语文（第1册）（第4版）
语文练习册（第1册）
语文（第2册）（第4版）
语文练习册（第2册）

数学（第1册）（第5版）
数学（第2册）（第5版）

英语（第1册）（第4版）
英语（第2册）（第4版）

物理（第4版）
化学（第4版）

计算机应用基础

新编五年制高等职业教育教材
XINBIAN WUNIANZHI GAODENGZHIYEJIAOYUJIAOCAI

ISBN 978-7-5664-2356-6
定价：46.00元

数学（第1册）（第5版）
洪晓峰 张 伟◎主编
北京师范大学出版集团
安徽大学出版社

“十四五”职业教育国家规划教材
新编五年制高等职业教育教材

数学

（第5版）

（第1册）

SHUXUE

洪晓峰 张 伟◎主编

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
安徽大学出版社

“十四五”职业教育国家规划教材
新编五年制高等职业教育教材

数学

（第5版）

（第1册）

SHUXUE

主　编　洪晓峰　张　伟
副主编　葛文军　周文龙　吴邦昆
　　　　江万满　孟红军
编　委（按姓氏笔画排序）
　　　　王　力　朱兴伟　仲继东
　　　　江万满　苏立本　李兰兰
　　　　吴邦昆　张　伟　陈　傑
　　　　周文龙　孟红军　洪晓峰
　　　　葛文军

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
安徽大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学.第1册/洪晓峰,张伟主编.—5版.—合肥:安徽大学出版社,2021.12
新编五年制高等职业教育教材
ISBN 978-7-5664-2356-6

Ⅰ.①数… Ⅱ.①洪…②张… Ⅲ.①高等数学—高等职业教育—教材
Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2022)第001391号

数 学(第1册)(第5版) 洪晓峰 张 伟 主编

出版发行:北京师范大学出版集团
安 徽 大 学 出 版 社
(安徽省合肥市肥西路3号 邮编230039)
www.bnupg.com
www.ahupress.com.cn
印 刷:合肥远东印务有限责任公司
经 销:全国新华书店
开 本:787 mm×1092 mm 1/16
印 张:19.5
字 数:375千字
版 次:2021年12月第5版
印 次:2021年12月第1次印刷
定 价:46.00元
ISBN 978-7-5664-2356-6

策划编辑:刘中飞 陈玉婷 武溪溪
责任编辑:刘中飞 陈玉婷
责任校对:武溪溪
装帧设计:李 军
美术编辑:李 军
责任印制:赵明炎

编写说明

五年制高等职业教育《数学》教材自2001年（第1版）出版发行以来，得到了各级领导和专家以及教材使用学校的师生的肯定和支持．根据教学的实际情况和要求，我们于2007年对教材进行了修订．2011年我们在充分听取各方意见和广泛吸取同类、同层次教材的长处的基础上，再次对这套教材进行修订，修订后的第3版教材共分2册．第1册以初等数学为主，第2册以二次曲线、极坐标与参数方程、数列与数学归纳法、排列、组合、二项式定理以及一元函数微积分为主．特别要说明的是第3版教材的修订，教材结构变动较大，教材的质量得到进一步提高．在此衷心感谢为第3版教材的修订工作付出辛勤劳动的安徽机电职业技术学院夏国斌（第3版主编），安徽电气工程学校徐小伍，合肥铁路工程学校洪晓峰、葛文军，安徽化工学校周文龙、汪敏，安徽理工学校董安明，海军安庆市职业技术学校孙科，安徽省汽车工业学校章斌、徐黎，安徽省第一轻工业学校张永胜，安徽经济技术学院赵家成等老师．当然，我们也更不会忘记为本套教材（第1版）的出版作出重要贡献的夏国斌、韩业岚、李立众、姜绳、梁继会、刘传宝、吴方庭、辛颖、程伟、高山、吴照春、王芳玉、刘莲娣、杨兴慎、陈红、潘晓安等老师．

随着职业教育的不断发展，根据五年制高职数学教学的实际需要，我们于2018年对教材进行了修订，修订后的第4版教材（仍为2册）于2020年成功入选"十三五"职业教育国家规划教材．

由于国家"十四五"规划和党的二十大对职业教育提出了新的要求，为了让本套教材更贴近新形势下五年制高职教学的实际，推进职普融通、产教融合、科教融汇，优化职业教育类型定位，我们在保持第4版结构和特色的基础上，继续对教材进行修订．本次修订依据中等职业学校数学课程标准，对初等数学部分内容进行增减和调整，增加概率初步的部分内容及统计初步知识，删减反三角函数部分内容；在高等数学部分，删除了微分方程的内容．除此之外，我们对教材中部分阅读材料进行了调整和更新．修订后的第5版仍为2册．

第1册内容包括集合、充要条件、不等式，函数，任意角的三角函数，加法定理、正弦型曲线、解斜三角形，概率初步，统计初步，立体几何，直线和圆的方程等.第2册内容包括圆锥曲线、坐标转换与参数方程、平面向量与复数、数列、极限与连续、导数与微分、导数的应用、积分及其应用等.修订后的第5版全套教材主要体现以下特色：

1.简明易学，使用方便.教材在内容的组织与编排方面，由浅入深、由易到难、由具体到抽象，适应学生的年龄特点和认知水平，力求紧密结合实际，使教材更具弹性，更趋完善，能够适应更多专业的需要.在练习的安排上，采取多梯度安排练习题的方式，教材每节内容后均配有A（基础题）、B（提高题）两套课外习题，每章后还配有复习题和单元自测题，可供学生进行单元复习和自我检测.另外，本套教材中所有的习题、复习题及自测题都提供了参考答案，使用者可通过扫描二维码查阅.

2.紧密结合实际.注重从生活中的实际问题引入数学概念，利用数学知识解决实际问题.

3.体现时代特征.一方面，强调对计算器的使用，将相关知识点与计算器的使用相结合；另一方面，将一些教学内容与常用计算机软件有机结合起来，利用软件的强大功能，方便教师的教学，增强学生对数学的理解，提高教学效率.

4.拓宽视野.每章后附有阅读材料，内容涉及数学史及相关知识应用案例.

本套教材主要适用于五年制高等职业教育数学课程，同时也可以作为中等职业教育数学课程学习的辅助用书.本书是这套教材的第1册，由合肥铁路工程学校洪晓峰、皖北卫生职业学院张伟担任主编，参加本次教材修订的人员还有合肥铁路工程学校葛文军和苏立本等老师.洪晓峰、葛文军和苏立本三位老师为本册教材制作了教学辅助课件.

在教材的编写、修订过程中，我们得到了安徽省教育厅有关部门、各有关学校及安徽大学出版社的大力支持和帮助，在此一并表示衷心的感谢！

限于编者的学识和水平，教材中出现的错误、疏漏和不完善之处在所难免，敬请使用本教材的师生和同行予以指正.

编　者

2021年10月

目 录

第 1 章 集合 充要条件 不等式

第 2 章 函 数

第 3 章

任意角的三角函数

第 4 章

加法定理　正弦型曲线　解斜三角形

第 5 章

概率初步

第 6 章
统计初步

第 7 章
立体几何

第 8 章

直线和圆的方程

附 录

第 1 章

集合　充要条件　不等式

集合是数学中最基本的概念之一.本章首先介绍有关集合的一些重要概念、常用符号和简单运算,然后学习一些命题的初步知识,最后讨论一元二次不等式及其他常见类型不等式的解法.

1.1　集合的概念

一、集合的意义

我们在初中用过“集合”这个词,例如整数集合,是把所有的整数作为一个整体加以研究.

我们把具有某种特定性质的对象的总体称为**集合**(简称“集”),把构成集合的对象称为集合的**元素**.

下面来看几个例子：

(1) 某校一年级的全体学生构成一个集合,其中每个学生都是这个集合的元素.

(2) 某工厂金工车间的全部机床组成一个集合,车间中的每一台机床都是这个集合的元素.

(3) 所有自然数组成一个集合,自然数 0,1,2,3,…,n,…,都是这个集合的元素.

(4) 方程 $x^2-1=0$ 的所有实数根组成一个集合,这个集合有 2 个元素 1 与 -1.

(5) 不等式 $x-4>0$ 的所有解组成一个集合,显然,凡是大于 4 的实数都是这个集合的元素.

(6) 平面上与两定点距离相等的点的全体组成一个集合，这样的集合是连接两点的线段的垂直平分线，该垂直平分线上每一个点都是这个集合的元素.

若一个集合只含有限个元素，这样的集合称为**有限集合**；若一个集合含无限多个元素，这样的集合称为**无限集合**. 例如，在上面的例子中，(1)、(2)、(4)这 3 个集合是有限集合，而(3)、(5)、(6)这 3 个集合是无限集合.

一般地，集合通常用大写字母 $A,B,C,\cdots$表示，集合中的元素通常用小写字母 $a,b,c,\cdots$表示. 如果 a 是集合 A 中的元素，记为 $a\in A$，读作"a 属于 A"；如果 a 不是集合 A 中的元素，记为 $a\notin A$，读作"a 不属于 A".

例如，在上例(3)中，用 $\mathbf{N}$ 表示自然数集，则 $2\in\mathbf{N}$，$0\in\mathbf{N}$，$-2\notin\mathbf{N}$.

由数组成的集合称为**数集**. 常见的数集及其符号如表 1-1 所示.

表 1-1

数集	自然数集	整数集	有理数集	实数集
符号	$\mathbf{N}$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Q}$	$\mathbf{R}$

在数集中，若元素都是正数，应在集合符号的右上角标"+"；若元素都是负数，应在集合符号的右上角标"−". 例如，正有理数集记作 $\mathbf{Q}^+$，负实数集记为 $\mathbf{R}^-$. 特别地，在自然数集中排除 0 的集合，记为 $\mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}_+$.

满足方程(组)或不等式(组)的所有解组成的集合称为方程(组)或不等式(组)的**解集**.

只含有一个元素的集合称为**单元集**. 例如，方程 $x+1=0$ 的解集中只有一个元素 -1，这就是单元集.

不含有任何元素的集合称为**空集**，记作$\varnothing$. 例如，方程 $x^2+1=0$ 在实数范围内解的集合就是空集. 至少含有一个元素的集合称为**非空集合**.

二、集合的表示法

1. 列举法

把属于某个集合的元素一一列举出来，写在大括号{ }内，每个元素之间用逗号隔开，每个元素仅写一次，不考虑顺序，这种表示集合的方法称为**列举法**.

例如，小于 4 的自然数的集合可表示为$\{0,1,2,3\}$.

当集合的元素很多，不需要或不可能一一列出时，也可只写出几个元素，其他用省略号表示. 例如，小于 100 的自然数集可表示为$\{0,1,2,3,\cdots,99\}$，正偶数集可表示为$\{2,4,6,\cdots,2n,\cdots\}$.

2. 描述法

把属于某个集合的元素所具有的特定性质描述出来，写在大括号{　}内，这种表示集合的方法称为**描述法**.

例如，正偶数集$\{2,4,6,\cdots,2n,\cdots\}$可表示为$\{x \mid x=2n,n\in \mathbf{N}^*\}$或{正偶数}.

其中，竖线左边的x表示该集合的任意一个元素，竖线右边写出集合元素的特定性质.

又例如，反比例函数$y=\dfrac{1}{x}$的图像上的点(x,y)组成的集合可表示为

$$\left\{(x,y) \mid y=\frac{1}{x},x\neq 0\right\}.$$

例 1　用列举法表示下列集合：

(1) $\{x \mid x$是大于3且小于10的奇数$\}$；

(2) $\{x \mid x^2-5x+6=0,x\in \mathbf{R}\}$.

解　(1) $\{5,7,9\}$.

(2) 方程$x^2-5x+6=0$的解集为$\{2,3\}$，其中$x\in \mathbf{R}$一般可省略不写.

例 2　用描述法表示下列集合：

(1) 不等式$x-5>3$的解组成的集合；

(2) 在平面直角坐标系内，抛物线$y=x^2$上所有点组成的集合；

(3) 在平面直角坐标系的第一象限内所有点组成的集合.

解　(1) 不等式$x-5>3$的解集可表示为

$$\{x \mid x-5>3\},$$

即

$$\{x \mid x>8\}.$$

(2) 如图 1-1(1)所示，在直角坐标系内，抛物线$y=x^2$上所有点的集合是$\{(x,y) \mid y=x^2\}$.

(3) 如图 1-1(2)所示，在直角坐标系的第一象限内所有点的集合是$\{(x,y) \mid x>0,y>0\}$.

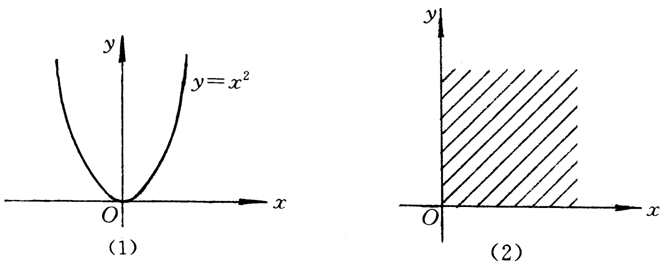


图 1-1

关于集合的概念，再作如下说明：

(1)作为集合的元素必须是确定的，否则就不能构成集合. 这就是说，对于任何一个对象，或者属于这个集合，或者不属于这个集合，二者必居其一.

例如，“某班高个子同学全体”就不能构成集合，因为没有规定多高才算是高个子，不能确定“高个子同学”.

(2)一个给定的集合，它的元素是互异的. 也就是说，集合中的任何两个元素都是不同的对象，相同的对象归入同一个集合时只能算作集合的一个元素.

例如，方程 $x^2-2x+1=0$ 的解集为$\{1\}$，不能写成$\{1,1\}$.

(3)一个给定的集合，它的元素无先后顺序.

例如，集合$\{-2,2\}$和集合$\{2,-2\}$表示同一个集合.

三、集合之间的关系

1. 集合的包含关系

由下面的两个集合

$$A=\{1,2,3\},B=\{1,2,3,4\}$$

可以发现，集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素，因此，我们给出下面定义：

定义 设有两个集合 A 和 B，如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素，则集合 A 称为集合 B 的**子集**，记作 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$，读作“A 包含于 B”或“B 包含 A”.

由定义可得：$A\subseteq A$.

规定：$\varnothing\subseteq A$.

如果集合 A 是集合 B 的子集，并且 B 中至少有一个元素不属于 A，那么集合 A 称为集合 B 的**真子集**，记为 $A\subsetneqq B$ 或 $B\supsetneqq A$.

例如，$\mathbf{N}\subseteq\mathbf{N}$，$\mathbf{N}\subsetneqq\mathbf{R}$.

根据真子集的定义，显然空集$\varnothing$是任何非空集合的真子集.

我们通常用平面上一条封闭曲线的内部表示一个集合（称为“文氏图”），如图 1-2 表示集合 A 是集合 B 的真子集.

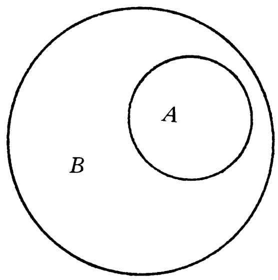


图 1-2

例 3 写出集合 $M=\{0,1,2\}$的所有子集，并指出哪些是真子集.

解 $\varnothing$，$\{0\}$，$\{1\}$，$\{2\}$，$\{0,1\}$，$\{0,2\}$，$\{1,2\}$，$\{0,1,2\}$.

集合 M 的子集共有 8 个，其中除$\{0,1,2\}$外，其余都是 M 的真子集.

2. 集合的相等

定义　对于两个集合 A,B,如果 $A\subseteq B$,同时 $B\subseteq A$,则称集合 A 和集合 B **相等**,记作 $A=B$.

由定义可知,两个集合相等就表示这两个集合的元素完全相同.

例如,$\{1,2,3,4\}=\{3,2,4,1\}$.

例 4　讨论集合 $A=\{x\mid x^2-3x+2=0\}$与集合 $B=\{1,2\}$之间的关系.

解　由方程 $x^2-3x+2=0$ 解得,$x_1=1,x_2=2$. 于是,$A=\{1,2\}$. 因为集合 A 与集合 B 的元素相同,所以 $A=B$.

习题 1-1(A 组)

1. 按以下语句给出的条件能否组成集合?

(1) 某图书馆的全部藏书;

(2) 某商场漂亮服装的全体;

(3) 所有的钝角三角形.

2. 写出下列集合的元素.

(1) 一年中有 31 天的月份的集合;

(2) 平方后仍等于原数的数的集合;

(3) 英文元音字母的集合.

3. 用适当的符号($\in,\overline{\in},=,\supseteq,\subseteq$)填空.

(1) 3 ____ $\mathbf{N}$;　(2) 0 ____ $\mathbf{Z}^+$;　(3) π ____ $\mathbf{Q}$;

(4) $\mathbf{Z}$ ____ $\mathbf{N}$;　(5) a ____ $\{a\}$;　(6) 0 ____ $\varnothing$;

(7) $\{a,b,c\}$ ____ $\{c,b,a\}$;　(8) $\varnothing$ ____ $\{a,b\}$.

4. 用适当的方法表示下列集合.

(1) 小于 10 的所有正整数的平方数;

(2) 直线 $y=2x$ 上所有点;

(3) 方程组$\begin{cases}x+y=2,\\xy=-3\end{cases}$的解集;

(4) 不等式 $3(x-1)<2x-5$ 的解集.

5. 写出$\{a,b,c,d\}$的所有子集,并指出其中哪些是真子集.

习题 1-1(B 组)

1. 用适当的符号($\in$,$\overline{\in}$,$=$,$\subseteq$,$\supseteq$)填空.

(1) -3 ____ $\mathbf{Q}^-$；　(2) $\sqrt{3}$ ____ $\mathbf{R}$；　(3) π ____ $\mathbf{Q}$；

(4) $\mathbf{Z}$ ____ $\mathbf{Q}$ ____ $\mathbf{R}$；　(5) $\{x|x>2\}$ ____ $\{x|x>3\}$.

2. 用适当的方法表示下列集合.

(1) 方程 $x^2+6x+9=0$ 的解集；

(2) 数轴上点 $x=3$ 左方的所有点；

(3) 直角坐标系第二象限内的所有点；

(4) 所有 4 的正整数倍且小于 100 的数.

3. 设 $A=\{1,3,5,7,9\}$，写出集合 A 中符合下列条件的子集.

(1) 元素都是质数；

(2) 元素都能被 3 整除；

(3) 元素都能被 2 整除.

4. 讨论下列各题中两个集合间的关系.

(1) $A=\{x|0\leqslant x<1\}$；　$B=\{x|x-2<0\}$；

(2) $A=\{x|x=2n,n\in\mathbf{Z}\}$；　$B=\{x|x=2(n+1),n\in\mathbf{Z}\}$.

