是有限集合
C. 集合 $\{0\}$ 是空集
D. 一年级(3)班的所有同学可以组成集合
- 用列举法表示“大于 2 且小于 9 的偶数的全体”构成的集合是 ()
A. $\emptyset$ B. $\{4, 6, 8\}$ C. $\{3, 5, 7\}$ D. $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

二、填空题

1. 用适当的符号($\in, \notin, \subseteq, \supseteq, =$)填空.
 3 _____ $\{2, 3\}$; π _____ $\mathbf{Q}$; $\{1, 2, 3\}$ _____ $\mathbf{Z}$;
 $\mathbf{N}^*$ _____ $\mathbf{Z}$; $\{-3, 3\}$ _____ $\{x | x^2 = 9\}$.
2. 绝对值等于 1 的所有整数组成的集合是_____.
3. 已知集合 $P = \{x | 2 < x < a, x \in \mathbf{N}\}$, 且集合 P 中恰有 3 个元素, 则整数 $a =$ _____.
4. 下列六个关系式: ① $\{a, b\} \subseteq \{b, a\}$; ② $\{a, b\} = \{b, a\}$; ③ $0 = \emptyset$; ④ $0 \in \{0\}$; ⑤ $\emptyset \in \{0\}$; ⑥ $\emptyset \subseteq \{0\}$. 其中正确的个数为_____.

三、解答题

1. 已知集合 $A = \{0, 1, 2\}$, 集合 $B = \{x | x = ab, a \in A, b \in A\}$.

(1) 用列举法写出集合 B ;

(2) 判断集合 B 和集合 A 的关系.

2. 写出集合 $\{-3, -1, 1, 3\}$ 的所有子集, 并指出哪些是真子集.

3. 已知集合 $\{1, a, b\}$ 与 $\{-1, -b, 1\}$ 是同一集合, 求实数 a, b 的值.

能力提升

已知集合 $A = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $B = \{x | ax + 2 = 0\}$, 且 $B \subseteq A$, 求实数 a 的值组成的集合.

第二节 集合的运算



真题链接

1. (2023·湖南) 已知集合 $A=\{1,2,3\}$, $B=\{2,3,4\}$, 则 $A\cup B=(\quad)$.

- A. $\{1,4\}$ B. $\{2,3\}$ C. $\{2,3,4\}$ D. $\{1,2,3,4\}$

答案:D

解析:由并集的定义得 $A\cup B=\{1,2,3,4\}$, 故选 D.

2. (2022·湖南) 设全集 $U=\{1,3,5,7\}$, 集合 $A=\{3,5\}$, 则 $\complement_U A=(\quad)$.

- A. $\{1,7\}$ B. $\{1,5\}$ C. $\{3,7\}$ D. $\{5,7\}$

答案:A

解析:由补集的定义得 $\complement_U A=\{1,7\}$.

3. (2021·湖南) 已知集合 $A=\{1,3,5\}$, $B=\{1,2,3,4\}$, 则 $A\cap B=(\quad)$.

- A. $\{1,3\}$ B. $\{1,3,5\}$ C. $\{1,2,3,4\}$ D. $\{1,2,3,4,5\}$

答案:A

解析:根据交集的定义可得 $A\cap B=\{1,3\}$.



知识梳理

1. 交集

一般地,对于两个给定的集合 A 、 B ,由既属于 A 又属于 B 的所有元素组成的集合,叫作集合 A 与集合 B 的交集,记作 $A\cap B$,读作“ A 交 B ”,即 $A\cap B=\{x|x\in A \text{ 且 } x\in B\}$.

性质:

- (1) $A\cap B=B\cap A$.
- (2) $A\cap A=A$.
- (3) $A\cap \emptyset=\emptyset$.
- (4) $A\cap B\subseteq A$, $A\cap B\subseteq B$.
- (5) 若 $A\subseteq B$,则 $A\cap B=A$.

2. 并集

一般地,对于两个给定的集合 A 、 B ,由集合 A 、 B 的所有元素所组成的集合,叫作集合 A 与集合 B 的并集,记作 $A\cup B$,读作“ A 并 B ”. 即 $A\cup B=\{x|x\in A \text{ 或 } x\in B\}$.

性质:

- (1) $A\cup B=B\cup A$.
- (2) $A\cup A=A$.
- (3) $A\cup \emptyset=A$.
- (4) $A\subseteq A\cup B$, $B\subseteq A\cup B$.

(5) 若 $A \subseteq B$, 则 $A \cup B = B$.

3. 图示两个集合的交集、并集

(1) 用 Venn 图表示两个集合的交集、并集(图 1-1).

(2) 借助数轴表示数集的交集、并集(图 1-2).

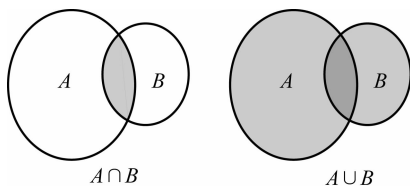


图 1-1

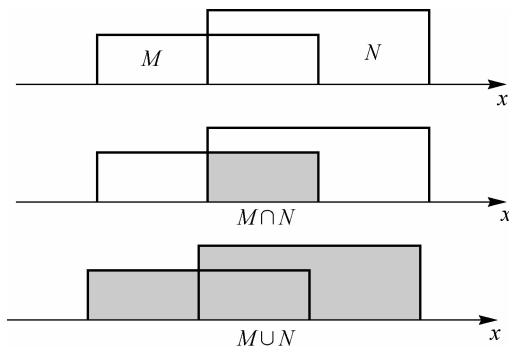


图 1-2

4. 全集

如果一个集合含有我们所研究问题中涉及的所有元素, 则称这个集合为全集, 通常用 U 表示.

注意: 全集是一个相对的概念, 在不同的情况下全集的概念也不同.

5. 补集

如果集合 A 是全集 U 的子集, 那么, 由 U 中不属于集合 A 的所有元素组成的集合叫作集合 A 在全集 U 中的补集, 简称集合 A 的补集, 记作 $\complement_U A$, 读作“ A 在 U 中的补集”. 即 $\complement_U A = \{x | x \in U \text{ 且 } x \notin A\}$.

性质:

$$(1) \complement_U (\complement_U A) = A.$$

$$(2) \complement_U \emptyset = U, \complement_U U = \emptyset.$$

$$(3) A \cup (\complement_U A) = U.$$

$$(4) A \cap (\complement_U A) = \emptyset.$$



典例解析

题型一 集合的运算

例 1 (1) 设集合 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4\}$, 则 $A \cup B = (\quad)$.

A. $\{3\}$

B. $\{3, 4\}$

C. $\{1, 2, 3\}$

D. $\{1, 2, 3, 4\}$

(2) 设集合 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, 则 $A \cap B = (\quad)$.

A. $\emptyset$

B. $\{2, 3\}$

C. $\{1, 4\}$

D. $\{1, 2, 3, 4\}$

(3) 已知集合 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, a\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.



解析 (1) $A \cup B$ 是由集合 A 和集合 B 中所有元素组成的, 因为 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4\}$, 则 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$. 故选 D.

(2) $A \cap B$ 是由集合 A 和集合 B 中相同的元素组成的, 集合 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, 所以 $A \cap B = \{2, 3\}$. 故选 B.

(3) 根据并集运算可知 $a = 4$.



技巧点拨 弄清交集与并集之间的关系.



变式训练 1

(1) 设集合 $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{1, 3\}$, 则 $A \cap B =$ ().

A. $\{0, 1, 2\}$

B. $\{1, 3\}$

C. $\{1\}$

D. $\{0, 1, 2, 3\}$

(2) 设集合 $A = \{0, 1\}$, $B = \{-1, 0\}$, 则 $A \cup B =$ ().

A. $\emptyset$

B. $\{0\}$

C. $\{-1, 0, 1\}$

D. $\{0, 1\}$

例 2 设全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x | 0 \leq x < 2\}$, 集合 $B = \{x | x^2 - 2x - 3 < 0\}$, 求 $A \cap B$, $A \cup B$, $\complement_U A \cap B$.



解析

$B = \{x | x^2 - 2x - 3 < 0\} = \{x | -1 < x < 3\}$, $\complement_U A = \{x | x < 0 \text{ 或 } x \geq 2\}$, 所以 $A \cap B = \{x | 0 \leq x < 2\}$, $A \cup B = \{x | -1 < x < 3\}$, $\complement_U A \cap B = \{x | -1 < x < 0 \text{ 或 } 2 \leq x < 3\}$.



技巧点拨

考查对集合运算的理解及性质的运用.



变式训练 2

设全集 $U = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, 集合 $A = \{0, 1, 2, 3\}$, 集合 $B = \{2, 3, 4\}$, 求 $A \cap B$, $A \cup B$, $\complement_U A \cup \complement_U B$.

题型二 由交、并、补确定未知量的范围

例 3 已知集合 $M = \{x | a \leq x \leq a+3\}$, $N = \{x | x < -1 \text{ 或 } x > 5\}$, 若 $M \cap N = \emptyset$, 求实数 a 的取值范围.



解析

如图 1-3 所示, 要使 $M \cap N = \emptyset$, 必须满足 $\begin{cases} a+3 \leq 5, \\ a \geq -1, \end{cases}$ 解得 $-1 \leq a \leq 2$, 所以实数 a 的取值范围为 $\{a | -1 \leq a \leq 2\}$.

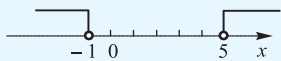


图 1-3



技巧点拨

解题时利用数轴表示集合, 便于寻求满足条件的实数 a . 特别需要注意的是“端点值”的问题, 是能取“=”还是不能取“=”.



变式训练 3

已知 $A = \{x | a \leq x \leq a+3\}$, $B = \{x | x > 1 \text{ 或 } x < -6\}$.

- (1) 若 $A \cap B = \emptyset$, 求 a 的取值范围;
 (2) 若 $A \cup B = B$, 求 a 的取值范围.



巩固练习

基础巩固

一、选择题

- 已知集合 $A = \{2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$, 则 $A \cap B =$ ()
 A. $\{2\}$ B. $\{2, 4\}$ C. $\{2, 3, 4, 6, 8\}$ D. $\{3, 6, 8\}$
- 已知集合 $U = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $A = \{1, 5, 7\}$, 则 $\complement_U A =$ ()
 A. $\{1, 3\}$ B. $\{3, 7, 9\}$ C. $\{3, 5, 9\}$ D. $\{3, 9\}$
- 设集合 $A = \{x | -2 < x < 3\}$, $B = \{x | x \geq 1\}$, 则 $A \cup B =$ ()
 A. $\{x | 1 \leq x < 3\}$ B. $\{x | x < -2 \text{ 或 } x > 3\}$
 C. $\{x | x > -2\}$ D. $\{x | x < -2 \text{ 或 } x \geq 1\}$
- 设集合 $A = \{1, 2, 3\}$, 集合 B 满足 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$, 则集合 B 的个数为 ()
 A. 2 B. 4 C. 8 D. 16
- 设集合 $A = \{x | 2 \leq x < 4\}$, $B = \{x | 3x - 7 \geq 8 - 2x\}$, 则 $A \cup B$ 等于 ()
 A. $\{x | x \geq 3\}$ B. $\{x | x \geq 2\}$ C. $\{x | 2 \leq x < 3\}$ D. $\{x | x \geq 4\}$
- 集合 $A = \{0, 2, a\}$, $B = \{1, a^2\}$. 若 $A \cup B = \{0, 1, 2, 4, 16\}$, 则 a 的值为 ()
 A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

二、填空题

- 已知集合 $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, 则 $A \cap B =$ _____.
- 已知集合 $A = \{(x, y) | x + y = 1\}$, $B = \{(x, y) | 2x - y = 2\}$, 则 $A \cap B =$ _____.
- 已知集合 $A = \{x | x + 1 > 0\}$, $B = \{x | 3x - 6 < 0\}$. 则 $A \cap B =$ _____.

三、解答题

- 已知集合 $A = \{1, 5\}$, $B = \{1, 2, x^2 - 1\}$, 若 $A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$, 求 x 及 $A \cap B$.
- 设全集 $U = \{0, 1, 2, 5, 7\}$, 集合 $A = \{0, 1, 2, 5\}$, 集合 $B = \{2, 5, 7\}$, 求 $A \cap B$, $A \cup B$, $\complement_U A \cup \complement_U B$.

3. 已知集合 $A = \{-4, 2a-1, a^2\}$, $B = \{a-5, 1-a, 9\}$, 若 $A \cap B = \{9\}$, 求 a 的值.

能力提升

1. 已知集合 $A = \{x | x^2 - px + 16 = 0\}$, $B = \{x | x^2 - 5x + q = 0\}$, 且 $A \cap B = \{2\}$. 求 $A \cup B$.

2. 已知集合 $A = \{y | y = x^2 - 2x + 5, y \in \mathbf{N}\}$, $B = \{y | y = -x^2 - 4x + 10, y \in \mathbf{N}\}$. 求 $A \cap B$ 中所有元素的和.