扫一扫，获取参考答案

1.2　集合的运算

一、交集

先看一个例子，某商店进了两批货，第一批有服装、文具、自行车、化妆品、皮鞋 5 个品种，第二批有化妆品、自行车、电子表、食品 4 个品种，分别记作

$$A=\{\text{服装},\text{文具},\text{自行车},\text{化妆品},\text{皮鞋}\},$$
$$B=\{\text{化妆品},\text{自行车},\text{电子表},\text{食品}\}.$$

试问：两次进货都有的品种有哪些？显然，两批货物的共有元素是化妆品和自行车，它们组成的集合是

$$C=\{\text{化妆品},\text{自行车}\}.$$

对于这样的集合，给出以下定义：

定义　设 A 和 B 是两个集合，把既属于 A 又属于 B 的所有元素组成的集合称为 A 与 B 的**交集**，记作 $A\cap B$，读作“A 交 B”，即

$$A\cap B=\{x|x\in A\text{ 且 }x\in B\}.$$

因此，在上面的例子中有

$$C=A\cap B.$$

按照集合 A 与集合 B 本身的相互关系，它们的交集有如图 1-3 所示的 4 种情形，图中阴影部分表示 $A\cap B$.

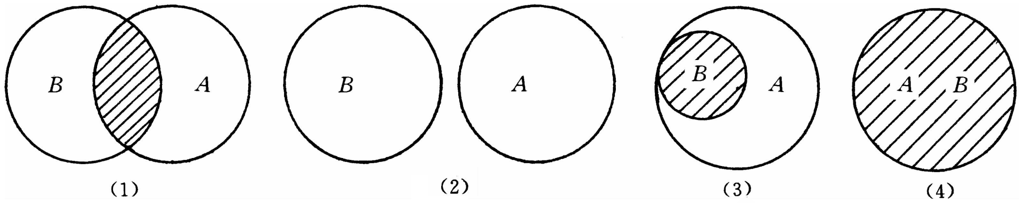


图 1-3

由交集定义可得：

$$A\cap B\subseteq A,\qquad A\cap B\subseteq B,$$
$$A\cap A=A,\qquad A\cap\varnothing=\varnothing.$$

求集合的交集的运算称为**交运算**.

例 1　设 $A=\{$奇数$\}$，$B=\{$偶数$\}$，$Z=\{$整数$\}$，求 $A\cap Z$，$B\cap Z$，$A\cap B$.

解　$A\cap Z=\{$奇数$\}\cap\{$整数$\}=\{$奇数$\}=A$；

$B\cap Z=\{$偶数$\}\cap\{$整数$\}=\{$偶数$\}=B$；

$A\cap B=\{$奇数$\}\cap\{$偶数$\}=\varnothing$.

例 2　设 $A=\{(x,y)\mid 4x+y=6\}$，$B=\{(x,y)\mid 3x+2y=7\}$，求 $A\cap B$.

解　$A\cap B=\{(x,y)\mid 4x+y=6\}\cap\{(x,y)\mid 3x+2y=7\}$

$=\{(x,y)\mid 4x+y=6,3x+2y=7\}$

$=\{(1,2)\}$.

例 3　设 $A=\{12$ 的正约数$\}$，$B=\{18$ 的正约数$\}$，$C=\{$不大于 5 的自然数$\}$，求 $(A\cap B)\cap C$，$A\cap(B\cap C)$.

解　由题意可知，$A=\{1,2,3,4,6,12\}$，

$B=\{1,2,3,6,9,18\}$，

$C=\{0,1,2,3,4,5\}$，

所以 $(A\cap B)\cap C=\{1,2,3,6\}\cap\{0,1,2,3,4,5\}$

$=\{1,2,3\}$；

$A\cap(B\cap C)=\{1,2,3,4,6,12\}\cap\{1,2,3\}$

$=\{1,2,3\}$.

由交集定义可得，交运算满足：

交换律：　$A\cap B=B\cap A$.

结合律：　$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

二、并集

在本节开始的例子中，如果要问两次进货的品种总共有哪些？显然是两批货物的全部品种组成的集合，即

$D=\{$服装，文具，自行车，化妆品，皮鞋，电子表，食品$\}$.

对于这样的集合，给出以下定义：

定义　设 A 和 B 是两个集合，把所有属于 A 的元素和属于 B 的元素合并在一起组成的集合，称为 A 与 B 的**并集**，记作 $A\cup B$，读作"A 并 B"，即

$$A\cup B=\{x \mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}.$$

因此，在上面的例子中有 $D=A\cup B$.

上面定义中的"$x\in A$ 或 $x\in B$"包含了 3 种可能的情况：

(1) $x\in A$ 但 $x\overline{\in}B$.

(2) $x\in B$ 但 $x\overline{\in}A$.

(3) $x\in A$ 且 $x\in B$.

在一个具体问题中，这 3 种情况不会同时出现，但是，不管出现哪一种情况，$A\cup B$ 中的元素都至少属于 A 和 B 中的一个. 图 1-4 中的阴影部分表示$A\cup B$.

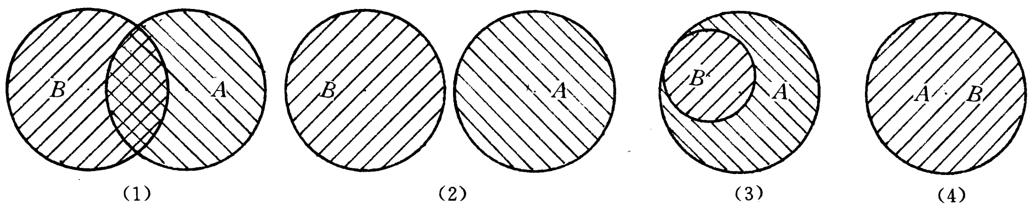


图 1-4

由并集定义得：

$$A\subseteq A\cup B,\qquad B\subseteq A\cup B,$$
$$A\cup A=A,\qquad A\cup\varnothing=A.$$

求集合的并集的运算称为**并运算**.

例 4　设 $A=\{x \mid (x-1)(x+2)=0\}$，$B=\{x \mid x^2-4=0\}$，求 $A\cup B$.

解　因为$A=\{x \mid (x-1)(x+2)=0\}=\{1,-2\}$，

$B=\{x \mid x^2-4=0\}=\{-2,2\}$，

所以 $A\cup B=\{1,-2\}\cup\{-2,2\}=\{-2,1,2\}$.

例 5　设 $A=\{$锐角三角形$\}$，$B=\{$钝角三角形$\}$，求 $A\cup B$.

解　$A\cup B=\{$锐角三角形$\}\cup\{$钝角三角形$\}=\{$斜三角形$\}$.

例 6　设 $A=\{1,2\}$,$B=\{-1,0,1\}$,$C=\{-2,0,2\}$,求：

(1) $(A\cup B)\cup C$；　(2) $A\cup(B\cup C)$.

解　由题意知,$A\cup B=\{-1,0,1,2\}$,$B\cup C=\{-2,-1,0,1,2\}$.

(1) $(A\cup B)\cup C=\{-1,0,1,2\}\cup\{-2,0,2\}=\{-2,-1,0,1,2\}$；

(2) $A\cup(B\cup C)=\{1,2\}\cup\{-2,-1,0,1,2\}=\{-2,-1,0,1,2\}$.

由并集定义可得,并运算满足：

交换律：　$A\cup B=B\cup A$.

结合律：　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$.

并集与交集除各自满足交换律和结合律外,交、并运算还有如下两个分配律：

(1) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

(2) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

例 7　设 $A=\{0,1,2,3,4\}$,$B=\{1,2,3\}$,$C=\{1,4\}$,求$(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

解　$(A\cap B)\cup(A\cap C)=A\cap(B\cup C)=\{0,1,2,3,4\}\cap\{1,2,3,4\}=\{1,2,3,4\}$.

三、补集

我们在研究集合与集合之间的关系时,如果一些集合都是某一给定集合的子集,那么称这个给定的集合为这些集合的**全集**,通常用 I 表示. 在研究数集时,一般将实数集 $\mathbf{R}$ 作为全集.

设集合 A 是全集 I 的子集,I 中不属于 A 的元素组成一个新的集合,对于这样的集合我们给出下面的定义：

定义　设 A 为全集 I 的子集,由 I 中不属于 A 的元素组成的集合称为集合 A 在 I 中的**补集**,记作 $\complement_I A$,读作"A 在 I 中的补集",即

$$\complement_I A=\{x\mid x\in I\text{ 且 }x\notin A\}.$$

集合 A 的补集 $\complement_I A$ 为如图 1-5 所示的阴影部分,由补集的定义和图 1-5 可得：

$A\cup\complement_I A=I$,　$A\cap\complement_I A=\varnothing$,　$\complement_I I=\varnothing$,

$\complement_I\varnothing=I$,　　$\complement_I(\complement_I A)=A$.

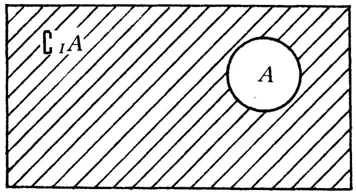


图 1-5

求集合的补集的运算称为**补运算**.

注意:补集是相对全集而言的,即使是同一个集合,如果所讨论的范围不一样,取的全集不同,它的补集也不同.

例 8　设 $I=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$，$A=\{3,4,5\}$，$B=\{4,7,8\}$，求 $\complement_I A$，$\complement_I B$.

解　$\complement_I A=\{1,2,6,7,8\}$，　$\complement_I B=\{1,2,3,5,6\}$.

例 9　设 $I=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$，$A=\{1,3,5\}$，$B=\{2,3,4,5,6\}$，求证：

(1) $\complement_I(A\cup B)=\complement_I A\cap\complement_I B$；

(2) $\complement_I(A\cap B)=\complement_I A\cup\complement_I B$.

证明　(1) 因为 $A\cup B=\{1,2,3,4,5,6\}$，
所以 $\complement_I(A\cup B)=\{7,8,9,10\}$.

又因为 $\complement_I A=\{2,4,6,7,8,9,10\}$，$\complement_I B=\{1,7,8,9,10\}$，

$$\complement_I A\cap\complement_I B=\{7,8,9,10\},$$

所以 $\complement_I(A\cup B)=\complement_I A\cap\complement_I B$.

(2) 因为 $A\cap B=\{3,5\}$，
所以 $\complement_I(A\cap B)=\{1,2,4,6,7,8,9,10\}$，

$$\complement_I A\cup\complement_I B=\{1,2,4,6,7,8,9,10\}.$$

所以 $\complement_I(A\cap B)=\complement_I A\cup\complement_I B$.

上例所证的两个等式对于任意给定集合 A 和 B 也成立，称为**德·摩根公式**，也称**反演律**，即

(1) $\complement_I(A\cap B)=\complement_I A\cup\complement_I B$.

(2) $\complement_I(A\cup B)=\complement_I A\cap\complement_I B$.

习题 1-2(A 组)

1. 已知两个集合 A 与 B，求 $A\cap B$，$A\cup B$.

(1) $A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{4,5,6,7\}$；

(2) $A=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 1\}$，$B=\{x\mid x>0\}$；

(3) $A=\{(x,y)\mid x+y=0\}$，$B=\{(x,y)\mid x-y=0\}$.

2. 设 $S=\{x\mid x\leqslant 3\}$，$T=\{x\mid x<1\}$，求 $S\cap T$ 及 $S\cup T$，并在数轴上表示出来.

3. 设 $A=\{12$ 的正约数$\}$，$B=\{18$ 的正约数$\}$，$C=\{$不大于 6 的自然数$\}$，求：

(1) $(A\cap B)\cap C$；

(2) $(A\cap B)\cup C$.

4. 设 $I=\{$小于 9 的正整数$\}$，$A=\{1,2,3\}$，$B=\{3,4,5,6\}$，求：
$\complement_I A$，$\complement_I B$，$\complement_I(A\cap B)$，$\complement_I A\cup\complement_I B$.

5. 用集合 A,B,C 的交、并、补来表示下列文氏图(图 1-6)中的阴影部分.

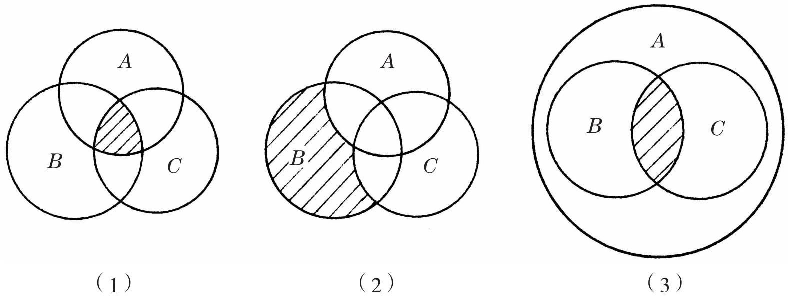


图 1-6

习题 1-2(B 组)

1. 已知两个非空集合 $A\neq B$,用适当的符号填空.

(1) $A\cap B$ ____ $A\cup B$;　　(2) $A\cap B$ ____ $B\cap A$;

(3) $A\cup B$ ____ B;　　(4) $A\cap B$ ____ B.

2. 设 $A=\{1,2,4,5,9\}$,$B=\{3,5,7\}$,$C=\{3,6,7,8,10\}$,求:

(1) $A\cup B\cup C$;

(2) $A\cap B\cap C$;

(3) $(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

3. 设 $I=\{$不大于 10 的自然数$\}$,$A=\{1,2,4,5,9\}$, $B=\{3,6,7,8,10\}$,求:

(1) $\complement_I A\cup B$;

(2) $\complement_I A\cap\complement_I B$;

(3) $\complement_I(A\cap B)$.

4. 设 A 与 B 表示集合,用 A 与 B 之间的运算关系表示图 1-7 中阴影部分.

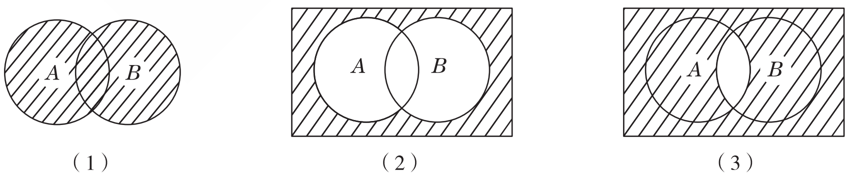


图 1-7

扫一扫,获取参考答案

1.3 不等式

不等式是数学知识的一个重要组成部分，也是学习数学和其他学科的重要工具，它在生产实践和社会生活中都有着广泛的应用. 本节将在介绍不等式的基本性质的基础上进一步学习一些不等式知识和不等式的解法.

情境与问题

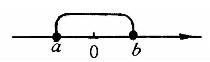
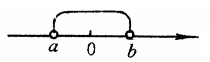
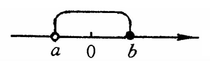
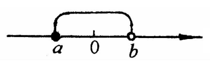
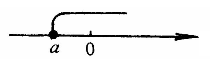
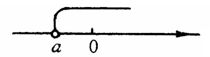
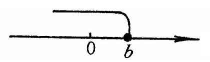
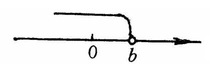
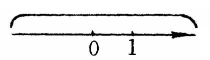
在初中我们就学过了一些简单的不等式解法，也知道不等式一般都有无穷多个解，其解集（特殊的数集）在数轴上对应的点集是线段、射线或直线. 能否用一个简单的方式表示这些特殊的数集呢？

一、区间

介于两个实数之间的所有实数的集合称为**区间**，这两个实数称为**区间端点**.

设 a,b 为任意两个实数，且 $a<b$，规定如表 1-2 所示.

表 1-2

不等式	集合	区间	图示
$a\leqslant x\leqslant b$	$\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$	$[a,b]$闭区间	
$a<x<b$	$\{x\mid a<x<b\}$	(a,b)开区间	
$a<x\leqslant b$	$\{x\mid a<x\leqslant b\}$	$(a,b]$左开右闭区间	
$a\leqslant x<b$	$\{x\mid a\leqslant x<b\}$	$[a,b)$左闭右开区间	
$x\geqslant a$	$\{x\mid x\geqslant a\}$	$[a,+\infty)$	
$x>a$	$\{x\mid x>a\}$	$(a,+\infty)$	
$x\leqslant b$	$\{x\mid x\leqslant b\}$	$(-\infty,b]$	
$x<b$	$\{x\mid x<b\}$	$(-\infty,b)$	
$-\infty<x<+\infty$	$\mathbf{R}$	$(-\infty,+\infty)$	

在数轴上，这些区间可以用一条以 a 和(或)b 为端点的线段、射线或不含端点的直线来表示，端点间的距离称为**区间的长**. 区间的长为有限时，称为**有限区间**；区间长为无限时，称为**无限区间**.

这里，符号"∞"读作"无穷大"，不表示某一个确定的实数，用于描述一个变量的绝对值无限增大的趋势，其中"$+\infty$"读作"正无穷大"，"$-\infty$"读作"负无穷大".

想一想

无穷大是一个很大的数吗？

二、不等式的性质

解不等式要对不等式变换形式，而不等式变换形式必须以不等式的基本性质作为依据，才能保证不等式变换形式的正确性.

不等式有以下基本性质：

性质 1　如果 $a>b$，$b>c$，那么 $a>c$.

性质 2　如果 $a>b$，那么 $a+c>b+c$.

推论　如果 $a>b$，$c>d$，那么 $a+c>b+d$.

性质 3　如果 $a>b$，$c>0$，那么 $ac>bc$，

如果 $a>b$，$c<0$，那么 $ac<bc$.

推论　如果 $a>b>0$，$c>d>0$，那么 $ac>bd$.

三、不等式的作差比较法

我们知道，对于任意两个实数 a 和 b，有

$$a-b>0\Leftrightarrow a>b;$$
$$a-b=0\Leftrightarrow a=b;$$
$$a-b<0\Leftrightarrow a<b.$$

利用上述结论，我们可以判断两个实数的大小关系. 通常，我们将通过比较两式之差的符号来判断两式大小的方法称为**作差比较法**.

例 1　对任意实数 x，比较 $(x+1)(x+2)$ 与 $(x-3)(x+6)$ 的大小.

解　因为 $(x+1)(x+2)-(x-3)(x+6)=x^2+3x+2-(x^2+3x-18)=x^2+3x+2-x^2-3x+18=20>0$，所以，对任意实数 x，有 $(x+1)(x+2)>(x-3)(x+6)$.

试一试

试判断 a^2-2a+3 与 $3-2a$ 的大小.

四、不等式的解法

1. 一元一次不等式(组)

含有一个未知数并且未知数的次数是一次的不等式称为**一元一次不等式**，使不等式成立的未知数的取值称为**不等式的解**.

由两个或两个以上的一元一次不等式联立而成的不等式组，称为**一元一次不等式组**. 不等式组中所有不等式的公共解称为**不等式组的解**.

例 2　解不等式$\frac{2+x}{2}\geqslant\frac{2x-1}{3}$.

解　去分母，得 $3(2+x)\geqslant 2(2x-1)$，
去括号，得 $6+3x\geqslant 4x-2$，
移项，得 $3x-4x\geqslant -2-6$，
合并同类项，得$-x\geqslant -8$，
将系数化为 1，得 $x\leqslant 8$.
所以，原不等式的解集为$\{x|x\leqslant 8\}=(-\infty,8]$.