第三节 充要条件



真题链接

1. (2022 · 湖南) “ $(x+1)(x-3)=0$ ” 是 “ $x=3$ ” 的 ().

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充分且必要条件

D. 既不充分也不必要条件

答案: B

解析: 方程 $(x+1)(x-3)=0$ 的解为 $x=-1$ 或 $x=3$, 所以 “ $(x+1)(x-3)=0$ ” 是 “ $x=3$ ” 的必要不充分条件.

2. (2021 · 湖南) “ $x=1$ ”是“ $x^2-3x+2=0$ ”的().

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

答案:A

解析:将 $x=1$ 代入 $x^2-3x+2=0$ 可得 $1-3+2=0$, 故“ $x=1$ ”是“ $x^2-3x+2=0$ ”的充分不必要条件; 由 $x^2-3x+2=0$ 得 $x=1$ 或 $x=2$, 故“ $x=1$ ”不是“ $x^2-3x+2=0$ ”的必要不充分条件. 故选 A.

3. (2020 · 湖南) “ $x=1$ ”是“ $x^2-1=0$ ”的().

- A. 充要条件 B. 必要不充分条件
C. 充分不必要条件 D. 既不充分也不必要条件

答案:C

解析: $x^2-1=0$ 解得 $x=1$ 或 $x=-1$, 由小范围能推出大范围, 大范围推不出小范围. 故选 C.



知识梳理

1. 充要条件的定义

(1) 对于两个命题 p, q , 如果有 $p \Rightarrow q$, 则称 p 是 q 的充分条件, q 是 p 的必要条件.

注意: p 是 q 的充分不必要条件是指只要具备了条件 p , 那么 q 就一定成立, 即命题中的条件是充分的; q 是 p 的必要不充分条件是指如果不具备条件 q , 则 p 就不能成立, 即 q 是 p 成立的必不可少的条件.

(2) 如果 $p \Rightarrow q$ 且 $q \Rightarrow p$, 即 $p \Leftrightarrow q$, 则 p 是 q 的充分且必要条件, 简称充要条件.

注意: ①当 $p \Leftrightarrow q$ 时, 也称 p 与 q 是等价的.

②与充要条件等价的词语有“当且仅当”“等价于”“有且只有”“反过来也成立”等.

2. 充要条件的判断方法

(1) 从逻辑推理关系上判断(定义法).

- ①若 $p \Rightarrow q$ 但 $q \nRightarrow p$, 则 p 是 q 的充分不必要条件.
②若 $p \nRightarrow q$ 但 $q \Rightarrow p$, 则 p 是 q 的必要不充分条件.
③若 $p \Rightarrow q$ 且 $q \Rightarrow p$, 则 p 是 q 的充要条件.
④若 $p \nRightarrow q$ 且 $q \nRightarrow p$, 则 p 是 q 的既不充分也不必要条件.

(2) 从命题所对应的集合与集合之间的关系上判断(集合法). 设命题 p 对应的集合为 A , 命题 q 对应的集合为 B .

- ①若 $A \subseteq B$, 则 p 是 q 的充分条件.
②若 $A \supseteq B$, 则 p 是 q 的必要条件.
③若 $A \subseteq B$ 且 $A \supseteq B$, 即 $A=B$, 则 p 是 q 的充要条件.
④若 $A \not\subseteq B$ 且 $A \not\supseteq B$, 则 p 是 q 的既不充分也不必要条件.



典例解析

题型一 充要条件的判断

例1 已知 $p: |3x-5| < 4, q: (x-1)(x-2) < 0$, 则 p 是 q 的().

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件



**解析**

$p: |3x-5| < 4 \Rightarrow p: \frac{1}{3} < x < 3, q: (x-1)(x-2) < 0 \Rightarrow q: 1 < x < 2$. 所以 $p \Rightarrow q$ 但 $q \Rightarrow p$, 所以 p 是 q 的必要不充分条件. 故选 B.

**技巧点拨**

判断充分必要条件时, 先要分清条件和结论, 进而找到条件与结论之间的逻辑推理关系.

**变式训练 1**

设命题甲为 $0 < x < 5$, 命题乙为 $|x-2| < 3$, 那么甲是乙的().

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

题型二**应用充要条件求未知数**

例 2 已知集合 $A = \left\{ y \mid y = x^2 - \frac{3}{2}x + 1, x \in \left[\frac{3}{4}, 2 \right] \right\}, B = \{ x \mid x + m^2 \geq 1 \}, p: x \in A, q: x \in B$, 并且 p 是 q 的充分条件, 求实数 m 的取值范围.

**解析**

由题意得 $A = \left[\frac{7}{16}, 2 \right], B = [1 - m^2, +\infty)$, 由于 p 是 q 的充分条件, 所以 $A \subseteq B$, 所以 $1 - m^2 \leq \frac{7}{16}$, 解得 $m \geq \frac{3}{4}$ 或 $m \leq -\frac{3}{4}$, 即实数 m 的取值范围是 $(-\infty, -\frac{3}{4}] \cup [\frac{3}{4}, +\infty)$.

**技巧点拨**

本题主要考查集合的运算以及充要条件的判断, 解题的关键是不等式之间的关系.

**变式训练 2**

已知 $p: x^2 - 2x - 3 < 0, q: -a < x - 1 < a$. 若 q 是 p 的一个必要不充分条件, 求实数 a 的取值范围.



巩固练习

基础巩固

一、选择题

1. “ $x < -2$ ”是不等式“ $x^2 - 4 > 0$ ”成立的 ()
 A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
2. “ $A \cap B = A$ ”是“ $A \subseteq B$ ”的 ()
 A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
3. 设甲是乙的充分不必要条件,乙是丙的充要条件,丁是丙的必要不充分条件,则甲是丁的 ()
 A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
4. “ $|x| \geq 1$ ”是“ $x \geq 1$ ”的 ()
 A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
5. “ $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ”是“ $\tan \alpha = 1$ ”的 ()
 A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
6. 命题“ $x = 3$ ”是命题“ $x^2 = 9$ ”的 ()
 A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

二、填空题

1. “ $x \in \mathbf{N}$ ”是“ $x \in \mathbf{Z}$ ”的_____条件.
2. “ $x = 0$ 或 $y = 0$ ”是“ $xy = 0$ ”的_____条件.
3. “ $ab = 0$ ”是“ $a^2 + b^2 = 0$ ”的_____条件.
4. “ $x = \frac{\pi}{4}$ ”是“ $y = \sin 2x$ 取得最大值”的_____条件.

三、解答题

1. 判断下列问题中, p 是 q 的什么条件?
 (1) $p: x^2 \geq y^2, q: x \geq y$;
 (2) $p: x \in A \cup B, q: x \in A \cap B$;
 (3) $p: x > 3, q: x > 2$;
 (4) $p: a$ 是有理数, $q: a + 2$ 是有理数.

2. 求一个对于一切实数 x 都有 $ax^2 - ax + 1 > 0$ 成立的充要条件.

能力提升

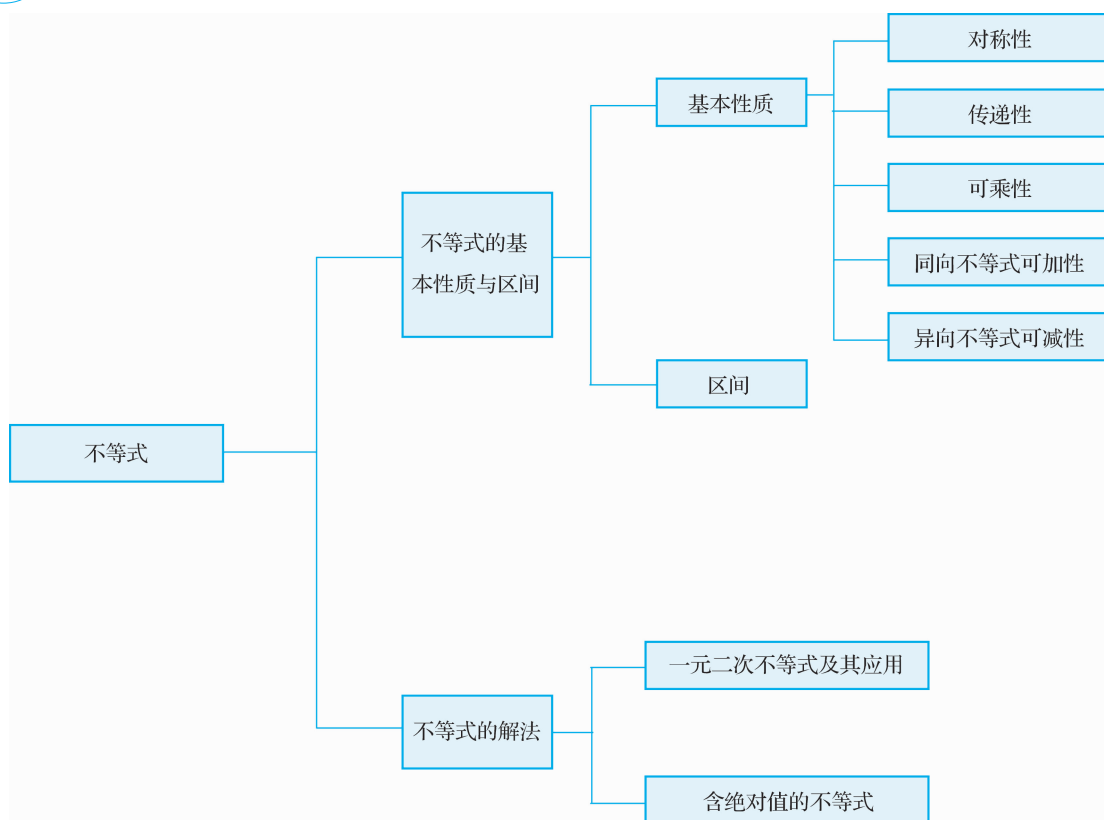
1. 已知 p 是 q 的充分不必要条件, s 是 r 的必要不充分条件, p 是 s 的充要条件, 则 q 是 r 的 _____ 条件.
2. 已知 $p: -2 \leq x \leq 10, q: x^2 - 2x + 1 - m^2 \leq 0 (m > 0)$, 若 p 是 q 的充分不必要条件, 求实数 m 的取值范围.

第二章

不等式



知识结构





考纲揭秘

- (1)理解不等式的基本性质.
- (2)掌握区间的概念.
- (3)掌握一元二次不等式的解法.
- (4)了解含绝对值的不等式 $|ax+b|<c$ (或 $>c$) 的解法.
- (5)掌握从实际问题中抽象出一元二次不等式模型解决简单实际问题的方法.



命题趋势

本章内容在历年真题中多以选择题形式出现,要求不高,难度不大.不等式主要从三个方面进行考查:一是考查不等式的基本性质;二是考查一元二次不等式、一元一次绝对值不等式的解法,会用集合、区间表示不等式的解集;三是从实际问题中抽象出一元二次不等式模型解决简单实际问题.

第一节

不等式的基本性质与区间



真题链接

(2021·湖南)若 $a>b, c>d$, 则().

A. $a+c>b+d$

B. $a-c>b-d$

C. $ac>bd$

D. $ad>bc$

答案:A

解析:根据不等式的性质,可知 A 正确;若 $a=1, b=-1, c=2, d=-2$, 则 $a-c<b-d, ac=bd, ad=bc$, 故 B,C,D 不正确. 故选 A.



知识梳理

知识点一

不等式的基本性质

1. 实数的大小比较

(1)作差比较法. 对于任意两个实数 a, b .

① $a-b>0 \Leftrightarrow a>b$;

② $a-b=0 \Leftrightarrow a=b$;

③ $a-b<0 \Leftrightarrow a<b$.

(2)一般步骤:①作差;②变形(化为能判断正负的数或式子);③判断(正、负或零);④结论.

2. 不等式的基本性质

性质 1: 如果 $a > b$, 并且 $b > c$, 那么 $a > c$.

性质 2: 如果 $a > b$, 那么 $a + c > b + c$.

性质 3: 如果 $a > b, c > 0$, 那么 $ac > bc$; 如果 $a > b, c < 0$, 那么 $ac < bc$.

推论: (1) $a > b, c > d \Rightarrow a + c > b + d$. (同向不等式可加性)

(2) $a > b, c < d \Rightarrow a - c > b - d$. (异向不等式可减性)

(3) $a > b > 0, c > d > 0 \Rightarrow ac > bd$.

(4) $a > b > 0 \Rightarrow \sqrt{a} > \sqrt{b}; a > b > 0 \Rightarrow a^2 > b^2$.

知识点二 区间

1. 有限区间

数轴上两点间的一切实数所组成的集合叫作区间, 其中, 这两个点叫作区间端点.

设 a, b 是实数, 且 $a < b$,

满足 $a < x < b$ 的实数的全体, 叫作开区间, 记作 (a, b) .

满足 $a \leq x \leq b$ 的实数的全体, 叫作闭区间, 记作 $[a, b]$.