想一想

一元一次不等式与一元一次方程的解法有什么异同点？

例 3　解不等式组：

(1) $\begin{cases}4x-4\geqslant 3x+1,\\3x+1>2x-1;\end{cases}$　(2) $\begin{cases}\frac{x}{2}<\frac{x+3}{5},\\2x+1<x+1;\end{cases}$　(3) $\begin{cases}10+2x\leqslant 11+3x,\\7+2x>6+3x.\end{cases}$

解　(1) 原不等式组可化为$\begin{cases}x\geqslant 5,\\x>-2,\end{cases}$

所以原不等式组解集为$\{x|x\geqslant 5\}=[5,+\infty)$.

(2) 原不等式组可化为$\begin{cases}x<2,\\x<0,\end{cases}$

所以原不等式组解集为$\{x|x<0\}=(-\infty,0)$.

(3) 原不等式组可化为$\begin{cases}x\geqslant -1,\\x<1,\end{cases}$

所以原不等式组解集为$\{x|-1\leqslant x<1\}=[-1,1)$.

例 4　解下列不等式：

(1) $\frac{x+5}{x-8}>0$；　(2) $\frac{2x+4}{x-3}\leqslant 1$；　(3) $(2x-1)(2-x)<0$.

解　(1) 原不等式可化为$\begin{cases} x+5>0, \\ x-8>0, \end{cases}$　或　$\begin{cases} x+5<0, \\ x-8<0, \end{cases}$

解得 $x>8$ 或 $x<-5$，所以原不等式解集为$\{x \mid x>8$ 或 $x<-5\}$.

(2) 移项，得$\dfrac{2x+4}{x-3}-1\leqslant 0$，$\dfrac{x+7}{x-3}\leqslant 0$，

可化为$\begin{cases} x+7\leqslant 0, \\ x-3>0, \end{cases}$　或　$\begin{cases} x+7\geqslant 0, \\ x-3<0, \end{cases}$

解得$-7\leqslant x<3$，所以原不等式解集为$\{x \mid -7\leqslant x<3\}$.

(3) 原不等式可化为$\begin{cases} 2x-1>0, \\ 2-x<0, \end{cases}$　或　$\begin{cases} 2x-1<0, \\ 2-x>0, \end{cases}$

解得 $x>2$ 或 $x<\dfrac{1}{2}$，所以原不等式的解集为$\left\{x \mid x>2 \text{ 或 } x<\dfrac{1}{2}\right\}$.

想一想

解分式不等式为什么一般不能去分母？

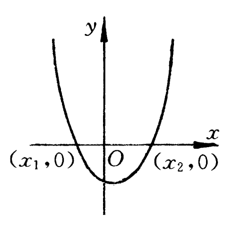
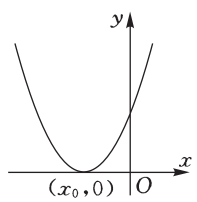
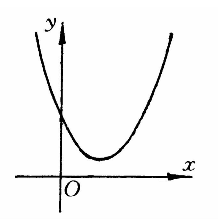
2. 一元二次不等式

含有一个未知数并且未知数的最高次数是 2 的不等式称为**一元二次不等式**，它的一般形式为

$$ax^2+bx+c>0(\geqslant 0) \quad \text{或} \quad ax^2+bx+c<0(\leqslant 0) \quad (a>0).$$

一元二次不等式的解集与一元二次方程以及二次函数图像密切相关，设 $y=ax^2+bx+c(a>0)$，如表 1-3 所示.

表 1-3

判别式		$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
图像				
解集	$y>0$	$\{x \mid x<x_1$ 或 $x>x_2\}$	$\{x \mid x\neq x_0\}$	**R**
	$y=0$	$\{x \mid x=x_1$ 或 $x=x_2\}$	$\{x \mid x=x_0\}$	$\varnothing$
	$y<0$	$\{x \mid x_1<x<x_2\}$	$\varnothing$	$\varnothing$

例 5 解下列一元二次不等式：

(1) $3x^2-5x+2>0$；　　(2) $-x^2-2x+15\geqslant 0$；

(3) $2x^2-3x>-4$；　　(4) $x^2-6x\leqslant -9$.

解 (1) 因为 $\Delta=25-24=1>0$，方程 $3x^2-5x+2=0$ 有两个不相等实根：

$$x_1=\frac{2}{3},x_2=1.$$

所以原不等式解集为

$$\left\{x\middle|x<\frac{2}{3}\text{或 }x>1\right\}=\left(-\infty,\frac{2}{3}\right)\cup(1,+\infty).$$

(2)将原不等式化为 $x^2+2x-15\leqslant 0$，即 $(x+5)(x-3)\leqslant 0$，可以看出，方程 $x^2+2x-15=0$ 有两个不相等的实根：$x_1=-5$，$x_2=3$.

所以原不等式的解集为

$$\{x|-5\leqslant x\leqslant 3\}=[-5,3].$$

(3) 将原不等式化为

$$2x^2-3x+4>0,$$

因为 $\Delta=-23<0$，方程 $2x^2-3x+4=0$ 无实根，所以原不等式解集为

$$\{x|x\in\mathbf{R}\}=(-\infty,+\infty).$$

(4) 将原不等式化为

$$x^2-6x+9\leqslant 0,$$

因为 $\Delta=0$，方程 $x^2-6x+9=0$ 有两个相等的实根：

$$x_1=x_2=3.$$

所以原不等式解集为

$$\{x|x=3\}.$$

例 6 由于存在惯性作用，汽车刹车后还要继续往前滑行一段距离才能停车，这段距离称为刹车距离. 通过试验，得到某种牌子的汽车在一种路面上的刹车距离 S(m)与汽车车速 x(km/h)之间有如下关系：

$$S=0.025x+\frac{x^2}{360}.$$

在一次交通事故中，测得这种车的刹车距离大于 11.5 m，这辆汽车刹车前的速度是多少？

解 依题意得 $S>11.5$，即 $0.025x+\frac{x^2}{360}>11.5$，整理得

$$x^2+9x-4140>0.$$

解方程 $x^2+9x-4140=0$，得实根

$$x_1=-69, x_2=60.$$

所以不等式解为 $\{x \mid x<-69 \text{ 或 } x>60\}$.

答：这辆汽车刹车前车速应大于 60 km/h.

想一想

你从例 6 中的汽车刹车前车速和刹车距离的数值中获得了什么信息？为了尽量避免交通事故，行人和司机应该怎么做？

3. 绝对值不等式

含有绝对值符号的不等式称为**绝对值不等式**. 当 $a>0$ 时，有

$$|x|<a \Leftrightarrow -a<x<a \text{ [图 1－8(1)]};$$

$$|x|>a \Leftrightarrow x>a \text{ 或 } x<-a \text{ [图 1－8(2)]}.$$

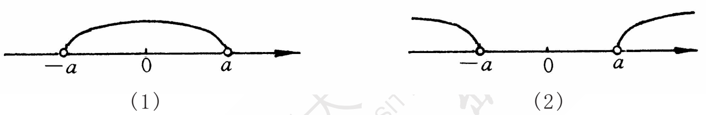


图 1-8

例 7　解下列不等式：

(1) $|4x-3|<5$；　(2) $|x-3|\geqslant 1$.

解　(1) 原不等式等价于

$$-5<4x-3<5, \text{即} -2<4x<8,$$

解得

$$-\frac{1}{2}<x<2.$$

所以原不等式解集为 $\left\{x \middle| -\frac{1}{2}<x<2\right\}$.

(2) 原不等式等价于 $x-3\geqslant 1$ 或 $x-3\leqslant -1$，即

$$x\geqslant 4 \quad \text{或} \quad x\leqslant 2,$$

所以原不等式解集为 $\{x \mid x\geqslant 4 \text{ 或 } x\leqslant 2\}$.

例 8　解不等式 $3x+|x|-4>0$.

解　原不等式可化为下面两个不等式组

$$① \begin{cases} x\geqslant 0, \\ 3x+x-4>0, \end{cases} \quad \text{或} \quad ② \begin{cases} x<0, \\ 3x-x-4>0, \end{cases}$$

解①得 $\{x \mid x>1\}$，解②得 $\varnothing$，所以原不等式解集为 $\{x \mid x>1\}$.

探索与研究

一元二次不等式的解法，除了本节介绍的图像法外，还有其他的求解方法. 请你在课后进行探索，并用你想出的方法再做做例 5 中的各题，看看结果是否正确.

习题 1-3(A 组)

1. 解下列不等式：

(1) $\dfrac{2x+5}{3}+\dfrac{1-2x}{6}\leqslant\dfrac{4x+7}{5}$；　　(2) $\dfrac{7x-2}{2}+\dfrac{x-2}{3}>2(x+1)$.

2. 解下列不等式组：

(1) $\begin{cases}5x-3>0,\\x-2\geqslant 5;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}x+3<7,\\2x-3\leqslant x+2;\end{cases}$　　(3) $\begin{cases}\dfrac{2}{5}(x-2)\leqslant x-\dfrac{2}{5},\\15-9x>10-4x.\end{cases}$

3. 解下列不等式：

(1) $(3-2x)(2+x)>0$；　　(2) $\dfrac{2x-1}{x+4}>0$.

4. 解下列不等式：

(1) $x^2-6x-7\geqslant 0$；　(2) $x^2<9$；　(3) $3x^2-7x+2\leqslant 0$.

5. 解下列不等式：

(1) $|3x-5|\leqslant 2$；　　(2) $\left|\dfrac{1}{2}x+1\right|>4$.

6. k 为何值时，方程 $x^2-(k+2)x+4=0$ 有两个相异的实根？

习题 1-3(B 组)

1. 解下列不等式：

(1) $\left|\dfrac{x-1}{2}+2\right|>\dfrac{3}{4}$；　　(2) $\left|\dfrac{3x-5}{4}+\dfrac{1}{6}\right|\leqslant\dfrac{2}{3}$.

2. 解下列不等式：

(1) $4x-15\geqslant x^2+2x$；　　(2) $x(x-1)<x(2x-3)+2$；

(3) $\dfrac{2x-1}{3(x+1)}\geqslant 1$；　　(4) $|2x^2+x|\leqslant 1$.

3. 方程 $(m+1)x^2-3x+2=0$ 有两个不相等的实数根，求实数 m 的取值范围.

扫一扫，获取参考答案

1.4　充要条件

一、命题

1. 命题的意义

判断是一种思维形式，是借助于句子来表达的，人们通常把可以判断真假的陈述句称为**命题**. 一个命题由题设和结论两部分组成. 命题有真有假. 正确的命题是**真命题**，错误的命题是**假命题**. 命题的“真”和“假”，称为命题的**真值**. 分别用大写英文字母 T 和 F 表示.

例如：对顶角相等. 这是一真命题，用 T 表示. 相等的角是对顶角. 这是一假命题，用 F 表示.

2. 四种命题形式

如果用 P 和 Q 分别表示两个命题，那么四种命题的形式分别为

原命题：$P\Rightarrow Q$；　　逆命题：$Q\Rightarrow P$；

否命题：$\neg P\Rightarrow \neg Q$；　　逆否命题：$\neg Q\Rightarrow \neg P$.

其中“$\neg P$”（或“$\neg Q$”）是 P（或 Q）的否定，读作“非 P”（或“非 Q”），“$\Rightarrow$”表示推出.

例 1　写出“两个三角形全等则面积相等”的逆命题、否命题、逆否命题，并判断真假.

解　逆命题：如果两个三角形面积相等，则两个三角形全等.

否命题：如果两个三角形不全等则两个三角形面积不相等.

逆否命题：如果两个三角形面积不相等，则这两个三角形不全等.

以上原命题和逆否命题是真命题，逆命题和否命题是假命题.

四种命题之间的相互关系如图 1-9 所示.

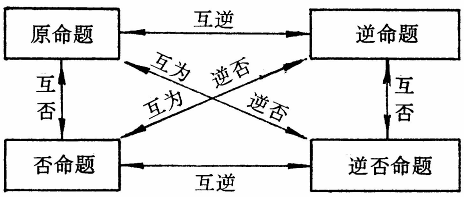


图 1-9

一般地，原命题的真假与其他三个命题的真假有如下三种关系：

（1）原命题为真，它的逆命题不一定为真.

例如，原命题“若 $a=0$，则 $ab=0$”是真命题，它的逆命题“若 $ab=0$，则 $a=0$”是假命题.

（2）原命题为真，它的否命题不一定为真.

例如，原命题“若 $a=0$，则 $ab=0$”是真命题，它的否命题“若 $a\neq0$，则 $ab\neq0$”是假命题.

（3）原命题为真，它的逆否命题一定为真.

例如，原命题“若 $a=0$，则 $ab=0$”是真命题，它的逆否命题“若 $ab\neq0$，则 $a\neq0$”是真命题.

二、充要条件

1. 充分条件与必要条件

前面我们讨论了“若 P 则 Q”形式的命题，其中有的命题为真，有的命题为假.“若 P 则 Q”为真是指由 P 经过推理可以得出 Q. 也就是说，如果 P 成立，那么 Q 一定成立，记作 $P\Rightarrow Q$，或者 $Q\Leftarrow P$. 如果由 P 推不出 Q，那么命题为假，记作 $P\nRightarrow Q$.

一般地，如果已知 $P\Rightarrow Q$，那么 P 是 Q 的**充分条件**，Q 是 P 的**必要条件**.

例如，“$a=b$”是“$a^2=b^2$”的充分条件；“$a^2=b^2$”是“$a=b$”的必要条件.

例 2 设 P：两个三角形全等，Q：两个三角形面积相等. 问：P 是 Q 的什么条件，Q 是 P 的什么条件？

解 由 $P\Rightarrow Q$ 可知，P 是 Q 的充分条件，Q 是 P 的必要条件.

2. 充分必要条件

如果一个圆的两弦等长，那么这两弦的弦心距相等；反之，如果一个圆的两弦的弦心距相等，那么这两弦等长. 可以看出，“一个圆的两弦等长”既是“两弦的弦心距相等”的充分条件，也是“两弦的弦心距相等”的必要条件. 这时，我们称“一个圆的两弦等长”是“两弦的弦心距相等”的充分必要条件.

一般地，如果既有 $P\Rightarrow Q$，又有 $Q\Rightarrow P$，那么我们称 P 是 Q 的**充分必要条件**（简称**充要条件**），记作 $P\Leftrightarrow Q$，有时也称 P，Q **等价**. 此时，Q 也是 P 的充要条件.

例 3 说出下面各组条件之间的逻辑关系.

（1）“$\Delta=0$”与“一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 有两个相等的实根”；

（2）“$a=-b$”与“$a^2=b^2$”.

解 （1）“$\Delta=0$”是“一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 有两个相等的实根”的充要条件.

(2)“$a=-b$”是“$a^2=b^2$”的充分条件,但不是必要条件,“$a^2=b^2$”是“$a=-b$”的必要条件,但不是充分条件.

习题 1-4(A 组)

1. 写出下列命题的否定,并判断它们的真假.

(1) P:$\sqrt{3}$是有理数;

(2) P:四边形不都是平行四边形.

2. 以下列各命题作为原命题,写出它的逆命题、否命题、逆否命题,并判断它们的真假.

(1) 末位是 5 的整数可以被 5 整除;

(2) 当 $x=2$ 时,$x^2-3x+2=0$;

(3) 线段的垂直平分线上的点到这条线段两个端点的距离相等.

3. 用“充分条件”“必要条件”“充要条件”填空.

(1)“四边相等的四边形”是“正方形”的__________;

(2)“$b^2-4ac>0$”是“一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$具有实根”的________.

习题 1-4(B 组)

1. 试写出下列命题的等价命题.

(1) 若 $ABCD$ 是四边形,则 $ABCD$ 是梯形;

(2) 若一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 没有实数根,则 $\Delta<0$.

2. 用“充分条件”“必要条件”“充要条件”填空.

(1)“$x=4$”是“$x^2-x-12=0$”的________;

(2)“$a>0$ 且 $b>0$”是“$ab>0$”的________;

(3)“$a\in A$ 且 $a\in B$”是“$a\in A\cap B$”的________;

(4)“$|a|=1$”是“$a=-1$”的________.

扫一扫，获取参考答案

扫一扫，复习本章内容

复习题 1

1. 选择题.

(1) 设全集 $I=\{1,2,3,4,5\}$,集合 $A=\{1,3\}$,$B=\{1,2,4\}$,则 $\complement_I(A\cup B)=($　　$)$.

A. $\{2,3,4\}$　　B. $\{1\}$　　C. $\{1,2,3,4\}$　　D. $\{5\}$

(2) 设全集 $I=\{1,2,3,4,5\}$,集合 $A=\{1,3\}$,$B=\{1,2,4\}$,则($\complement_I A)\cap B=$(　　).

A. $\{2,4,5\}$　　B. $\{2,4\}$　　C. $\{1,3,4,5\}$　　D. $\{5\}$

(3) 设集合 $A=\{0,2\}$,集合 $B=\{1,a^2\}$,且 $A\cup B=\{0,1,2,4\}$,则 $a=$(　　).

A. 2　　B. -2　　C. 4　　D. ± 2

(4) 设全集 $I=\{1,3,5,7\}$,集合 $A=\{1,|a-5|\}$,$\complement_I A=\{5,7\}$,则 $a=$(　　).

A. 2　　B. 8　　C. 2 或 8　　D. 2 或 -8

(5) 若集合 M 满足 $M\subseteq\{1,2,3\}$,则 M 有(　　)种可能.

A. 4　　B. 6　　C. 7　　D. 8

(6) "$xy=0$"是"$x^2+y^2=0$"的(　　).

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 无关条件

(7) "$x\in A$"是"$x\in A\cup B$"的(　　).

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 无关条件

(8) 若实数 a,b 满足 $a<b$,则下列各式中一定成立的是(　　).

A. $ac<bc$　　B. $a+c<b+c$

C. $ac^2<bc^2$　　D. $|a|<|b|$

(9) 设 $M=\{x|x\leqslant\sqrt{13}\}$,$b=\sqrt{11}$,则下列关系正确的是(　　).

A. $\{b\}\subsetneqq M$　　B. $b\subsetneqq M$　　C. $b\notin M$　　D. $\{b\}\in M$

2. 当 m 是何实数时,方程 $2x^2+2(3-2m)x+2m+1=0$ 满足下列条件?

(1) 有两个不等实根;　　(2) 有两个相等实根;

(3) 没有实根.

3. 求下列不等式的解集:

(1) $2x^2-5x-3\geqslant 0$;　　(2) $4x^2-4x+1<0$;

(3) $x^2-2x+3>0$;　　(4) $-x^2+5x>0$;

(5) $|x^2-1|<3$.

4. 下列各对命题的相互关系怎样,它们是否等价?