满足 $a \leq x < b$ 的实数的全体, 叫作右半开区间, 记作 $[a, b)$.

满足 $a < x \leq b$ 的实数的全体, 叫作左半开区间, 记作 $(a, b]$.

2. 无限区间

其中符号“ $+\infty$ ”读作“正无穷大”; 符号“ $-\infty$ ”读作“负无穷大”.

满足 $x < b$ 的全体实数, 可记作 $(-\infty, b)$.

满足 $x \leq b$ 的全体实数, 可记作 $(-\infty, b]$.

满足 $x > a$ 的全体实数, 可记作 $(a, +\infty)$.

满足 $x \geq a$ 的全体实数, 可记作 $[a, +\infty)$.



典例解析

题型一 用作差法比较大小

例 1 试比较 $2x^2 - 3x + 7$ 与 $x^2 + x + 2$ 的大小.



解析

(作差法) $2x^2 - 3x + 7 - (x^2 + x + 2) = x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 + 1 > 0$.

因此 $2x^2 - 3x + 7 > x^2 + x + 2$.



技巧点拨

本题考查比较代数式大小的方法. 作差法是判断两个数(或代数式)大小的基本方法之一, 在比较代数式大小的时候要注意变量的取值范围.



变式训练 1

比较下列各式的大小.

(1) $(a+1)(a+3)$ 和 $(a-1)(a+5)$;

(2) a^2+10 和 $6a$.

题型二 不等式的基本性质的应用

例 2 下列命题中正确的是().

A. 若 $a>b$, 则 $ac>bc$

B. 若 $a>b$, 且 $c>d$, 则 $a+d>b+c$

C. 若 $ac^2>bc^2$, 则 $a>b$

D. 若 $a>b$, 且 $c>d$, 则 $ac>bd$



解析

对于本题选项 A, 若 $c=0$, 则 $ac=bc=0$, A 选项不成立; 对于选项 B 和选项 D, 可以通过特殊值来判断, 令 $a=0, b=-1, c=-2, d=-3$, 可排除选项 B 和 D. 本题选项 C 正确.



技巧点拨

解答此类题目, 要注意不等式性质的正确应用, 同时也要考虑其他知识. 另外也可用特殊值法来判断.



变式训练 2

设 $a>b>c>1$, 则下列不等式中不正确的是().

A. $a^c>b^c$

B. $\log_a b>\log_a c$

C. $c^a>c^b$

D. $\log_b c<\log_a c$

例 3 已知 $6<a<10, 2<b<3$, 求 $a+b, a-b, ab, \frac{a}{b}$ 的取值范围.



解析

$a+b, ab$ 的取值范围可直接利用不等式的同向可加性和同向可乘性求得. 对 $a-b$ 和 $\frac{a}{b}$ 的取值范围, 应先求出 $-b$ 和 $\frac{1}{b}$ 的取值范围.

根据不等式的同向可加性可知 $8<a+b<13$; 根据不等式的同向可乘性可知 $12<ab<30$;

因为 $2<b<3$, 所以 $-3<-b<-2$.

又因为 $6<a<10$, 所以 $6-3<a-b<10-2$, 即 $3<a-b<8$.

又因为 $\frac{1}{3}<\frac{1}{b}<\frac{1}{2}$, 所以 $\frac{6}{3}<\frac{a}{b}<\frac{10}{2}$, 即 $2<\frac{a}{b}<5$.



技巧点拨

利用不等式的性质求取值范围一定要熟练掌握不等式的性质, 特别是同向可加性和同向可乘性.



变式训练 3

已知 $-1 < x + y < 4$ 且 $2 < x - y < 3$, 求 $z = 2x - 3y$ 的取值范围.

题型三 区间的应用

例 4 已知全集为实数集 $\mathbf{R}$, 集合 $A = (-\infty, 4)$, $B = [1, 6)$, 求: (1) $A \cup B$, $A \cap B$; (2) $\complement A$, $\complement B$; (3) $B \cap \complement A$.



解析 集合 A, B 在数轴上表示如图 2-1 所示:

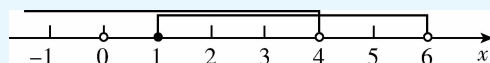


图 2-1

由图可看出:

$$(1) A \cup B = (-\infty, 6), A \cap B = [1, 4).$$

$$(2) \complement A = [4, +\infty), \complement B = (-\infty, 1) \cup [6, +\infty).$$

$$(3) B \cap \complement A = [4, 6).$$



技巧点拨

由此题可以看出, 一般可以用区间来表示的集合用区间表示会更方便.



变式训练 4

设 $U = \mathbf{R}$, $A = (-1, 3]$, $B = [1, 4]$. 用区间表示 $A \cup B$, $A \cap B$.



巩固练习

基础巩固

一、选择题

1. 如果 $a > b, b > c, c \geq n$, 则下列各项中正确的是 ()

A. $a < n$

B. $a \leq n$

C. $a > n$

D. $a \geq n$

2. 如果 $a < b$, 则下列各项中正确的是 ()

A. $a - c > b - c$

B. $ac < bc$

C. $ac > bc$

D. $a - c < b - c$

3. 下列命题正确的是 ()

A. $a > b, c > d \Rightarrow ac > bd$

B. $ac < bc \Rightarrow a < b$

C. $a > b \Rightarrow a^n > b^n (n \in \mathbf{N}^*)$

D. $a > b > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

4. “ $cd > 0$ ”是“ $c > 0$ 且 $d > 0$ ”的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

5. 设全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = (-\infty, 3]$, 则 $\complement_U A =$ ()

- A. $(-\infty, 3]$ B. $(-\infty, 3)$ C. $(3, +\infty)$ D. $[3, +\infty)$

6. 设集合 $M = [-3, 2)$, 集合 $N = (0, 5)$, 则 ()

- A. $M \cup N = [-3, 5)$ B. $M \cap N = \emptyset$ C. $M \cup N = \mathbf{R}$ D. $M \cap N = [0, 2)$

二、填空题

1. 若 $a < -2a$, 则 a _____ 0, 若 $a > 2a$, 则 a _____ 0.

2. 若 $a > b, c + 1 < 0$, 则 ac _____ bc, ac^2 _____ bc^2 .

3. 比较大小: $\frac{7}{9}$ _____ $\frac{7}{11}, \frac{5}{8}$ _____ $\frac{8}{11}, a^2$ _____ 0.

4. 集合 $\{x | 1 < x \leq 3\}$ 用区间表示为 _____.

集合 $\left\{x \mid x \neq \frac{3}{5}\right\}$ 用区间表示为 _____.