(1) $P\Rightarrow Q$ 和 $\neg P\Rightarrow\neg Q$;　　(2) $Q\Rightarrow P$ 和 $\neg P\Rightarrow\neg Q$;

(3) $\neg Q\Rightarrow\neg P$ 和 $\neg P\Rightarrow\neg Q$.

5. 解下列不等式组:

(1) $\begin{cases}1-\dfrac{x+1}{2}\leqslant 2-\dfrac{x+2}{3},\\ x(x-1)\geqslant(x+3)(x-3);\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}3+x<4+2x,\\ 5x-3<4x-1,\\ 7+2x>6+3x.\end{cases}$

6. 设全集 $I=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x|x^2-36<0\}$，集合 $B=\{x|x^2+2x-3<0\}$，求：

(1) $A\cap B$；

(2) $A\cup B$；

(3) $\complement_I A$；

(4) $\complement_I(A\cup B)$.

扫一扫，获取参考答案

[**阅读材料 1**]

集合的元素个数与子集个数

在研究集合时，会遇到有关集合的元素个数和子集个数的问题，我们把有限集合 A 的元素个数记作 $\mathrm{card}(A)$. 例如，$A=\{a,b\}$，则 $\mathrm{card}(A)=2$，子集个数为 4.

下面看一个有关集合元素个数的例子. 某商店进了两批货，第一批有服装、文具、自行车、化妆品、皮鞋 5 个品种，第二批有化妆品、自行车、电子表、食品 4 个品种，分别记作

$A=\{$服装，文具，自行车，化妆品，皮鞋$\}$，

$B=\{$化妆品，自行车，电子表，食品$\}$.

这里，$\mathrm{card}(A)=5$，$\mathrm{card}(B)=4$. 若求两次一共进了几种货，回答两次一共进了 9 $(=5+4)$ 种显然是不对的. 这个问题是要求 $\mathrm{card}(A\cup B)$. 在这个例子中，两次进的货里有相同的品种，相同的品种数实际就是 $\mathrm{card}(A\cap B)$. 由于

$A\cup B=\{$服装，文具，自行车，化妆品，皮鞋，电子表，食品$\}$，

$A\cap B=\{$化妆品，自行车$\}$，

所以 $\mathrm{card}(A\cup B)=7$，$\mathrm{card}(A\cap B)=2$.

那么 $\mathrm{card}(A)$，$\mathrm{card}(B)$，$\mathrm{card}(A\cup B)$，$\mathrm{card}(A\cap B)$ 之间有什么关系呢？

一般地，有 $\mathrm{card}(A\cup B)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)-\mathrm{card}(A\cap B)$.

例　某班有 7 名学生订了电脑报，有 10 名学生订了网络报，其中有 3 名学生同时订了上述 2 种报纸，这个班共有多少人订了报纸？

解　设 $A=\{$订电脑报的学生$\}$，$B=\{$订网络报的学生$\}$，则

$A\cap B=\{$同时订电脑报和网络报的学生$\}$，

$A\cup B=\{$订电脑报或网络报的学生$\}$.

由已知条件可得：$\mathrm{card}(A)=7$，$\mathrm{card}(B)=10$，$\mathrm{card}(A\cap B)=3$，所以

$$\mathrm{card}(A\cup B)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)-\mathrm{card}(A\cap B)=7+10-3=14.$$

下面我们来看看有限集合 A 的元素个数 card(A)与它的子集个数之间的关系：

例如，$A=\{1\}$，所有子集为 $\varnothing$，$\{1\}$，即 card(A)$=1$，子集个数为 2；$A=\{1,2\}$，所有子集为 $\varnothing$，$\{1\}$，$\{2\}$，$\{1,2\}$，即 card(A)$=2$，子集个数为 4；$A=\{1,2,3\}$，所有子集为 $\varnothing$，$\{1\}$，$\{2\}$，$\{3\}$，$\{1,2\}$，$\{1,3\}$，$\{2,3\}$，$\{1,2,3\}$，即 card(A)$=3$，子集个数为 8.

一般地，对有限集合 A，若 card(A)$=n$，则其子集个数为 2^n 个，其中真子集个数为 2^n-1 个.

第 1 章单元自测

1. 填空题.

（1）不等式 $x^2-4|x|+3<0$ 的解集为__________.

（2）命题"若 $x_1>2$，$x_2>2$，则 $x_1+x_2>4$"的逆命题是__________________，该命题为___________________.（填"真命题"或"假命题"）

（3）已知 p 是 q 的充分条件，q 是 r 的必要条件，q 是 s 的充分条件也是 s 的必要条件，则 r 是 s 的________条件，s 是 p_______条件，s 是 q 的_______条件.

2. 选择题.

（1）集合 $\{0,1,2\}$ 的真子集个数是（　　）.

A. 2　　B. 5　　C. 7　　D. 8

（2）已知集合 $M=\{-1,1\}$，$N=\{0,a\}$，$M\cap N=\{1\}$，则 $M\cup N=$（　　）.

A. $\{-1,1,0,a\}$　　B. $\{-1,1,0\}$　　C. $\{0,-1\}$　　D. $\{-1,1,a\}$

（3）若集合 $A\cup B=\varnothing$，则（　　）.

A. $A\neq\varnothing$，$B\neq\varnothing$　　B. $B=\varnothing$，$A\neq\varnothing$

C. $A=B=\varnothing$　　D. $A=\varnothing$，$B\neq\varnothing$

（4）设集合 $M=\{$平行四边形$\}$，$P=\{$菱形$\}$，$Q=\{$矩形$\}$，$T=\{$正方形$\}$，则下面判断中，正确的是（　　）.

A. $(P\cup Q)\cup T=M$　　B. $P\cup Q=T$

C. $P\cap Q=T$　　D. $P\cup Q=M$

（5）图 1-10 阴影部分表示（　　）.

A. $(A\cap \complement_I C)\cup B$　　B. $(B\cap C)\cup A$

C. $(A\cup C)\cap B$　　D. $(A\cup C)\cap \complement_I B$

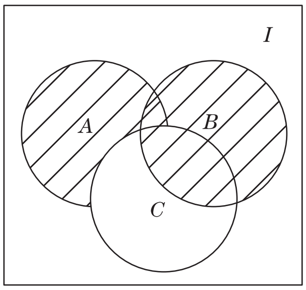


图 1-10

（6）设集合 $M=\{x|0\leqslant x<2\}$，集合 $N=\{x|x^2-2x-3<0\}$，则 $M\cap N=$（　　）.

A. $\{x|0\leqslant x\leqslant 1\}$　　B. $\{x|0\leqslant x\leqslant 2\}$

C. $\{x|0\leqslant x<1\}$　　D. $\{x|0\leqslant x<2\}$

3. 已知集合 $A=\{x\mid x^2-ax+a^2-19=0\}$，$B=\{x\mid x^2-5x+6=0\}$，$C=\{x\mid x^2+2x-8=0\}$. 若 $A\cap B\neq\varnothing$，$A\cap C=\varnothing$，求实数 a 的值.

4. 解下列不等式：

(1) $4<|1-3x|<7$；　(2) $\dfrac{x+1}{2x-3}<1$；　(3) $(ax-2)(x-2)>0$.

5. 已知不等式 $kx^2-2x+6k<0$ 的解集是 $\mathbf{R}$，求实数 k 的取值范围.

扫一扫，获取参考答案

第 2 章

函　数

函数是数学中一个极其重要的基本概念，是学习高等数学和其他科学技术必不可少的基础. 本章主要阐述函数的定义及其相关知识，介绍有理指数幂和对数的概念与运算，并在此基础上讨论幂函数、指数函数、对数函数等的概念、图像和性质.

2.1　函数的概念

一、函数的定义

在初中我们已经学习过函数的概念，并且知道可以用函数描述变量之间的依赖关系，现在，我们将进一步学习函数及其构成要素. 下面先看几个实例：

(1)一辆汽车在一段平坦的公路上以 100 km/h 的速度匀速行驶 2 h，则汽车行驶的路程 S 与行驶时间 t 的关系是

$$S = 100t. \qquad ①$$

这里，汽车行驶时间 t 的变化范围是数集 $D=\{t|0\leqslant t\leqslant 2\}$，汽车行驶路程 S 的变化范围是数集 $M=\{S|0\leqslant S\leqslant 200\}$. 由问题的实际意义可知，对于数集 D 中的任意一个时间 t，按照对应关系①，在数集 M 中都有唯一确定的路程 S 和它对应.

(2) 在气象观测站的百叶箱内，气温自动记录仪把某一天的气温变化描述在纪录纸上，形成如图 2-1 所示的曲线，根据这个图像，我们就能知道这一天内时间 t 从 0 点到 24 点气温 T 的变化情形.

根据图 2-1 的曲线可知，时间 t 的变化范围是数集 $D=\{t|0\leqslant t\leqslant 24\}$，气温 T 的变化范围是数集 $M=\{T|23<T\leqslant 33\}$，并且，对于数集 D 中的每一个时刻 t，按照图中曲线，在数集 M 中都有唯一确定的气温 T 和它对应.

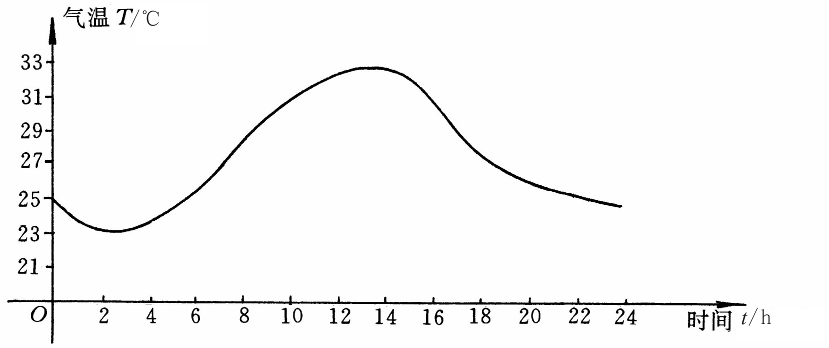


图 2-1

(3) GDP 是国内生产总值，它被看成显示一个国家(地区)经济状况的一个重要指标，表 2-1 中 GDP 增长率随时间变化的情况说明，“十三五”时期的五年是我国经济保持平稳较快增长，综合国力大幅提升的五年(受疫情影响，2020 年 GDP 增长率有所下降).

表 2-1 “十三五”时期我国 GDP 增长情况

时间	2016	2017	2018	2019	2020
GDP 增长率/%	6.7	6.9	6.5	6.6	2.2

我们可以仿照(1)、(2)描述表 2-1 中 GDP 增长率和时间的关系.

以上各例中两个变量所描述的关系就是函数关系. 一般地，有下列定义：

定义 设 D 是一非空数集，如果对于 D 中的每一个 x，按照某一对应法则 f，总有确定的实数 y 与之对应，则称 y 是定义在数集 D 上的 x 的**函数**，记作$y=f(x)$. D 称为函数 $f(x)$的**定义域**，x 称为**自变量**，y 称为**因变量**.

如果自变量取某一数值 x_0 时，函数具有确定的对应值，那么称函数在点 x_0 处有定义. 函数 $f(x)$在 x_0 点的对应值称为函数在该点的**函数值**，记作

$$f(x_0)\text{或 } y|_{x=x_0}.$$

例如，函数 $f(x)=x^2+2x-1$ 在 $x=2$ 处的函数值为 $f(2)=2^2+2\times2-1=7$；函数 $y=2x-1$ 在 $x=0$ 处的函数值为 $y|_{x=0}=2\times0-1=-1$.

当自变量 x 取遍定义域 D 中每一数值时，对应的函数值的全体称为函数 $f(x)$的**值域**，记作 M.

函数 $y=f(x)$中表示对应关系的符号 f 也可以改用其他字母，例如，$y=g(x)$，$y=F(x)$，$y=\varphi(x)$等.

函数的定义域通常由问题的实际背景确定，可参见前面所述的 3 个实例. 如果一个函数没有指明定义域，则它的定义域是指使函数有意义的自变量的取值范围.

函数的定义域与对应关系称为函数的**两个要素**，两个要素完全相同的函

数才是相同的函数.

例如，函数 $f(x)=\sqrt{x^2}$ 与 $g(t)=|t|$ 的定义域相同，都是 $(-\infty,+\infty)$，两个函数所描述的对应关系也完全相同（两个函数的自变量任取相同的值，对应的函数值相等），所以，$f(x)=\sqrt{x^2}$ 与 $g(t)=|t|$ 表示的是同一个函数.

例 1 求下列函数的定义域：

（1）$y=\frac{1}{2}x+1$；（2）$y=\frac{1}{x+1}$；

（3）$y=\sqrt{x}+\sqrt{-x}$；（4）$y=\sqrt{1-x}+\frac{1}{2x+1}$.

解 （1）对于函数 $y=\frac{1}{2}x+1$，当 x 取任何实数时，函数都是有意义的，所以这个函数的定义域为实数集 $\mathbf{R}$，用区间表示为 $(-\infty,+\infty)$.

（2）对于函数 $y=\frac{1}{x+1}$，由于分式的分母不能为零，即 $x+1\neq 0$，因此 $x\neq -1$，所以这个函数的定义域为

$$\{x\,|\,x\neq -1, x\in\mathbf{R}\},$$

用区间表示为 $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$.

（3）对于函数 $y=\sqrt{x}+\sqrt{-x}$，由于当 $x\geqslant 0$ 时，$\sqrt{x}$ 才有意义，当 $x\leqslant 0$ 时，$\sqrt{-x}$ 才有意义，因此，只有当 $x=0$ 时，$\sqrt{x}$ 与 $\sqrt{-x}$ 才同时有意义，所以这个函数的定义域为集合 $\{0\}$.

（4）对于函数 $y=\sqrt{1-x}+\frac{1}{2x+1}$，由于当 $1-x\geqslant 0$ 时，$\sqrt{1-x}$ 才有意义，当 $2x+1\neq 0$ 时，$\frac{1}{2x+1}$ 才有意义，因此，只有当 $x\leqslant 1$，并且 $x\neq -\frac{1}{2}$ 时，$\sqrt{1-x}$ 与 $\frac{1}{2x+1}$ 才同时有意义.

所以这个函数的定义域为

$$\left\{x\,\middle|\,x\leqslant 1 \text{ 且 } x\neq -\frac{1}{2}\right\},$$

用区间表示为 $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2},1\right]$.

二、函数的表示法

表示函数的方法，常用的有解析法（公式法）、图像法和列表法（表格法）.

解析法就是用一个解析式来表示两个变量之间的函数关系，如本节开头

的实例(1)中的 S 与 t 的关系：

$$S=100t.$$

在其定义域的不同部分用不同的解析式表示的函数称为**分段函数**.

分段函数的定义域，就是分段函数各个解析式中自变量取值范围的并集.

求分段函数的函数值时，应把自变量的值代入相应取值范围的解析式进行计算.

例 2　设函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x}, & x<0,\\ 2(1-x), & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{x^2-1}, & x>1,\end{cases}$$

求 $f(-1)$，$f(0)$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)$，$f(1)$，$f(2)$.

解　$f(-1)=\dfrac{2}{-1}=-2$，

$f(0)=2(1-0)=2$，

$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=2\left(1-\dfrac{1}{2}\right)=1$，

$f(1)=2(1-1)=0$，

$f(2)=\dfrac{1}{2^2-1}=\dfrac{1}{3}$.

图像法就是用图像来表示两个变量之间的函数关系，如本节开头的实例(2)中的气温 T 与时间 t 的关系.

列表法就是列表来表示两个变量之间的函数关系，如本节开头的实例(3)中的 GDP 增长率与时间的关系.

三、函数的基本性质

1. 函数的奇偶性

先看几个例子：

函数 $y=x$ 的图像是关于坐标原点对称的，如图 2-2(1)所示.

函数 $y=x^2$ 的图像是关于 y 轴对称的，如图 2-2(2)所示.

函数 $y=2x+1$ 的图像既不关于坐标原点对称，也不关于 y 轴对称，如图 2-2(3)所示.

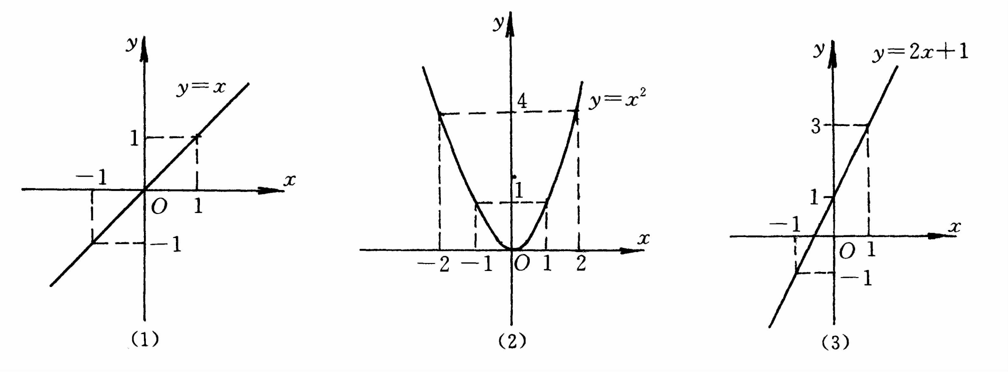


图 2-2

如果我们把函数图像的这种性质，用代数形式来表示，就可得到如下定义：

定义 设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 是关于原点对称的数集，即如果 $x\in D$，那么必有 $-x\in D$.

（1）如果对于定义域 D 内的任意 x，都有

$$f(-x)=-f(x),$$

那么称函数 $y=f(x)$ 为**奇函数**.

（2）如果对于定义域 D 内的任意 x，都有

$$f(-x)=f(x),$$

那么称函数 $y=f(x)$ 为**偶函数**.

既不是奇函数，也不是偶函数的函数称为**非奇非偶函数**.

由上面定义我们知道，奇函数的图像关于原点对称，偶函数的图像关于 y 轴对称，非奇非偶函数的图像既不关于原点对称，也不关于 y 轴对称.

例 3 判断下列函数的奇偶性：

（1）$f(x)=x^3$；（2）$f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$；

（3）$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$；（4）$f(x)=2x+1$.

解 （1）函数 $f(x)=x^3$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$，它是关于原点对称的数集，并且 $f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$，所以函数 $f(x)=x^3$ 为奇函数.

（2）函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$的定义域为$(-\infty,+\infty)$，它是关于原点对称的数集，并且 $f(-x)=\dfrac{1}{(-x)^2+1}=\dfrac{1}{x^2+1}=f(x)$，所以函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$为偶函数.

(3) 函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$的定义域为$(1,+\infty)$，它是不关于原点对称的数集，所以函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$是非奇非偶函数.

(4) 函数 $f(x)=2x+1$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$，它是关于原点对称的数集，但是

$$f(-x)=-2x+1,$$
$$-f(x)=-2x-1.$$

由于 $f(-x)\neq f(x)$且 $f(-x)\neq -f(x)$，因此函数 $f(x)=2x+1$ 为非奇非偶函数.