三、解答题

1. 试比较 $2a^2 - 3a + 6$ 与 $a^2 + a + 1$ 的大小.

2. 已知 $a > 0$ 时, 比较 $\frac{a}{a+1}$ 与 $\frac{a+1}{a+2}$ 的大小.

能力提升

1. 如果 $m < n, m \neq 0, n \neq 0$, 那么 ()

- A. $\frac{1}{m} < \frac{1}{n}$ B. $\frac{1}{m} = \frac{1}{n}$ C. $\frac{1}{m} > \frac{1}{n}$ D. $\frac{1}{m}$ 和 $\frac{1}{n}$ 的大小不能确定

2. 已知全集为 $\mathbf{R}, A = [-2, 5), B = (-\infty, 3)$, 求:

(1) $\complement_{\mathbf{R}} A, \complement_{\mathbf{R}} B$; (2) $\complement_{\mathbf{R}} A \cup \complement_{\mathbf{R}} B$; (3) $\complement_{\mathbf{R}} A \cap \complement_{\mathbf{R}} B$.

第二节

一元二次不等式及其应用



真题链接

(2023·湖南) 不等式 $x^2 - 2x - 3 \leq 0$ 的解集是().

A. $[-1, 3]$

B. $[-3, 1]$

C. $(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$

D. $(-\infty, -3] \cup [1, +\infty)$

答案:A

解析: $x^2 - 2x - 3 \leq 0$ 可化为 $(x-3)(x+1) \leq 0$, 解得 $-1 \leq x \leq 3$, 故选 A.



知识梳理

1. 一元二次不等式的定义

只含有一个未知数, 并且未知数的最高次数是 2 的不等式, 称为一元二次不等式. 例如, $x^2 - 5x < 0$.

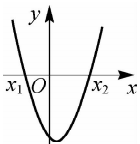
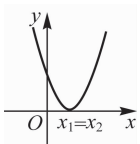
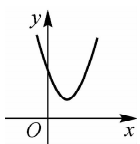
任意的一元二次不等式, 总可以化为一般形式: $ax^2 + bx + c > 0 (a > 0)$ 或 $ax^2 + bx + c < 0 (a > 0)$.

2. 一般的一元二次不等式的解法

一元二次不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 或 $ax^2 + bx + c < 0 (a \neq 0)$ 的解集可以联系二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的图像, 图像在 x 轴上方部分对应的横坐标 x 值的集合为不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集, 图像在 x 轴下方部分对应的横坐标 x 值的集合为不等式 $ax^2 + bx + c < 0$ 的解集.

如果一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a > 0)$ 的两根为 x_1, x_2 且 $x_1 \leq x_2, \Delta = b^2 - 4ac$, 则相应的不等式的解集的各种情况见表 2-1.

表 2-1

$\Delta = b^2 - 4ac$	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$) 的图像			
$ax^2 + bx + c = 0$ ($a > 0$) 的根	有两相异实根 $\{x_1, x_2\} (x_1 < x_2)$	有两相等实根 $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$	无实根
$ax^2 + bx + c > 0$ ($a > 0$) 的解集	$\{x \mid x < x_1 \text{ 或 } x > x_2\}$	$\{x \mid x \neq -\frac{b}{2a}\}$	$\mathbf{R}$
$ax^2 + bx + c < 0$ ($a > 0$) 的解集	$\{x \mid x_1 < x < x_2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$

注意: (1)一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a \neq 0)$ 的两根 x_1, x_2 是相应的一元二次不等式的解集的端点取值, 是抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴的交点的横坐标.

(2)表中不等式的二次项系数均为正, 如果不等式的二次项系数为负, 应先利用不等式的性质将其转化为二次项系数为正的形式, 然后讨论解决.

3. 解一元二次不等式的步骤

(1)看二次项系数是否为正, 若为负, 则将二次项系数化为正数.

(2)写出相应的方程 $ax^2+bx+c=0(a>0)$, 计算判别式 Δ .

①当 $\Delta>0$ 时, 求出两根 x_1, x_2 , 且 $x_1<x_2$ (注意灵活运用因式分解和配方法).

②当 $\Delta=0$ 时, 求根 $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$.

③当 $\Delta<0$ 时, 方程无解.

(3)根据不等式, 写出解集.

4. 解一元二次不等式应用题的基本步骤

(1)审: 审清题意, 找出已知量, 未知量, 以及表示不等关系的关键字, 如: 至少, 最多, 超过, 不低于, 不大于, 不高于, 大于, 小于, 多, 少, 大于或等于等等.

(2)设: 设一个适当的未知数, 一般是与所求问题有直接关系的量.

(3)列: 依据不等关系列出不等式.

(4)解: 解出不等式的解集.

(5)验: 检验结果是否合理, 有些结果不符合实际.

(6)答: 根据所得结果作出问答.



典例解析

题型一 用适当的方法解一元二次不等式

例 1 不等式 $(2x+3)(x+1) \leq 0$ 的解集为().

A. $[-\frac{3}{2}, -1]$

B. $(-\infty, -\frac{3}{2}] \cup (-1, +\infty)$

C. $[-\frac{3}{2}, -1)$

D. $(-\infty, -\frac{3}{2}] \cup [-1, +\infty)$



解析

经整理得不等式 $(2x+3)(x+1) \leq 0$ 的解集为 $[-\frac{3}{2}, -1]$, 因此选 A.



技巧点拨

掌握不等式的等价变形, 注意分母不为零.



变式训练 1

一元二次不等式 $4x^2+3x-2 \leq 0$ 的解集为().

A. $[\frac{-3-\sqrt{41}}{8}, \frac{-3+\sqrt{41}}{8}]$

B. $(-\infty, \frac{-3-\sqrt{41}}{8}] \cup [\frac{-3+\sqrt{41}}{8}, +\infty)$

C. $\emptyset$ D. $\left[\frac{-3-\sqrt{41}}{8}, \frac{-3+\sqrt{41}}{8}\right)$ **例 2** 一元二次不等式 $-x^2-5x+6 \geq 0$ 的解集是().A. $[-6, 1]$ B. $(-6, 1)$ C. $(-\infty, -6) \cup (1, +\infty)$ D. $(-\infty, -6] \cup [1, +\infty)$ **解析**采用十字交叉相乘法或求根公式求解, 并注意二次项系数要为正数. $-x^2-5x+6 \geq 0$, 变形得 $x^2+5x-6 \leq 0$, 解得 $-6 \leq x \leq 1$, 因此选 A.**技巧点拨**

掌握用十字交叉相乘法或求根公式求解一元二次不等式, 这时二次项系数为正数.

**变式训练 2**一元二次不等式 $2x^2-8x-4 > x^2-4x+1$ 的解集是().A. $(-\infty, -1] \cup [5, +\infty)$ B. $(-1, 5)$ C. $(-\infty, -1) \cup (5, +\infty)$ D. $[-1, 5]$ **题型二****一元二次不等式的解集与一元二次方程根的关系****例 3** 已知不等式 $ax^2+bx+10 \leq 0$ 的解集是 $[2, 5]$, 则 $a+b$ 的值等于().

A. -6

B. 6

C. -7

D. 7

**解析**由 $\frac{10}{a} = 2 \times 5$, 得 $a = 1$. 由 $-\frac{b}{a} = 7$, 得 $b = -7$, 故 $a+b = -6$, 因此选 A.**技巧点拨**掌握用韦达定理(根与系数的关系)来求解 a, b .**变式训练 3**已知一元二次不等式 $mx^2+7x+2 \leq 0$ 的解集为 $\left[n, -\frac{1}{2}\right]$, 则 m, n 的值为().A. $m=6, n=\frac{2}{3}$ B. $m=6, n=-\frac{2}{3}$ C. $m=-6, n=\frac{2}{3}$ D. $m=-6, n=-\frac{2}{3}$ **题型三****一元二次不等式的实际应用****例 4** 某摩托车生产企业, 上年度生产摩托车的投入成本为 1 万元/辆, 出厂价为 1.2 万元/辆, 年销售量为 1 000 辆. 本年度为适应市场需求, 计划提高产品档次, 适当增加投入成本. 若每辆车投入成本增加的比例为 x ($0 < x < 1$), 则出厂价相应提高的比例为 $0.75x$, 同时预计年销售量增加的比例为 $0.6x$. 设年利润 = (出厂价 - 投入成本) $\times$ 年销售量, 为使本年度的年利润比上年有所增加, 问投入成

本增加的比例应在什么范围内?



解析 根据题意可列不等式

$$[1.2 \times (1 + 0.75x) - 1 \times (1 + x)] \times [1\,000 \times (1 + 0.6x)] > (1.2 - 1) \times 1\,000,$$

整理得 $3x^2 - x < 0$, 解一元二次不等式得 $0 < x < \frac{1}{3}$.

因此, 投入成本增加的比例应在 $\left(0, \frac{1}{3}\right)$ 内.



技巧点拨 理解题意, 正确列式是解题的关键.



变式训练 4

某文具店购进一批新型台灯, 每盏的最低售价为 15 元, 若每盏按最低售价销售, 每天能卖出 45 盏, 每盏售价每提高 1 元, 日销售量将减少 3 盏, 为了使这批台灯每天获得 600 元以上的销售收入, 则这批台灯的销售单价 x (单位: 元) 的取值范围是 ().

A. $(10, 20)$

B. $[15, 20)$

C. $(18, 20)$

D. $[15, 25)$



巩固练习

基础巩固

一、选择题

1. 一元二次不等式 $x^2 + 4x + 3 \leq 0$ 的解集为 ()

A. $(-3, -1)$

B. $(-\infty, -3) \cup (-1, +\infty)$

C. $[-3, -1]$

D. $(-\infty, -3) \cup [-1, +\infty)$

2. 不等式 $\frac{x-1}{x+4} \geq 0$ 的解集为 ()

A. $(-\infty, -4) \cup (1, +\infty)$

B. $[-4, -1)$

C. $(-\infty, -4) \cup [1, +\infty)$

D. $[-4, -1]$

3. 一元二次不等式 $2x^2 + 15x + 7 \leq 0$ 的解集为 ()

A. $(-\infty, -7) \cup \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$

B. $(-\infty, -7) \cup \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$

C. $\left[-7, -\frac{1}{2}\right]$

D. $\left(-7, -\frac{1}{2}\right)$

4. 若不等式 $ax^2 + bx - 4 > 0$ 的解集为 $\left\{x \mid -2 < x < -\frac{1}{4}\right\}$, 则 a, b 的值分别为 ()

A. $a = -8, b = -18$

B. $a = -8, b = 18$

C. $a = \frac{16}{9}, b = -\frac{8}{9}$

D. $a = \frac{18}{9}, b = \frac{8}{9}$

5. 一元二次不等式 $(x-1)(3-x) < 5-2x$ 的解集是 ()

- A. $(-\infty, 2] \cup [4, +\infty)$ B. $(-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$
C. $[2, 4]$ D. $(2, 4)$

6. 已知一元二次不等式 $mx^2 + nx + 8 \leq 0$ 的解集是 $[3, 4]$, 则 $m+n$ 的值等于 ()

- A. -4 B. $\frac{16}{3}$ C. 4 D. $-\frac{16}{3}$

7. 有一人患了流感, 经过两轮传染后超过 100 人患了流感, 若设每轮传染中平均一个人传染了 x 个人, 那么 x 满足的不等关系为 ()

- A. $x(1+x) \geq 100$ B. $1+x(1+x) > 100$
C. $x+x(1+x) \geq 100$ D. $1+x+x(1+x) > 100$

8. 某地每年销售木材约 20 万立方米, 每立方米价格为 2 400 元, 为了减少木材消耗, 决定按销售收入的 $t\%$ 征收木材税, 这样每年的木材销售量减少 $\frac{5}{2}t$ 万立方米, 为了既减少木材消耗又保证税金收入每年不少于 900 万元, 则 t 的取值范围是 ()

- A. $\{t | 1 \leq t \leq 3\}$ B. $\{t | 3 \leq t \leq 5\}$ C. $\{t | 2 \leq t \leq 4\}$ D. $\{t | 4 \leq t \leq 6\}$

二、填空题

1. 要在长为 800 m, 宽为 600 m 的一块长方形地面上进行绿化, 要求四周种花卉(花卉的宽度相同), 中间种草皮. 要求草皮的面积不少于总面积的一半, 则花卉宽度的范围是_____.

2. 若 $0 < a < 1$, 则不等式 $x^2 - \left(a + \frac{1}{a}\right)x + 1 < 0$ 的解是_____.

三、解答题

1. 求函数 $y = \sqrt{2x^2 + 2x - 12}$ 的定义域.

2. 已知一元二次不等式组 $\begin{cases} x^2 - 7x + 6 < 0, \\ x^2 - 8x + 12 \geq 0, \end{cases}$ 求该不等式组的解集.

能力提升

1. 若关于 x 的不等式 $x^2 + (m-2)x + \frac{1}{2}m - 1 \leq 0$ 的解集为空集, 求 m 的取值范围.