2. 函数的单调性

先看几个例子：

函数 $y=2x$ 在定义域内随着自变量 x 的增大而增大，如图 2-3(1)所示.

函数 $y=-x$ 在定义域内随着自变量 x 的增大而减小，如图 2-3(2)所示.

如果我们用代数形式来表示函数图像的这种性质，就可得到如下定义：

定义　设函数 $y=f(x)$在区间 I 内有定义，

(1) 如果对于区间 I 内任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有

$$f(x_1)<f(x_2),$$

那么函数 $y=f(x)$称为区间 I 内的**单调增函数**，区间 I 称为函数 $y=f(x)$的**单调增加区间.**

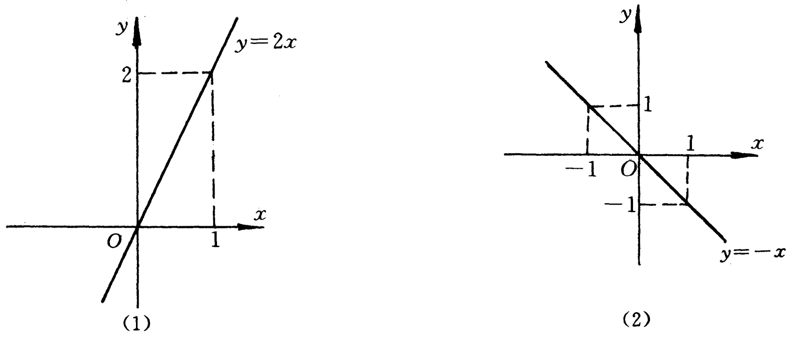


图 2-3

(2) 如果对于区间 I 内任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有

$$f(x_1)>f(x_2),$$

那么函数 $y=f(x)$称为区间 I 内的**单调减函数**，区间 I 称为函数 $y=f(x)$的**单调减少区间.**

如果函数 $y=f(x)$在区间 I 内是单调增函数或单调减函数，那么就说函数 $y=f(x)$在这一区间具有（严格的）单调性.

例 4 判断函数 $f(x)=x^2$ 在区间$(-\infty,0)$内的单调性.

解 函数 $f(x)=x^2$ 在$(-\infty,0)$内有定义，在区间$(-\infty,0)$内任取两点 x_1 及 x_2，设 $x_1<x_2$，有

$$f(x_2)-f(x_1)=x_2^2-x_1^2=(x_2+x_1)(x_2-x_1).$$

因为 $x_1<0,x_2<0,x_1<x_2$，所以 $f(x_2)-f(x_1)<0$，即 $f(x_1)>f(x_2)$.

因此，函数 $f(x)=x^2$ 在区间$(-\infty,0)$内是单调减函数.

应该注意：

(1) 定义中区间 I 可以是任何一种形式的区间.

(2) 区间 I 可能是函数的定义域，也可能是定义域中的一部分.

四、反函数

1. 反函数的定义

先看下面的例子.

在容积为 10 m^3 的水池中，已有 4 m^3 的水，如以每分钟 2 m^3 的速度向这个水池注水，那么 3 min 可盛满；设注水 t min 时，水池中的水量为 V m^3，则 V 与 t 的函数关系为

$$V=f(t)=2t+4,$$

它的定义域为 $D=\{t\,|\,0\leqslant t\leqslant 3\}$，它的值域为 $M=\{V\,|\,4\leqslant V\leqslant 10\}$.

根据 $V=2t+4$，已知时间 t 的每一个值$(t\in D)$，可以求出对应的水量 V 的唯一确定的值$(V\in M)$，即 $V=2t+4$ 的对应关系是单值对应；反之，根据此式，已知水量 V 的每一个值$(V\in M)$，我们也能求出对应的时间 t 的唯一确定的值$(t\in D)$，即 $V=2t+4$ 的反对应关系也是单值对应. 由此可知，t 是定义在 M 上 V 的函数，这个函数可由 $V=2t+4$ 解出 t 而得到

$$t=\frac{V-4}{2},$$

它的定义域为 $M=\{V\,|\,4\leqslant V\leqslant 10\}$，值域为 $D=\{t\,|\,0\leqslant t\leqslant 3\}$.

我们称函数 $t=\dfrac{V-4}{2}$为函数 $V=2t+4$ 的反函数.

一般地，我们给出下面的反函数定义：

定义 设有函数 $y=f(x)$，其定义域为 D，值域为 M，如果对于 M 中的每一个 y 值$(y\in M)$，都可以从关系式 $y=f(x)$确定唯一的 x 值$(x\in D)$与之对

应，这样就确定了一个以 y 为自变量的新函数，记为 $x=f^{-1}(y)$，这个函数就称为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**，它的定义域为 M，值域为 D.

一个函数只有当它的反对应关系也是单值对应的时候才有反函数.

由定义可以看出，函数 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 是以 y 为自变量的，但习惯上都以 x 表示自变量，所以反函数 $x=f^{-1}(y)$ 通常表示为 $y=f^{-1}(x)$，虽然在这里改变了变量的字母，但是它的定义域和对应关系这两个确定函数的要素并未改变，因此，函数 $x=f^{-1}(y)$ 与函数 $y=f^{-1}(x)$ 是一样的，都是函数 $y=f(x)$ 的反函数.

以后如无特殊说明，函数 $y=f(x)$ 的反函数都是指以 x 为自变量的反函数 $y=f^{-1}(x)$.

由定义也容易得出，函数 $y=f(x)$ 的反函数为 $y=f^{-1}(x)$，而函数 $y=f^{-1}(x)$ 的反函数为 $y=f(x)$，因此，函数 $y=f(x)$ 与函数 $y=f^{-1}(x)$ 互为反函数.

2. 简单函数反函数的求法

如果函数 $y=f(x)$ 有反函数，那么，只要从关系式 $y=f(x)$ 中解出 x，就可得到以 y 为自变量的反函数 $x=f^{-1}(y)$，再将字母 x 与 y 互换，就得到以 x 为自变量的反函数 $y=f^{-1}(x)$. 例如函数 $y=x^2$，当 $x\geqslant 0$ 时的反函数为 $y=\sqrt{x}$，当 $x\leqslant 0$ 时的反函数为 $y=-\sqrt{x}$.

例 5　求函数 $y=2x-3$ 的反函数，并在同一平面直角坐标系中作出它们的图像.

解　函数 $y=2x-3$ 的反对应关系是单值对应的，因此，它有反函数，由关系式 $y=2x-3$ 解出 x，得

$$x=\frac{y+3}{2},$$

将 x 与 y 对换，得

$$y=\frac{x+3}{2}=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}.$$

因此，函数 $y=2x-3$ 的反函数为 $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$.

如图 2-4 所示，函数 $y=2x-3$ 的图像是经过点 $(0,-3)$ 与 $\left(\frac{3}{2},0\right)$ 的直线，而其反函数 $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ 的图像是经过点 $(-3,0)$ 与 $\left(0,\frac{3}{2}\right)$ 的直线.

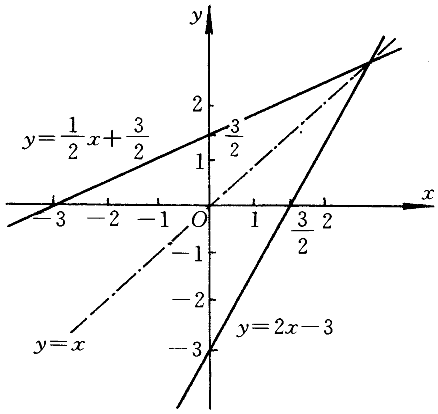


图 2-4

从图 2-4 可以看出，直线 $y=2x-3$ 的图像与直线 $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

一般地，函数 $y=f(x)$ 的图像与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

习题 2-1(A 组)

1. 已知函数 $f(x)=2x-3, x\in\{0,1,2,3,5\}$，试求 $f(0), f(1), f(2), f(3), f(5)$ 和函数的值域.

2. (1) 已知函数 $f(x)=x^2+1$，求证：$f(a)=f(-a)$；

(2) 已知函数 $f(x)=x^3-2x$，求证：$f(-a)=-f(a)$.

3. 求下列函数的定义域：

(1) $f(x)=\frac{1}{x-3}$；　　(2) $f(x)=\frac{x^2+1}{x+1}$；

(3) $f(x)=\sqrt{2x+5}$；　　(4) $f(x)=\sqrt{x^2-1}$.

4. 判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=\frac{1}{x^2}$；　　(2) $f(x)=x+\frac{1}{x}$；

(3) $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$；　　(4) $f(x)=x^2+x$；

(5) $f(x)=\frac{x^2+2}{x^2-1}$；　　(6) $f(x)=\sqrt{2x+1}$.

5. 已知函数

$$f(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x<1,\\ \dfrac{1}{2}, & x=1,\\ x, & 1<x\leqslant 2,\end{cases}$$

求 $f(0),f\left(\frac{1}{2}\right),f(1),f\left(\frac{3}{2}\right),f(2)$.

6. 求函数 $y=3x-1$ 的反函数,并在同一坐标平面内作出该函数与其反函数的图像.

习题 2-1(B 组)

1. 求下列函数的定义域:

(1) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}+x$;　　(2) $f(x)=\dfrac{1}{x+3}+\sqrt{x+4}$.

2. 判断下列函数在指定区间内的单调性:

(1) $f(x)=3x+2,x\in(-\infty,+\infty)$;

(2) $f(x)=\dfrac{3}{x},x\in(-\infty,0)$;

(3) $f(x)=x^2+1,x\in(0,+\infty)$;

(4) $f(x)=\sqrt{x},x\in(0,+\infty)$.

3. 求函数 $y=x^2,x\in(-\infty,0)$ 的反函数.

扫一扫，获取参考答案

2.2　有理指数幂　幂函数

一、有理指数幂

我们已知整数指数幂的定义:

正整数指数幂:$\underbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{n个a}=a^n(n\in\mathbf{N}^*)$.

零指数幂:$a^0=1\ (a\neq 0)$.

负整数指数幂:$a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}\quad(a\neq 0,n\in\mathbf{N}^*)$.

现在介绍分数指数幂的定义:

1. 根式

我们知道,如果 $x^2=a$,那么 x 叫作 a 的平方根. 例如,± 2 就是 4 的平方

根.如果 $x^3=a$,那么 x 叫作 a 的立方根.例如,2 就是 8 的立方根.

定义 如果 $x^n=a$,那么 x 叫作 a 的 n 次方根,其中 $n>1$,且 $n\in\mathbf{N}^*$.

当 n 是奇数时,正数的 n 次方根是一个正数,负数的 n 次方根是一个负数,这时 a 的 n 次方根表示 $\sqrt[n]{a}$.

例如,$\sqrt[5]{32}=2$,$\sqrt[5]{-32}=-2$.

当 n 是偶数时,正数的 n 次方根有两个,且它们互为相反数,分别表示为 $\sqrt[n]{a}$,$-\sqrt[n]{a}$;负数没有偶次方根.

例如,$\sqrt[4]{16}=2$,$-\sqrt[4]{16}=-2$,16 的 4 次方根可以表示为 $\pm\sqrt[4]{16}=\pm 2$.

0 的任何次方根都是 0,记作 $\sqrt[n]{0}=0$.

$\sqrt[n]{a}$ 叫作根式,这里 n 叫作根指数,a 叫作被开方数.

根据 n 次方根的定义,根式具有下列性质:

(1) $(\sqrt[n]{a})^n=a$.

(2) 当 n 为奇数时,$\sqrt[n]{a^n}=a$;当 n 为偶数时,$\sqrt[n]{a^n}=|a|=\begin{cases}a, & a\geqslant 0,\\ -a, & a<0.\end{cases}$

2. 分数指数幂

定义 $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$ $(m,n\in\mathbf{N}^*$,且 $n>1,a>0)$.

即正数的正分数指数幂表示一个根式,它的根指数是分数指数的分母,根底数的幂指数是分数指数的分子.

例如,$2^{\frac{3}{2}}=\sqrt{2^3}=2\sqrt{2}$;

$8^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{8^2}=\sqrt[3]{64}=4$.

定义 $a^{-\frac{m}{n}}=\dfrac{1}{a^{\frac{m}{n}}}=\dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$ $(m,n\in\mathbf{N}^*$,且 $n>1,a>0)$.

即正数的负分数指数幂表示一个根式的倒数,根式的根指数是分数指数的分母,根底数的幂指数是分数指数的分子.

例如,$2^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

$$(0.001)^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{(0.001)^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{0.01}=100.$$

0 的正分数指数幂等于 0,0 的负分数指数幂没有意义.

分数指数幂的引入,把幂的概念从整数指数幂推广到了有理指数幂.

3. 有理指数幂的运算性质

分数指数幂的运算法则与整数指数幂的运算法则完全相同，具有以下性质：

(1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad (a>0,\ m,n \in \mathbf{Q})$.

(2) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (a>0,\ m,n \in \mathbf{Q})$.

(3) $(a^m)^n = a^{m \cdot n} \quad (a>0,\ m,n \in \mathbf{Q})$.

(4) $(ab)^n = a^n \cdot b^n \quad (a>0, b>0, n \in \mathbf{Q})$.

从上面的例子还可以看到，应用以上法则进行幂的运算可以方便地得到结果. 例如：

$$4^{\frac{3}{2}} = (2^2)^{\frac{3}{2}} = 2^{2\times\frac{3}{2}} = 2^3 = 8;$$

$$(0.001)^{-\frac{2}{3}} = [(0.1)^3]^{-\frac{2}{3}} = (0.1)^{3\times\left(-\frac{2}{3}\right)} = (0.1)^{-2} = \frac{1}{(0.1)^2} = 100.$$

下面再举一些代数式化简的例子.

例 1 化简下列各式：

(1) $25^{\frac{1}{2}}$； (2) $\left(\dfrac{4}{25}\right)^{-\frac{3}{2}}$.

解 (1) $25^{\frac{1}{2}} = (5^2)^{\frac{1}{2}} = 5^{2\times\frac{1}{2}} = 5$.

(2) $\left(\dfrac{4}{25}\right)^{-\frac{3}{2}} = \left[\left(\dfrac{2}{5}\right)^2\right]^{-\frac{3}{2}} = \left(\dfrac{2}{5}\right)^{2\times\left(-\frac{3}{2}\right)} = \left(\dfrac{2}{5}\right)^{-3} = \dfrac{125}{8}$.

例 2 化简下列各式：

(1) $\left(\dfrac{3}{4}x^2 y^{\frac{1}{3}}\right)\left(\dfrac{2}{5}x^{-\frac{1}{2}} y^{-\frac{1}{6}}\right)\left(\dfrac{5}{6}x^{\frac{1}{3}} y^{-\frac{3}{2}}\right)$；

(2) $(x^{-\frac{5}{6}} y^{\frac{2}{3}}) \div (x^{-\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{2}})$；

(3) $(x^{\frac{1}{4}} y^{-\frac{3}{8}})^8$.

解 (1)原式 $= \left(\dfrac{3}{4}\times\dfrac{2}{5}\times\dfrac{5}{6}\right)x^{2-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{3}{2}} = \dfrac{1}{4}x^{\frac{11}{6}} y^{-\frac{4}{3}}$.

(2) 原式 $= x^{-\frac{5}{6}-\left(-\frac{1}{3}\right)} y^{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}} = x^{-\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{6}}$.

(3) 原式 $= (x^{\frac{1}{4}})^8 (y^{-\frac{3}{8}})^8 = x^2 y^{-3} = \dfrac{x^2}{y^3}$.

4. 利用计算器求根式的值及进行指数幂运算

例 3 利用 CASIO fx-82ES PLUS 型计算器计算(精确到 0.0001)：

(1) $\sqrt[4]{0.56}$；　(2) $3^{\frac{3}{4}}$；　(3) $5^{-\frac{4}{5}}$；　(4) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{0.45^3}}$.

解　首先将计算器设定为普通计算状态. 操作步骤：按$\boxed{\text{MODE}}$键→按数字键$\boxed{1}$. 然后设定精确度. 操作步骤：按$\boxed{\text{SHIFT}}$键→按$\boxed{\text{MODE}}$键→按数字键$\boxed{6}$→按数字键$\boxed{4}$(精确到 0.0001).

(1) $\boxed{\sqrt[\blacksquare]{\square}}$键可以方便地计算出 n 次根式的值. 按照下面的步骤操作：

按$\boxed{\text{SHIFT}}$键→按$\boxed{\sqrt[\blacksquare]{\square}}$键→输入根指数 4 →按$\boxed{\triangleright}$键→输入被开方数 0.56 →按$\boxed{=}$键，显示计算结果 0.8651. 即 $\sqrt[4]{0.56}\approx 0.8651$.

(2) 通过$\boxed{x^{\blacksquare}}$键来计算分数指数幂的操作步骤：输入底→按$\boxed{x^{\blacksquare}}$键→输入指数→按$\boxed{=}$键，显示计算结果. 即 $3^{\frac{3}{4}}\approx 2.2795$.

(3) $5^{-\frac{4}{5}}\approx 0.2759$.

(4) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{0.45^3}}=0.45^{-\frac{3}{5}}\approx 1.6146$.

二、幂函数

我们先看几个问题：

(1)如果张红购买了每千克 1 元的蔬菜 m kg，那么她需要支付 $p=m$ 元，这里 p 是 m 的函数.

(2)如果正方形的边长为 a，那么正方形的面积 $S=a^2$，这里 S 是 a 的函数.

(3)如果正方体的底边边长为 a，那么正方体的体积 $V=a^3$，这里 V 是 a 的函数.

(4)如果一个正方形场地的面积为 S，那么这个正方形的边长 $a=S^{\frac{1}{2}}$，这里 a 是 S 的函数.

(5)如果某人 t s 内骑车行进了 1 km，那么他骑车的平均速度 $V=t^{-1}$ km/s，这里 V 是 t 的函数.

如果不考虑上述问题的实际意义，问题中所涉及的函数都是形如 $y=x^{\alpha}$ 的函数.

定义　函数 $y=x^{\alpha}$ 称为**幂函数**，其中指数 α 为常量，它可以为任何实数.

例如，函数 $y=x$，$y=x^2$，$y=x^3$，$y=x^{-1}$，$y=x^{-2}$，$y=x^{\frac{1}{2}}$，$y=x^{-\frac{1}{2}}$ 等都是幂函数.

幂函数 $y=x^{\alpha}$ 的定义域由指数 α 的值决定.

对于幂函数我们只讨论 $\alpha=1,2,3,\frac{1}{2},-1$ 的情形.

在同一平面直角坐标系内作出幂函数 $y=x$，$y=x^2$，$y=x^3$，$y=x^{\frac{1}{2}}$ 和 $y=x^{-1}$ 的图像，如图 2-5 所示.

通过图 2-5，我们可以得出：

(1)函数 $y=x$，$y=x^2$，$y=x^3$，$y=x^{\frac{1}{2}}$ 和 $y=x^{-1}$ 的图像都通过点(1，1).