2. 用一根长 120 m 的绳子能围成一个面积不小于 800 m^2 的矩形吗?

第三节 含绝对值的不等式



真题链接

1. (2022 · 湖南) 不等式 $|2x+5| > 7$ 的解集是().

A. $(-6, 1)$

B. $(-\infty, -6) \cup (1, +\infty)$

C. $(-1, 6)$

D. $(-\infty, -1) \cup (6, +\infty)$

答案: B

解析: 由 $|2x+5| > 7$ 得 $2x+5 < -7$ 或 $2x+5 > 7$, 解得 $x < -6$ 或 $x > 1$.

2. (2021 · 湖南) 不等式 $|2x-1| < 3$ 的解集是().

A. $\{x | x < 2\}$

B. $\{x | x > -1\}$

C. $\{x | -1 < x < 2\}$

D. $\{x | x < -1 \text{ 或 } x > 2\}$

答案: C

解析: 由 $|2x-1| < 3$ 得 $-3 < 2x-1 < 3$, 解得 $-1 < x < 2$, 所以不等式的解集是 $\{x | -1 < x < 2\}$.

故选 C.



知识梳理

1. 绝对值的概念

(1) 代数定义.

对任意实数 x , 有 $|x| = \begin{cases} x, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$

(2) 几何意义. 数轴上表示实数 x 的点到原点的距离.

注意: 一个数的绝对值是非负的.

2. 含绝对值的不等式的解集($0 < a < b, m \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{R}$)

(1) $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$ 从而 $|mx+n| < a \Leftrightarrow -a < mx+n < a$.

(2) $|x| > a \Leftrightarrow x < -a$ 或 $x > a$ 从而 $|mx+n| > a \Leftrightarrow mx+n < -a$ 或 $mx+n > a$.

(3) $a < |mx+n| < b \Leftrightarrow \begin{cases} |mx+n| > a, \\ |mx+n| < b. \end{cases}$



典例解析

题型 含绝对值的不等式的解法

例 1 求下列含绝对值不等式的解集:

(1) $|2x-1| \leq 5$; (2) $3|1-x| > 12$; (3) $|x|+3 < 0$.

解析 (1) 由 $|2x-1| \leq 5 \Leftrightarrow -5 \leq 2x-1 \leq 5$ 即 $-2 \leq x \leq 3$, 所以原不等式解集为 $[-2, 3]$.(2) 由 $3|1-x| > 12 \Leftrightarrow |1-x| > 4 \Leftrightarrow 1-x < -4$ 或 $1-x > 4$ 即 $x < -3$ 或 $x > 5$, 所以原不等式解集为 $(-\infty, -3) \cup (5, +\infty)$.(3) 由 $|x|+3 < 0$ 得 $|x| < -3$ 与绝对值为非负矛盾, 所以原不等式解集为 $\emptyset$.

技巧点拨 首先判断是否为标准形式的绝对值不等式, 再将绝对值不等式进行等价转化为一元一次不等式(组), 从而求解.



变式训练 1

求下列含绝对值不等式的解集.

(1) $2|x| < 6$; (2) $|5-3x| > 7$; (3) $2|x+1|-3 \leq 5$.

例 2 解不等式组 $\begin{cases} |2x+3| \leq 5, \\ x^2-3 > 2x. \end{cases}$

解析 由不等式 $|2x+3| \leq 5 \Leftrightarrow -5 \leq 2x+3 \leq 5$ 即 $-4 \leq x \leq 1$,又由不等式 $x^2-3 > 2x \Leftrightarrow x^2-2x-3 > 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-3) > 0$ 即 $x < -1$ 或 $x > 3$,求交集 $\begin{cases} -4 \leq x \leq 1, \\ x < -1 \text{ 或 } x > 3, \end{cases}$ 得原不等式组解集为 $[-4, -1)$.

技巧点拨 首先分别求绝对值不等式 and 一元二次不等式的解集, 再求两个不等式解集的交集.





变式训练 2

解不等式(组) $\begin{cases} |3x-2| \leq 4, \\ \frac{x+1}{3} > 1 - \frac{x}{6}. \end{cases}$



巩固练习

基础巩固

一、选择题

- 不等式 $|x+2| < 3$ 的解集是 ()
 A. $\{x|x < -5 \text{ 或 } x > 1\}$ B. $\{x|x > 1\}$
 C. $\{x|x < -5\}$ D. $\{x|-5 < x < 1\}$
- 不等式 $|3x-1| \geq 5$ 的解集为 ()
 A. $(-\infty, -\frac{4}{3}]$ B. $[2, +\infty)$
 C. $(-\infty, -\frac{4}{3}] \cup [2, +\infty)$ D. $[-\frac{4}{3}, 2]$
- 不等式 $3|x-2| \leq 9$ 的解集为 ()
 A. $(-\infty, 1] \cup [5, +\infty)$ B. $[-1, 5]$
 C. $[5, +\infty)$ D. $(-\infty, 1]$
- 不等式 $|x+1| + 2 > 0$ 的解集是 ()
 A. $\mathbf{R}$ B. $\emptyset$ C. $(-1, +\infty)$ D. $(-1, 0)$
- 在数轴上与原点距离不大于 3 的点的坐标的集合是 ()
 A. $\{x|x \leq -3 \text{ 或 } x \geq 3\}$ B. $\{x|-3 \leq x \leq 3\}$
 C. $\{x|x \leq -3\}$ D. $\{x|x \geq 3\}$
- 不等式 $|2x-3| \leq 1$ 的整数解的个数是 ()
 A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

二、填空题

- 不等式 $|1-3x| < 2$ 的解集为_____.
- 不等式 $|2x+3| - 7 > 0$ 的解集是_____.
- 已知集合 $A = \{x | |x-1| < 3\}$, $B = \{x | |x+2| \geq 5\}$, 则 $A \cap B =$ _____.

4. 设不等式 $|x-b| < a (a > 0)$ 的解集为 $(-1, 2)$, 则 $a+b$ 的值为_____.

三、解答题

1. 求不等式 $|1-4x| \leq 7$ 的解集.

2. 解不等式组
$$\begin{cases} |x+2| \leq 5, \\ x^2 - 4x - 5 < 0. \end{cases}$$

能力提升

1. 关于 x 的不等式 $|x+a| < 1$ 的解集是 $\{x | 1 < x < 3\}$, 求实数 a 的值.

2. 已知集合 $A = \{x | |x-1| < 2\}$, $B = \{x | x-a > 0\}$, 且 $A \subseteq B$, 求实数 a 的取值范围.