(2)在区间$(0,+\infty)$内，函数 $y=x$，$y=x^2$，$y=x^3$ 和 $y=x^{\frac{1}{2}}$ 是单调增函数，函数 $y=x^{-1}$ 是单调减函数.

(3)函数 $y=x$，$y=x^3$，$y=x^{-1}$ 是奇函数，函数 $y=x^2$ 是偶函数，函数 $y=x^{\frac{1}{2}}$ 是非奇非偶函数.

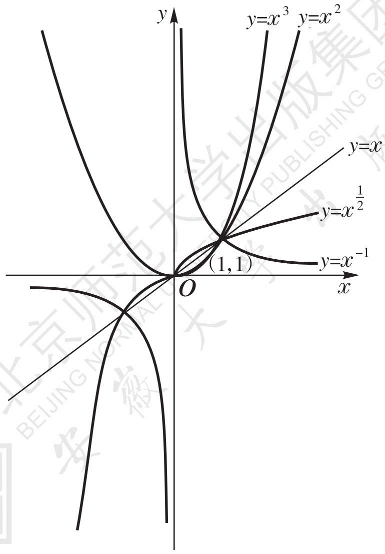


图 2-5

一般地，当 $\alpha>0$ 时，幂函数 $y=x^{\alpha}$ 具有下列共同性质：

①图像都通过坐标原点和点(1，1)；

②函数在区间$(0,+\infty)$内是单调增函数.

当 $\alpha<0$ 时，幂函数 $y=x^{\alpha}$ 具有下列共同性质：

①图像都通过点(1，1)；

②函数在区间$(0,+\infty)$内是单调减函数.

例 4　比较下面各组中两个值的大小：

(1) $1.3^{\frac{3}{2}}$ 和 $1.6^{\frac{3}{2}}$；　(2) $0.18^{-1.3}$ 和 $0.15^{-1.3}$.

解　(1)$1.3^{\frac{3}{2}}$ 和 $1.6^{\frac{3}{2}}$ 可以看作幂函数 $y=x^{\frac{3}{2}}$ 在 $x=1.3$ 和 $x=1.6$ 处的两

个函数值，因为 $\alpha=\dfrac{3}{2}>0$，$1.3, 1.6\in(0,+\infty)$，并且 $1.3<1.6$，由幂函数 $y=x^{\alpha}\ (\alpha>0)$ 在 $(0,+\infty)$ 内是单调增函数可知

$$1.3^{\frac{3}{2}}<1.6^{\frac{3}{2}}.$$

（2）$0.18^{-1.3}$ 和 $0.15^{-1.3}$ 可以看作幂函数 $y=x^{-1.3}$ 在 $x=0.18$ 和 $x=0.15$ 处的两个函数值，因为 $\alpha=-1.3$，$0.18, 0.15\in(0,+\infty)$，并且 $0.18>0.15$，由幂函数 $y=x^{\alpha}(\alpha<0)$ 在 $(0,+\infty)$ 内是单调减函数可知

$$0.18^{-1.3}<0.15^{-1.3}.$$

习题 2-2（A 组）

1. 求下列各分数指数幂的值：

（1）$25^{-\frac{1}{2}}$；　（2）$32^{-\frac{2}{5}}$；　（3）$(0.027)^{\frac{2}{3}}$；　（4）$\left(\dfrac{1}{16}\right)^{-\frac{3}{4}}$.

2. 把下列各分数指数幂化为根式：

（1）$2^{\frac{2}{3}}$；　（2）$3^{-\frac{1}{3}}$；　（3）$(0.1)^{\frac{1}{2}}$；　（4）$5^{-\frac{3}{4}}$.

3. 把下列各根式化为分数指数幂：

（1）$\sqrt[3]{2}$；　（2）$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$；　（3）$\sqrt[5]{a^2}$；　（4）$\dfrac{1}{(\sqrt{b})^3}$.

4. 化简下列各式：

（1）$\left(\dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{2}}\right)\left(-\dfrac{2}{3}x^{-1}y^{-\frac{1}{3}}\right)$；

（2）$\left(-15a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}c^{-\frac{3}{4}}\right)\left(\dfrac{1}{25}a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{3}{4}}\right)^2$.

5. 比较下列各组中两个值的大小：

（1）$2^{0.2}$ 和 $3^{0.2}$；　（2）$0.2^{-0.2}$ 和 $0.3^{-0.2}$；

（3）$3^{\frac{4}{3}}$ 和 $4^{\frac{4}{3}}$；　（4）$3^{-\frac{4}{3}}$ 和 $4^{-\frac{4}{3}}$.

6. 用计算器计算下列各式的值（精确到 0.0001）：

（1）1.2^5；　（2）$3.2^{-2.5}$；

（3）$1.1^{\frac{1}{3}}\times 2.1^{\frac{1}{2}}$；　（4）$0.3^{-2.1}\times e^3$.

习题 2-2（B 组）

1. 把下列各分数指数幂化成根式：

（1）$(2^{\frac{1}{2}})^3$；　（2）$(3^{-\frac{1}{3}})^2$；

(3) $(a^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{4}}$；　　　　(4) $a^{\frac{3}{2}}\cdot b^{-\frac{1}{2}}$.

2. 把下列各根式化成分数指数幂：

(1) $\sqrt{2\sqrt{2}}$；　　　　(2) $\sqrt[3]{a^2b}$；

(3) $\sqrt{(x+1)^3}$；　　　　(4) $\dfrac{\sqrt{a+1}}{\sqrt[3]{b-1}}$.

扫一扫，获取参考答案

3. 化简下列各式：

(1) $(\frac{1}{3}x^2y^{\frac{1}{2}})^3\cdot(\frac{9}{2}x^{-1}y)^2$；

(2) $(2x^{-2}y^{\frac{1}{3}})^5\div(4x^{-3}y)$.

2.3　指数函数

一、指数函数的定义

我们先来看一个例子：

某产品原来的年产量是 1×10^4 t，计划从今年开始，年产量平均每年增加15%，那么 x 年后的年产量 y（单位为 10^4 t）为

$$y=(1+15\%)^x,$$

即

$$y=1.15^x.$$

上例中，y 是 x 的函数，这个函数的指数是变量，底数是常量. 对这样的函数，我们有下面的定义：

定义　函数 $y=a^x(a>0$ 且 $a\neq1)$称为**指数函数**，它的定义域是实数集 **R**.

因此，上例中的函数 $y=1.15^x$ 是指数函数，这是一个实际问题中的函数，x 只能取正实数，所以它的定义域是正实数集 $\mathbf{R}^+$.

又如，函数 $y=2^x$，$y=3^x$，$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 和 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 也都是指数函数，它们的定义域都是实数集 **R**.

二、指数函数的图像和性质

由指数函数的定义我们知道，底数 $a>0$ 且 $a\neq1$. 下面分别就 $a>1$ 和 $0<a<1$两种情形，对几个常见指数函数的图像和性质进行讨论，得出它们的一般结论.

1. 当 $a>1$ 时的情形

先讨论指数函数 $y=2^x$ 和 $y=3^x$ 的图像和性质.

利用描点作图法，可以作出函数 $y=2^x$ 和 $y=3^x$ 的图像，如图 2-6 所示.

由图 2-6 可知，这两个函数的图像有下列特征：

(1) 图像在 x 轴的上方，即函数的值域为 $(0,+\infty)$.

(2) 图像过点 $(0,1)$.

(3) 图像沿 x 轴正向逐渐上升.

用类似的方法，我们可以作出指数函数 $y=a^x$ 在 $a>1$ 时的图像（图 2-7），可归纳出它具有如下性质：

(1) $y=a^x$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $(0,+\infty)$.

(2) 图像过定点 $(0,1)$，即当 $x=0$ 时，$y=1$.

(3) $y=a^x$ 在定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调增函数.

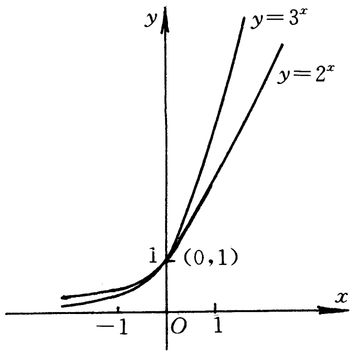


图 2-6

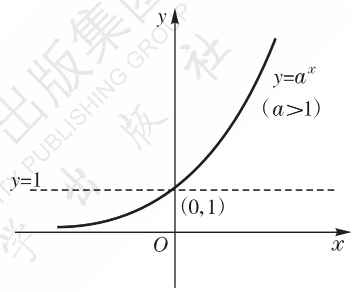


图 2-7

例 1　比较下列各组中两个值的大小：

(1) $3^{\frac{5}{3}}$ 和 $3^{\frac{4}{3}}$；　(2) $5^{-\frac{1}{2}}$ 和 $5^{-\frac{1}{3}}$.

解　(1) $3^{\frac{5}{3}}$ 和 $3^{\frac{4}{3}}$ 可以看作指数函数 $y=3^x$ 当 $x=\frac{5}{3}$ 和 $x=\frac{4}{3}$ 时所对应的两个函数值，因为 $a=3>1$，并且 $\frac{5}{3}>\frac{4}{3}$，由指数函数 $y=a^x(a>1)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调增函数可知

$$3^{\frac{5}{3}}>3^{\frac{4}{3}}.$$

(2) $5^{-\frac{1}{2}}$ 和 $5^{-\frac{1}{3}}$ 可以看作指数函数 $y=5^x$ 当 $x=-\frac{1}{2}$ 和 $x=-\frac{1}{3}$ 时所对应的两个函数值，因为 $a=5>1$，并且 $-\frac{1}{2}<-\frac{1}{3}$，由指数函数 $y=a^x(a>1)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调增函数可知

$$5^{-\frac{1}{2}}<5^{-\frac{1}{3}}.$$

2. 当 $0<a<1$ 时的情形

先讨论指数函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 和 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 的图像和性质.

利用描点作图法可以作出函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 和 $\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 的图像,如图 2-8 所示.

由图 2-8 可知,这两个函数的图像具有下列特征:

(1) 图像在 x 轴的上方,即函数的值域是 $(0,+\infty)$.

(2) 图像过点 $(0,1)$.

(3) 图像沿 x 轴正向逐渐下降.

用类似的方法,我们可以作出指数函数 $y=a^x$ 在 $0<a<1$ 时的图像(图 2-9),可归纳出它具有如下性质:

(1) $y=a^x$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$,值域为 $(0,+\infty)$.

(2) 图像过定点 $(0,1)$,即当 $x=0$ 时,$y=1$.

(3) $y=a^x$ 在定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调减函数.

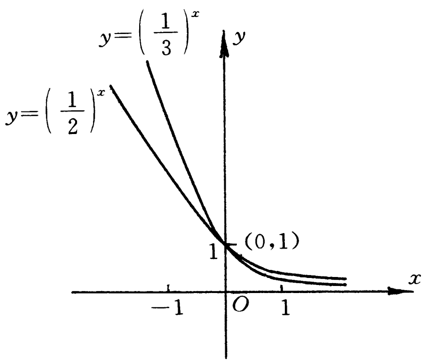


图 2-8

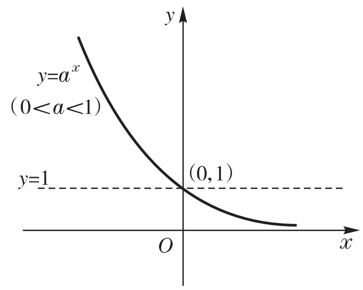


图 2-9

例 2　比较下列各组中两个值的大小:

(1) $\left(\frac{1}{5}\right)^{1.8}$ 和 $\left(\frac{1}{5}\right)^{1.9}$;　　(2) $0.3^{-\frac{1}{2}}$ 和 $0.3^{-\frac{1}{3}}$.

解　(1) $\left(\frac{1}{5}\right)^{1.8}$ 和 $\left(\frac{1}{5}\right)^{1.9}$ 可以看作指数函数 $y=\left(\frac{1}{5}\right)^x$ 当 $x=1.8$ 和 $x=1.9$ 时所对应的两个函数值,因为 $a=\frac{1}{5}$,$0<a<1$,并且 $1.8<1.9$,由指数函数 $y=a^x(0<a<1)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调减函数可知

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{1.8}>\left(\frac{1}{5}\right)^{1.9}.$$

(2) $0.3^{-\frac{1}{2}}$和$0.3^{-\frac{1}{3}}$可以看作指数函数$y=0.3^x$当$x=-\frac{1}{2}$和$x=-\frac{1}{3}$时所对应的两个函数值，因为$a=0.3$，$0<a<1$，并且$-\frac{1}{2}<-\frac{1}{3}$，由指数函数$y=a^x$ $(0<a<1)$在$(-\infty,+\infty)$内是单调减函数可知

$$0.3^{-\frac{1}{2}}>0.3^{-\frac{1}{3}}.$$

例 3 设函数$y_1=2^{5x^2+1}$和$y_2=2^{x^2+10}$，求使$y_1<y_2$的x的值.

解 要使$y_1<y_2$，即$2^{5x^2+1}<2^{x^2+10}$.

由指数函数$y=a^x(a>1)$在$(-\infty,+\infty)$内是单调增函数可知，必须满足

$$5x^2+1<x^2+10 \quad 即 \quad x^2<\frac{9}{4},$$

所以
$$-\frac{3}{2}<x<\frac{3}{2}.$$

因此，使$y_1<y_2$的x的值构成的集合为

$$\left\{x\,\middle|\,-\frac{3}{2}<x<\frac{3}{2}\right\}.$$

例 4 求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{1}{\sqrt{2^x-\frac{1}{4}}}$； (2) $y=\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^x-9}$.

解 (1)要使$y=\dfrac{1}{\sqrt{2^x-\frac{1}{4}}}$有意义，必须满足$2^x-\frac{1}{4}>0$，即$2^x>\frac{1}{4}=2^{-2}$. 由指数函数$y=a^x(a>1)$在$(-\infty,+\infty)$内是单调增函数可知$x>-2$，所以函数$y=\dfrac{1}{\sqrt{2^x-\frac{1}{4}}}$的定义域为$(-2,+\infty)$.

(2)要使$y=\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^x-9}$有意义，必须满足$\left(\frac{1}{3}\right)^x-9\geqslant0$，即$\left(\frac{1}{3}\right)^x\geqslant9=\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$. 由指数函数$y=a^x(0<a<1)$在$(-\infty,+\infty)$内是单调减函数可知$x\leqslant-2$，所以函数$y=\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^x-9}$的定义域为$(-\infty,-2]$.

习题 2-3(A 组)

1. 比较下列各组中两个值的大小：

（1）$2^{\frac{1}{2}}$和$2^{\frac{2}{3}}$；　　（2）$2^{-\frac{1}{2}}$和$2^{-\frac{2}{3}}$；

（3）$\left(\frac{1}{2}\right)^{0.6}$和$\left(\frac{1}{2}\right)^{0.7}$；　　（4）$\left(\frac{1}{2}\right)^{-0.6}$和$\left(\frac{1}{2}\right)^{-0.7}$.

2. 设函数 $y_1=2^{x+1}$，$y_2=2^{2x-3}$，求使 $y_1>y_2$ 的 x 的值.

3. 求下列函数的定义域：

（1）$y=\sqrt{3^x-1}$；　　（2）$y=\frac{1}{2^x-4}$；

（3）$y=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^x-8}$；　　（4）$y=\left[\left(\frac{1}{3}\right)^x-27\right]^{-\frac{1}{2}}$.

习题 2-3(B 组)

1. 设函数 $y_1=3^{2x^2+1}$，$y_2=3^{x^2+2}$，求使 $y_1>y_2$ 的 x 的值.

2. 设函数 $y_1=(\frac{1}{2})^{2x^2-3x+1}$，$y_2=(\frac{1}{2})^{x^2+2x-3}$，求使 $y_1>y_2$ 的 x 的值.

3. 求下列函数的定义域：

（1）$y=\frac{1}{\sqrt{2^{x^2-1}-8}}$；

（2）$y=\sqrt{3^{2x-1}-\frac{1}{27}}$.

扫一扫，获取参考答案

2.4 对　数

一、对数的概念

如果有人问你，2 的多少次幂等于 8？你会很快地回答出 2 的 3 次幂等于 8，即 $2^3=8$. 但若再问你，2 的多少次幂等于 9？你还能很快地回答出来吗？实际上，该问题就是求解 $2^x=9$ 中的 x，这是一个已知底数和幂的值求指数的问题. 为此，引进对数的概念.

定义　如果 $a^b=N\ (a>0$ 且 $a\neq1)$，那么指数 b 称为以 a 为底的 N 的**对数**，记为

$$b=\log_a N,$$

其中 a 称为**底数**，N 称为**真数**.

例如，由于 $4^2=16$，所以以 4 为底 16 的对数是 2，记作 $\log_4 16=2$.

根据对数的定义，可以得到对数与指数间的关系：

当 $a>0$ 且 $a\neq1$ 时，$a^b=N\Leftrightarrow b=\log_a N$.

指数式 $a^b=N$ 和对数式 $b=\log_a N$ 表示的是 a,b,N 之间的同一种关系，其中 a,b,N 的取值范围如表 2-2 所示.

表 2-2

a	b	N
$a>0$ 且 $a\neq1$	任意实数	任意正实数

由表 2-2 中 N 的取值范围可知，零和负数没有对数.

在对数式 $b=\log_a N$ 中，若已知 a,b,N 中的任何 2 个数，就可以求出第 3 个数.

例 1　求下列等式中的未知数：

(1) $\log_{64} N=-\dfrac{2}{3}$；　(2) $\log_a 8=3$；　(3) $b=\log_9 27$；　(4) $\log_{\frac{1}{2}} N=0$.

解　(1) 把 $\log_{64} N=-\dfrac{2}{3}$ 写成指数式，得 $N=64^{-\frac{2}{3}}$. 由此得出

$$N=(2^6)^{-\frac{2}{3}}=2^{-4}=\frac{1}{16}.$$

(2) 把 $\log_a 8=3$ 写成指数式，得 $a^3=8$. 由此得出

$$a=\sqrt[3]{8}=2.$$

因为对数的底数只能是正数且不等于 1，所以 $a=2$.

（3）把 $b=\log_9 27$ 写成指数式，得 $9^b=27$，即 $3^{2b}=3^3$. 由此得出

$$2b=3,\quad 即\quad b=\frac{3}{2}.$$

（4）把 $\log_{\frac{1}{2}} N=0$ 写成指数式，得 $N=\left(\frac{1}{2}\right)^0$. 由此得出

$$N=1.$$

在对数的定义中，底数 $a>0$ 且 $a\neq 1$. 在高等数学和科学研究中常要用到以 10 和无理数 $e=2.71828\cdots$ 为底的对数，对于这种形式的对数，分别给出如下定义：

定义　以 10 为底，正数 N 的对数 $\log_{10} N$ 称为**常用对数**（或十进对数），记为 $\lg N$，即

$$\lg N=\log_{10} N.$$

定义　以 e 为底，正数 N 的对数 $\log_e N$ 称为**自然对数**，记为 $\ln N$，即

$$\ln N=\log_e N.$$

二、两个重要恒等式

1. $a^{\log_a N}=N$（$a>0$ 且 $a\neq 1$, $N>0$）

由对数的定义可知，如果 $a^b=N$，那么 $b=\log_a N$.

把 $b=\log_a N$ 代入 $a^b=N$，可得恒等式

$$\boxed{a^{\log_a N}=N.}\tag{2-1}$$

例 2　计算下列各式的值：

（1）$2^{\log_2 5}$；　　（2）$2^{1+\log_2 5}$；

（3）$2^{2-\log_2 5}$；　　（4）$2^{3\log_2 5}$.

解　（1）由恒等式 $a^{\log_a N}=N$ 可得

$$2^{\log_2 5}=5.$$

（2）$2^{1+\log_2 5}=2\cdot 2^{\log_2 5}=2\times 5=10$.

（3）$2^{2-\log_2 5}=\dfrac{2^2}{2^{\log_2 5}}=\dfrac{4}{5}$.

（4）$2^{3\log_2 5}=(2^{\log_2 5})^3=5^3=125$.

注：在恒等式 $a^{\log_a N}=N$ 中，当 $a=10$ 和 $a=e$ 时，分别得到

$$10^{\lg N}=N,\quad e^{\ln N}=N.$$

2. $\log_a a^b=b$（$a>0$ 且 $a\neq 1, b\in\mathbf{R}$）

由对数的定义可知，如果 $a^b=N$，则 $b=\log_a N$.

把 $N=a^b$ 代入 $b=\log_a N$，可得恒等式

$$\boxed{\log_a a^b=b.} \tag{2-2}$$

例 3 计算下列各对数的值：

（1）$\log_{10}10000$；（2）$\log_{10}\dfrac{1}{1000}$；（3）$\log_9 27$；（4）$\log_{\frac{1}{2}}8$.

解 （1）$\log_{10}10000=\log_{10}10^4$，由恒等式 $\log_a a^b=b$ 可得

$$\log_{10}10000=4.$$

（2）$\log_{10}\dfrac{1}{1000}=\log_{10}10^{-3}$，由恒等式 $\log_a a^b=b$ 可得

$$\log_{10}\frac{1}{1000}=-3.$$

（3）$\log_9 27=\log_9 9^{\frac{3}{2}}$，由恒等式 $\log_a a^b=b$ 可得

$$\log_9 27=\frac{3}{2}.$$

（4）$\log_{\frac{1}{2}}8=\log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3}$，由恒等式 $\log_a a^b=b$ 可得

$$\log_{\frac{1}{2}}8=-3.$$

注：在恒等式 $\log_a a^b=b$ 中，当 $a=10$ 和 $a=\mathrm{e}$ 时，分别得到

$$\lg 10^b=b, \quad \ln \mathrm{e}^b=b.$$

例 4 计算下列各式的值：

（1）$\log_a a$；（2）$\log_a 1$.

解 （1）因为 $\log_a a=\log_a a^1$，由恒等式 $\log_a a^b=b$ 可得

$$\log_a a=1.$$

（2）因为 $\log_a 1=\log_a a^0$，由恒等式 $\log_a a^b=b$ 可得

$$\log_a 1=0.$$

由例 4 我们可以得到对数的两个重要性质：

（1）与底数相等的数的对数等于 1，即 $\log_a a=1$.

（2）1 的对数恒等于零，即 $\log_a 1=0$.

显然，$\lg 10=1$，$\ln \mathrm{e}=1$，$\lg 1=0$，$\ln 1=0$.

三、积、商、幂的对数的运算法则

在幂的运算法则中有 $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$. 设 $a^m=M, a^n=N$，由对数的定义可得

$$m=\log_a M, \quad n=\log_a N.$$

因此

$$\log_a(M\cdot N)=\log_a(a^m\cdot a^n)=\log_a a^{m+n}=m+n=\log_a M+\log_a N.$$

同样地，我们可以仿照上述过程，由 $a^m\div a^n=a^{m-n}$ 和 $(a^m)^n=a^{mn}$，得出对数运算的其他性质.

于是，我们可以得到如下对数运算法则：

如果 $a>0$ 且 $a\neq1$，$M>0$，$N>0$，那么

$$\boxed{\begin{aligned}&\log_a(M\cdot N)=\log_a M+\log_a N;\\&\log_a\frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N;\\&\log_a M^n=n\log_a M\ (n\in R).\end{aligned}}\qquad(2\text{-}3)$$

例 5　用 $\log_a x$，$\log_a y$，$\log_a z$ 表示下列各式：

（1）$\log_a\dfrac{xy}{z}$；　　（2）$\log_a\dfrac{x^2\sqrt{y}}{\sqrt[3]{z}}$.

解　（1）$\log_a\dfrac{xy}{z}=\log_a(xy)-\log_a z=\log_a x+\log_a y-\log_a z$.

（2）$\log_a\dfrac{x^2\sqrt{y}}{\sqrt[3]{z}}=\log_a(x^2\sqrt{y})-\log_a\sqrt[3]{z}=\log_a x^2+\log_a\sqrt{y}-\log_a\sqrt[3]{z}$

$$=2\log_a x+\frac{1}{2}\log_a y-\frac{1}{3}\log_a z.$$

例 6　已知 $\lg x=\dfrac{1}{3}\left[\lg a-\dfrac{1}{2}\lg b+2\lg(a+b)\right]+\lg c$，求 x.

解　因为 $\lg x=\dfrac{1}{3}[\lg a-\lg b^{\frac{1}{2}}+\lg(a+b)^2]+\lg c$

$$=\frac{1}{3}\lg\frac{a(a+b)^2}{\sqrt{b}}+\lg c$$

$$=\lg\left(c\sqrt[3]{\frac{a(a+b)^2}{\sqrt{b}}}\right),$$

所以 $x=c\sqrt[3]{\dfrac{a(a+b)^2}{\sqrt{b}}}$.

在应用积、商、幂的对数的运算法则时，应该注意以下两点：

（1）等式两边的对数的底数要相等.

（2）等式两边的对数的真数要大于零.

四、对数的换底公式

一般地，一个正数 N 的以 a 为底的对数 $\log_a N$ 可换成以 b 为底的对数（a，b 均为不等于 1 的正数）.

设 $x=\log_a N$，写成指数式，得

$$a^x=N,$$

两边取以 b 为底的对数，得

$$\log_b a^x=\log_b N \quad 即 \quad x\log_b a=\log_b N,$$

所以 $x=\dfrac{\log_b N}{\log_b a}$，因此

$$\boxed{\log_a N=\frac{\log_b N}{\log_b a}.} \qquad (2\text{-}4)$$

这个公式称为对数的**换底公式**，其中 a,b 均为不等于 1 的正数且 $N>0$.

例 7 已知 $\lg 2=0.3010$，求下列各对数的值（精确到 0.001）：

（1）$\log_2 0.01$；（2）$\log_2 5$.

解 （1）由换底公式可得

$$\log_2 0.01=\frac{\lg 0.01}{\lg 2}=\frac{\lg 10^{-2}}{\lg 2}=\frac{-2\lg 10}{\lg 2}=\frac{-2}{\lg 2}\approx -6.645.$$

（2）由换底公式可得

$$\log_2 5=\frac{\lg 5}{\lg 2}=\frac{\lg \frac{10}{2}}{\lg 2}=\frac{\lg 10-\lg 2}{\lg 2}$$

$$=\frac{1-0.3010}{0.3010}\approx 2.322.$$

例 8 已知 $\log_{18}9=a$，$18^b=5$，求证：$\log_{36}45=\dfrac{a+b}{2-a}$.

证明 由 $18^b=5$ 得 $\log_{18}5=b$.

$$\log_{36}45=\frac{\log_{18}45}{\log_{18}36}=\frac{\log_{18}(5\times 9)}{\log_{18}(18\times 2)}=\frac{\log_{18}5+\log_{18}9}{\log_{18}18+\log_{18}2}$$

$$=\frac{b+a}{1+\log_{18}\frac{18}{9}}=\frac{b+a}{1+\log_{18}18-\log_{18}9}=\frac{a+b}{2-a}.$$

在对数的换底公式中，当 $N=b$ 时，有

$$\boxed{\log_a b=\frac{1}{\log_b a}} \quad （a,b\ 为不等于\ 1\ 的正数）, \qquad (2\text{-}5)$$

即当对数的底数和真数互换时，这两个对数是倒数关系.

五、利用计算器求对数的值

一般的函数型计算器都可以进行对数的计算. 如 CASIO fx-82ES PLUS 型计算器，利用 $\boxed{\text{ln}}$ 键计算自然对数，利用 $\boxed{\text{log}}$ 键计算常用对数，利用 $\boxed{\log_{\blacksquare}\square}$ 键

计算一般底的对数. 利用$\boxed{\log_{\blacksquare}\square}$键进行计算时，输入底之后，需要按$\boxed{\triangleright}$键，将光标移到真数的位置，再输入真数.

例 9　用计算器求下列各式的值(精确到 0.0001)：

(1) $\lg 2$；　(2) $\ln 1.2$；　(3) $\log_3 4$；　(4) $\log_{0.2}\frac{1}{3}$.

解　首先将计算器设定为普通计算状态，再设定精确度. 然后分别使用$\boxed{\log}$键、$\boxed{\ln}$键、$\boxed{\log_{\blacksquare}\square}$键进行计算.

(1) $\lg 2\approx 0.3010$.　(2) $\ln 1.2\approx 0.1823$.

(3) $\log_3 4\approx 1.2619$.　(4) $\log_{0.2}\frac{1}{3}\approx 0.6826$.

最后，我们来解决本节开头提出的问题：求解 $2^x=9$ 中的 x.

解　由 $2^x=9$ 得 $x=\log_2 9$，利用计算器求得 $x\approx 3.1699$.

习题 2-4(A 组)

1. 将下列各指数式表示为对数式：

(1) $3^2=9$；　(2) $(\frac{1}{2})^3=\frac{1}{8}$；　(3) $2^{-3}=\frac{1}{8}$；　(4) $5^0=1$.

2. 将下列各对数式表示为指数式：

(1) $\log_2 4=2$；　(2) $-4=\log_3\frac{1}{81}$；

(3) $\frac{1}{2}=\log_3\sqrt{3}$；　(4) $-\frac{1}{3}=\log_{27}\frac{1}{3}$.

3. 求下列各等式中的未知数：

(1) $\log_8 N=2$；　(2) $\log_2\sqrt{2}=b$；

(3) $\log_a 3=2$；　(4) $\log_{\frac{1}{3}} N=1$.

4. 求下列各式的值：

(1) $3^{\log_3 9}$；　(2) $5^{\log_5 2+1}$；　(3) $3^{5\log_3 2}$；

(4) $2^{\log_2 3-1}$；　(5) $\log_2 16$；　(6) $\log_3\frac{1}{81}$；

(7) $\log_{\frac{1}{2}}\frac{\sqrt{2}}{2}$；　(8) $\log_{\frac{1}{2}} 8$.

5. 求下列各式的值：

（1）$\log_{36}6-\log_{6}36+\log_{6}\dfrac{1}{36}-\log_{36}\dfrac{1}{6}$；

（2）$2\log_{5}25+3\log_{2}64-8\log_{2}1-\log_{8}8$.

6. 用 $\log_a x,\log_a y,\log_a z$ 表示下列各式：

（1）$\log_a\dfrac{x^2y^3}{\sqrt{z}}$；　　（2）$\log_a\dfrac{\sqrt{x}}{y^2z^3}$.

7. 由下列各式求 x：

（1）$\log_3x=\log_35-\log_32+\log_34$；

（2）$\log_4x=2\log_43-3\log_42+\log_45$.

8. 利用计算器计算下列各式(精确到 0.0001)：

（1）$\lg 8$；　　（2）$\ln 10$；

（3）$\ln 0.15$；　　（4）$\log_3 7$.

习题 2-4(B 组)

1. 求下列各式的值：

（1）$2^{\log_{\frac{1}{2}}2}$；　　（2）$3^{\log_{\sqrt{3}}2}$；　　（3）$25^{\log_5 2}$；

（4）$2^{\log_4 3}$；　　（5）$\left(\dfrac{1}{5}\right)^{\log_5 3}$；　　（6）$4^{\log_2 3+1}$.

2. 求下列各式的值：

（1）$\log_2\sqrt{2}-\log_{\sqrt{3}}9+\log_{\sqrt{2}}8$；　　（2）$3\log_2\dfrac{1}{32}+\dfrac{1}{4}\log_{\sqrt{2}}4-3\log_{\frac{1}{2}}1$；

（3）$\log_a\sqrt[n]{a}+\log_a\dfrac{1}{a^n}+\log_a\dfrac{1}{\sqrt[n]{a}}$；　　（4）$\ln \mathrm{e}-2\ln\sqrt{\mathrm{e}}+3\ln\dfrac{1}{\mathrm{e}}+2\ln\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$.

3. 由下列各式求 x：

（1）$\log_4x=2\log_43+3\log_42-2$；

（2）$\log_3x=\dfrac{1}{4}[3\log_3a-(3\log_3b+2\log_3c)]$；

（3）$\lg x=2\lg 5-\lg 25+3\lg\sqrt{5}-1$.

4. 证明下列各等式：

（1）$a^{\frac{\ln N}{\ln a}}=N$；

（2）$\dfrac{\log_a x}{\log_{ab}x}=1+\log_a b$；

（3）$(\log_a b)(\log_b c)(\log_c a)=1$.

扫一扫，获取参考答案

2.5　对数函数

一、对数函数的定义

在本书 2.4 节引入指数函数时，已经得出年产量 y 与时间 x 的函数关系为 $y=1.15^x(x>0)$. 实际上，在这个问题中，如果已知的是 y 的值，要求的是对应的 x 值，可用对数形式表示为 $x=\log_{1.15}y$.

对于任一个“年产量 y”，都可求出唯一的“时间 x”，如果以“年产量 y”作为自变量，则依函数的定义“时间 x”与“年产量 y”之间具有函数关系. 通常用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，上述的函数关系可表示为 $y=\log_{1.15}x$（它是 $y=1.15^x$ 的反函数）. 对于这样的函数，给出下面的定义.

定义　函数 $y=\log_a x$ $(a>0$ 且 $a\neq1)$ 称为**对数函数**，它的定义域是正实数集 $\mathbf{R}^+$.

例如，$y=\log_2 x$，$y=\log_3 x$，$y=\log_{\frac{1}{2}} x$，$y=\log_{\frac{1}{3}} x$，$y=\lg x$，$y=\ln x$ 等都是对数函数.

二、对数函数的图像和性质

由对数函数的定义可知，底数 $a>0$ 且 $a\neq1$，下面分别就 $a>1$ 和 $0<a<1$ 两种情形，对几个常见对数函数的图像和性质进行讨论，得出它们的一般结论.

1. 当 $a>1$ 时的情形

先讨论对数函数 $y=\log_2 x$ 的图像和性质.

利用描点作图法，可以作出函数 $y=\log_2 x$ 的图像，如图 2-10 所示.

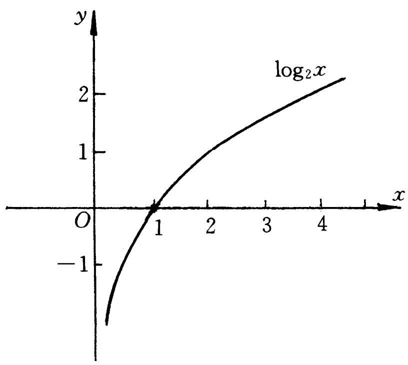


图 2-10

由图 2-10 可以得出，这个对数函数的图像具有下列特征：

(1) 图像在 y 轴右方，即函数的定义域是 $(0,+\infty)$.

(2) 图像过点 $(1,0)$.

(3) 图像沿 x 轴正向逐渐上升，即函数在其定义域 $(0,+\infty)$ 内是单调增函数.

用类似的方法可以作出对数函数 $y=\log_a x$ 在 $a>1$ 时的图像（图 2-11），可归纳出它具有如下性质：

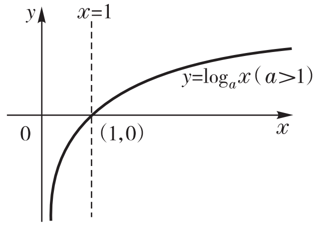


图 2-11

（1）$y=\log_a x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，值域为 $(-\infty,+\infty)$.

（2）图像过定点 $(1,0)$，即当 $x=1$ 时，$y=0$.

（3）$y=\log_a x$ 在定义域 $(0,+\infty)$ 内是单调增函数.

例 1 比较下列各组中两个值的大小：

（1）$\log_2 3$ 和 $\log_2 5$； （2）$\log_2 \dfrac{1}{3}$ 和 $\log_2 \dfrac{1}{5}$.

解 （1）$\log_2 3$ 和 $\log_2 5$ 可以看作对数函数 $y=\log_2 x$ 在 $x=3$ 和 $x=5$ 时所对应的两个函数值，因为 $a=2>1$，$3,5\in(0,+\infty)$ 且 $3<5$，由对数函数 $y=\log_a x$ $(a>1)$ 在定义域 $(0,+\infty)$ 内是单调增函数可知

$$\log_2 3<\log_2 5;$$

（2）$\log_2 \dfrac{1}{3}$ 和 $\log_2 \dfrac{1}{5}$ 可以看作对数函数 $y=\log_2 x$ 在 $x=\dfrac{1}{3}$ 和 $x=\dfrac{1}{5}$ 时所对应的两个函数值，因为 $a=2>1$，$\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{5}\in(0,+\infty)$ 且 $\dfrac{1}{3}>\dfrac{1}{5}$，由对数函数 $y=\log_a x$ $(a>1)$ 在定义域 $(0,+\infty)$ 内是单调增函数可知

$$\log_2 \frac{1}{3}>\log_2 \frac{1}{5}.$$

2. 当 $0<a<1$ 时的情形

先讨论对数函数 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 的图像和性质.

利用描点作图法，可以作出函数 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 的图像，如图 2-12 所示.

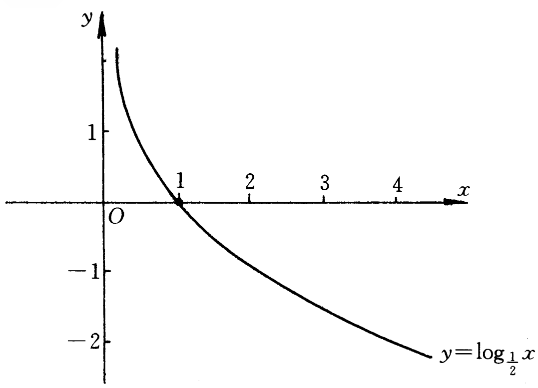


图 2-12

由图 2-12 可以看出，这个对数函数的图像具有下列特征：

(1) 图像在 y 轴右方，即函数的定义域是 $(0,+\infty)$.

(2) 图像过点 $(1,0)$.

(3) 图像沿 x 轴正向逐渐下降，即函数在其定义域 $(0,+\infty)$ 内是单调减函数.

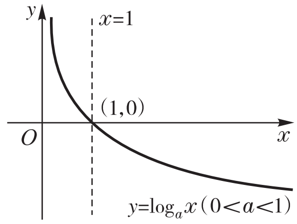


图 2-13

用类似的方法可以作出对数函数 $y=\log_a x$ 在 $0<a<1$时的图像(图 2-13)，可归纳出它具有如下性质：

(1) $y=\log_a x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，值域为 $(-\infty,+\infty)$.

(2) 图像过定点 $(1,0)$，即当 $x=1$ 时，$y=0$.

(3) $y=\log_a x$ 在定义域 $(0,+\infty)$ 内是单调减函数.

例 2　比较下列各组中两个值的大小：

(1) $\log_{\frac{1}{2}}3$ 和 $\log_{\frac{1}{2}}5$；　　(2) $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}$ 和 $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{5}$.

解　(1) $\log_{\frac{1}{2}}3$ 和 $\log_{\frac{1}{2}}5$ 可以看作对数函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ 在 $x=3$ 和 $x=5$ 时所对应的两个函数值，因为 $a=\frac{1}{2}$，$0<a<1$，$3,5\in(0,+\infty)$ 且 $3<5$，由对数函数 $y=\log_a x$ $(0<a<1)$ 在定义域 $(0,+\infty)$ 内是单调减函数可知

$$\log_{\frac{1}{2}}3>\log_{\frac{1}{2}}5.$$

(2) $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}$ 和 $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{5}$ 可以看作对数函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ 在 $x=\frac{1}{3}$ 和 $x=\frac{1}{5}$ 时所对应的两个函数值，因为 $a=\frac{1}{2}$，$0<a<1$，$\frac{1}{3},\frac{1}{5}\in(0,+\infty)$ 且 $\frac{1}{3}>\frac{1}{5}$，由对数函数 $y=\log_a x$ $(0<a<1)$ 在定义域 $(0,+\infty)$ 内是单调减函数可知

$$\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}<\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{5}.$$

例 3　求下列函数的定义域：

(1) $y=\log_a\frac{1}{2x-1}$；　　(2) $y=\sqrt{\lg x}$；

(3) $y=\frac{1}{\log_2 x}$；　　(4) $y=\frac{1}{\sqrt{\log_7(1-3x)}}$.

解　(1) 要使 $y=\log_a\frac{1}{2x-1}$ 有意义，必须满足

$$2x-1>0 \quad 即 \quad x>\frac{1}{2},$$

所以函数 $y=\log_a\frac{1}{2x-1}$ 的定义域为 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$.

（2）要使 $y=\sqrt{\lg x}$有意义，必须满足

$$\begin{cases}x>0,\\ \lg x\geqslant 0,\end{cases}\quad 即 \quad \begin{cases}x>0,\\ x\geqslant 1,\end{cases}$$

所以函数 $y=\sqrt{\lg x}$的定义域为$[1,+\infty)$.

（3）要使 $y=\dfrac{1}{\log_2 x}$有意义，必须满足

$$\begin{cases}x>0,\\ \log_2 x\neq 0,\end{cases}\quad 即 \quad \begin{cases}x>0,\\ x\neq 1,\end{cases}$$

所以函数 $y=\dfrac{1}{\log_2 x}$的定义域为$(0,1)\cup(1,+\infty)$.

（4）要使 $y=\dfrac{1}{\sqrt{\log_7(1-3x)}}$有意义，必须满足

$$\begin{cases}1-3x>0,\\ \log_7(1-3x)>0,\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}x<\dfrac{1}{3},\\ 1-3x>1,\end{cases}\quad 即 \begin{cases}x<\dfrac{1}{3},\\ x<0,\end{cases}$$

所以函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{\log_7(1-3x)}}$的定义域为$(-\infty,0)$.

例 4 设函数 $y_1=\log_3(x^2-2x-15)$，$y_2=\log_3(x+3)$，求使 $y_1>y_2$ 的 x 的值.

解 要使 $y_1>y_2$，必须有

$$\begin{cases}x+3>0,\\ x^2-2x-15>x+3,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}x>-3,\\ (x+3)(x-6)>0,\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}x>-3,\\ x>6 \text{ 或 } x<-3,\end{cases}$$

所以 $x>6$. 也就是说，使 $y_1>y_2$ 的 x 的值的集合为$\{x\mid x>6\}$.

例 5 将 20000 元存入银行，定期一年，年利率为 1.65%，到年终时将利息纳入本金，年年如此. 试建立本利和 y 与存款年数 x 之间的函数关系. 存款几年，本利和能达到 21000 元？

解　由题意,可建立函数关系

$$y=20000(1+1.65\%)^{x},$$

即

$$y=20000\times1.0165^{x}.$$

当 $y=21000$ 时,有

$$21000=20000\ (1+1.65\%)^{x},$$

即

$$1.165^{x}=1.05,$$

$$x=\log_{1.0165}1.05\approx2.9813\approx3.$$

答:存款约 3 年,本利和可达 21000 元.

习题 2-5(A 组)

1. 比较下列各组中两个值的大小:

(1) $\lg 6$ 和 $\lg 8$;　　(2) $\log_{\frac{1}{2}}\frac{2}{3}$和 $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}$;

(3) $\ln 2$ 和 $\ln\frac{4}{5}$;　　(4) $\log_{2}2$ 和 $\log_{3}3$.

2. 求下列函数的定义域:

(1) $y=\log_{3}(2-3x)$;　　(2) $y=\log_{3}x^{2}$;

(3) $y=\sqrt{\log_{3}x}$;　　(4) $y=\log_{7}\frac{1}{1-3x}$.

3. 设 $y_1=\lg(2x+1)$, $y_2=\lg(3-x)$,求使 $y_1>y_2$ 的 x 的值.

4. 某厂今年的产值是 5000 万元,以后每年增产 12%,问大约几年后产值可达到 7800 万元?

习题 2-5(B 组)

1. 比较下列各组中两个值的大小:

(1) $\log_{\frac{1}{2}}1$ 和 $\log_{2}3$;　　(2) $\log_{8}9$ 和 $\log_{9}8$;

(3) $\log_{2}\frac{2}{3}$和 $\log_{4}\frac{3}{2}$;　　(4) $\log_{\frac{1}{3}}5$ 和 $\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{3}$.

2. 求下列函数的定义域:

(1) $y=\ln(x^{2}-1)$;　　(2) $y=\log_{\frac{1}{3}}\frac{1-x}{1+x}$;

(3) $y=\frac{1}{\sqrt{\lg(1-3x)}}$;　　(4) $y=\sqrt{\log_{4}x-1}$.

3. 设函数 $y_1=\ln(x^2+3)$，$y_2=\ln(2x^2-1)$，求使 $y_1<y_2$ 的 x 的值.

4. 设函数 $y_1=\log_{\frac{1}{3}}(3x-4)$ 和 $y_2=\log_{\frac{1}{3}}(x^2-x-4)$，求使 $y_1>y_2$ 的 x 的值.

5. 某企业原来每月营业额为 1 万元，由于改变经营方法，营业额平均每月增长 16%，试建立营业额 y（万元）与时间 x（月）之间的函数关系. 几个月后该企业的月营业额能达到 3 万元？

扫一扫，获取参考答案

复习题 2

扫一扫，复习本章内容

1. 填空题.

（1）函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}+\dfrac{1}{x}$ 的定义域为__________.

（2）已知 $f(x)=\begin{cases} x, & x\in(1,+\infty), \\ x^2, & x\in[-1,1], \\ 2x+3, & x\in(-\infty,-1), \end{cases}$

则 $f(3)=$________，$f(-1)=$________，$f[f(-2)]=$________.

（3）$(3a^2b)(-2a^{-2}b^{-1})(-5a^4b^{-2})^3=$__________.

（4）$\log_a 0.25+2\log_a 2=$__________（$a>0$ 且 $a\neq 1$）.

（5）$3^{\log_3 \frac{1}{4}}-2^{\log_3 \frac{1}{9}}=$__________.

（6）如果 $5^x=3$，$\log_5 \dfrac{5}{3}=y$，那么 $x+y=$__________.

（7）函数 $y=\log_2 \dfrac{x}{3}-1$ 的反函数是__________.

（8）已知 $f(x+1)=x(x-1)$，则 $f(x)=$__________.

（9）设 $f(2x)=4x-1$ 且 $f(a)=5$，则 $a=$__________.

2. 选择题.

（1）下列各组函数中为相同函数的是（　　）.

A. $y=x$ 与 $y=(\sqrt{x})^2$　　B. $y=x$ 与 $y=\sqrt[3]{x^3}$

C. $y=\dfrac{x}{x}$ 与 $y=1$　　D. $y=|x|$ 与 $y=(\sqrt{x})^2$

（2）与函数 $y=2x^3-1$ 互为反函数的函数是（　　）.

A. $y=\dfrac{x^3}{2}+1$　　B. $y=\dfrac{x^3}{2}-1$

C. $y=\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{2}}$　　D. $y=\dfrac{\sqrt[3]{x}+1}{2}$

(3) 函数 $y=x^{\frac{1}{4}}+x^{-\frac{5}{3}}$ 的定义域是( ).

A. $(0,+\infty)$ B. $(-\infty,0)$

C. $[0,+\infty)$ D. $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

(4) 设 $x>0,y>0$,则下列各式中正确的是( ).

A. $\log_a x\cdot\log_a y=\log_a(x\cdot y)$ B. $\log_a x^2\cdot y=2\log_a(xy)$

C. $\frac{1}{2}\log_a x=\log_a\sqrt{x}$ D. $\log_a x-\log_a y=\log_a(x-y)$

(5) 在区间$(-\infty,+\infty)$内是减函数且为奇函数的函数是( ).

A. $f(x)=x^2$ B. $f(x)=\frac{1}{x}$

C. $f(x)=-x^3$ D. $f(x)=-x-1$

3. 求下列函数的定义域:

(1) $y=\sqrt{4x+3}$; (2) $y=\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}$; (3) $y=\frac{1}{\sqrt{x^2-2x-3}}$;

(4) $y=8^{\frac{1}{2x+1}}$; (5) $y=\sqrt{1-\frac{1}{2^x}}$; (6) $y=\log_a(-x)^2$;

(7) $y=\log_a\frac{x+2}{x-1}$; (8) $y=\sqrt{\log_2(2x-1)}$.

4. 判断下列函数的奇偶性:

(1) $f(x)=\frac{1+x^2}{1-x^2}$; (2) $f(x)=\frac{x^3}{1+x^2}$;

(3) $f(x)=\frac{10^x+10^{-x}}{2}$; (4) $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}}{x}$.

5. 判断下列函数在指定区间的单调性:

(1) $f(x)=-2x-1$, $x\in(-\infty,+\infty)$;

(2) $f(x)=-x^2+1$, $x\in(0,+\infty)$;

(3) $f(x)=\frac{1}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$;

(4) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$, $x\in(1,+\infty)$.

6. 求函数 $y=2x+1$ 的反函数,并在同一坐标系内作出它们的图像.

7. 设 $f(x)$为奇函数且 $f(1)=2$,$g(x)=f(x)+4$,求 $g(-1)$.

8. 解下列不等式:

(1) $\log_2(2x^2+1)>\log_2(x^2+2)$; (2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-5}<\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}$.

9. 用计算器求下列各式的值(精确到 0.0001)：

（1）$3.74^{\frac{1}{4}}\cdot e^{0.24}$；　　（2）$\log_2 5$.

10. 某机床厂原来每月生产小型钻床 250 台，如果从本月开始，每个月的生产率比上个月平均提高 10%，3 个月后可以使月产量增加到多少台？

扫一扫，获取参考答案

11. 某台机器的价值是 50 万元，若每年的折旧率为 5%，使用多少年后，机器的价值降至 45 万元？

［**阅读材料 2**］

函数的发展简史

一、函数概念的萌芽

在 16 世纪之前，数学中占统治地位的是常量数学，其特点是用孤立、静止的观点去研究事物. 具体的函数在数学中比比皆是，但没有一般的函数概念. 16 世纪，随着欧洲过渡到新的资本主义生产方式，人们迫切需要掌握天文知识和力学原理. 当时，自然科学研究的中心转向对运动、对各种变化过程和变化着的量之间依赖关系的研究. 数学研究也从常量数学转向了变量数学. 数学的这个转折主要是由法国数学家笛卡尔完成的，他在《几何学》一文中首先引入变量思想，称其为“未知和未定的量”，同时引入两个变量之间的相依关系. 这便是函数概念的萌芽.

二、早期函数的概念——几何观念下的函数

17 世纪，伽利略在《关于两门新科学的对谈》一书中用文字和比例的语言表达函数的关系. 1637 年前后，笛卡尔已经注意到一个变量对于另一个变量的依赖关系，但当时尚未意识到需要提炼一般的函数概念. 牛顿提出的“生成量”是函数概念的雏形. 莱布尼茨首先使用了“函数”这一术语. 因此，直到 17 世纪后期，牛顿、莱布尼茨建立微积分时，数学家还没有明确函数的一般意义，绝大部分函数是被当作曲线来研究的.

三、18 世纪函数的概念——代数观念下的函数

18 世纪初，伯努利最先摆脱具体的初等函数的束缚，给函数一个抽象的不

用几何形式的定义：一个变量的函数是指由这个变量和常量以任何一种方式构成的一个量. 欧拉则更明确地指出，一个变量的函数是该变量和常数以任何一种方式构成的解析表达式. 函数之间的原则区别在于构成函数的变量与常量的组合方式. 欧拉最先把函数的概念写进教科书. 在伯努利和欧拉看来，具有解析表达式是函数概念的关键所在. 1734 年，欧拉用 $f(x)$表示变量 x 的函数，其中的“f”取自“function”.

四、19 世纪函数的概念——对应关系下的函数

1822 年，傅里叶发现某些函数可以表示成三角级数，使函数的概念得以改进，发现某些函数可用曲线表示，也可用一个解析式表示，或用多个解析式表示，从而结束了函数概念是否以唯一一个解析式表示的争论，使对函数的认识又上升到一个新的层次.

1823 年，柯西从定义变量开始给出了函数的定义，同时指出虽然无穷级数是规定函数的一种有效方法，但是函数不一定要有解析式，不过他仍然认为函数关系可以用多个解析式来表示. 这是一个很大的局限，突破这一局限的是杰出数学家狄利克雷.

19 世纪初，函数概念再次得到了扩展，开始摆脱“解析表达式”. 1837 年，狄利克雷更提出了如下概念：对于在某区间上的每一个确定的 x 值，y 都有一个或多个确定的值，那么 y 叫作 x 的函数. 狄利克雷对函数的定义出色地避免了以往函数定义中所有的关于依赖关系的描述，使函数概念更加抽象、更加一般化.

等到康托尔创立的集合论在数学中占有重要地位之后，维布伦用“集合”和“对应”的概念给出了近代函数的定义，将函数的对应关系、定义域及值域进一步具体化，打破了“变量是数”的局限：变量可以是数，也可以是其他对象，如点、线、面、体、向量和矩阵等.

五、现代函数的概念——集合论下的函数

1914 年，豪斯多夫在《集合论基础》中用“序偶”来定义函数，避开了意义不明确的“变量”和“对应”的概念. 库拉托夫斯基于 1921 年用集合概念来定义“序偶”，这样就使豪斯多夫的定义更加严谨.

1930 年，新的函数定义为，若对集合 M 的任意元素 x，总有集合 N 确定的元素 y 与之对应，则称在集合 M 上定义一个函数，记为 $y=f(x)$，元素 x 称为自变元，元素 y 称为因变元.

20世纪以来，函数的概念不断扩充（函数不仅是变数，还可以是其他变化着的事物），还出现了所谓广义函数以及函数的函数等概念，但大体上可被布尔巴基的函数概念覆盖．以研究函数为己任的分析学已成为数学的三大基本分支之一，几何、代数、分析呈三足鼎立的局面．在分析学中，函数论占有重要地位，可划分为实函数论与复函数论两大部分，学科划分越来越细．

函数概念的发展过程，就是一个函数内涵不断被挖掘、丰富和精确刻画的历史过程．由此可知，数学概念是人们在对客观世界深入了解过程中得到，并不断加以发展的，并非生来就有、一成不变．

第2章单元自测

1. 填空题．

（1）函数 $y=\sqrt{1-x}+\lg(x+1)$ 的定义域是________．

（2）已知函数 $f(x-1)=x^2-6x+5$，则函数 $f(x)=$________．

（3）函数 $y=\dfrac{x-1}{x+1}$ 的反函数是________．

（4）函数 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ 是______函数．（填“奇”或“偶”）

（5）设 a,b,c 都是不等于1的正数，且 $\log_a x=2$，$\log_b x=3$，$\log_c x=6$，则 $\log_{abc}x=$______．

（6）若 $x>y$，且 $0<a<1$，则 a^x ______ a^y．（填“$>$”或“$<$”或“$=$”）

（7）比较下列各式的大小：

① $2.2^{-\frac{3}{2}}$______$2.1^{-\frac{3}{2}}$；　　② $3^{-0.1}$______$3^{-1.1}$；

③ $\log_2 3$ ______ $\log_3 2$；　　④ $\log_{\frac{1}{5}}0.1$______$\log_{\frac{1}{4}}3$．

（8）$(0.9)^{1.1}$，$(1.1)^{0.9}$，$\log_{0.9}1.1$ 按大小排序为________．

（9）已知 $\lg(xy)=m$，$\lg x=1$，则 $\lg y=$________．

（10）函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x-1)$ 的单调减少区间是________．

2. 选择题．

（1）下列各组函数中为同一函数的是（　　）．

A. $f(x)=\dfrac{x^2}{x}$ 和 $g(x)=x$　　B. $f(x)=x$ 和 $g(x)=\sqrt{x^2}$

C. $f(x)=|x|$ 和 $g(x)=\sqrt{x^2}$　　D. $f(x)=\lg x^2$ 和 $g(x)=2\lg x$

（2）若函数 $y=f(x)$ 的图像关于原点对称，则它必满足关系式（　　）．

A. $f(x)\cdot f(-x)=0$　　B. $f(x)+f(-x)=0$

C. $f(x)+f^{-1}(x)=0$　　D. $f(x)-f^{-1}(x)=0$

(3) 下列各函数中是奇函数的为(　　).

A. $y=x+3$　　　　B. $y=-2x^2$

C. $y=x+\dfrac{1}{x}$　　　　D. $y=|x|$

(4) 当 $a>1$ 时,函数 $y=a^{-x}$(　　).

A. 是单调增函数　　　　B. 是单调减函数

C. 不是单调增函数也不是单调减函数　　　　D. 既是单调增函数又是偶函数

(5) 设 x,y 是非零实数,$a>0$ 且 $a\neq1$,则下列各式中必定成立的是(　　).

A. $\log_a x^2=2\log_a x$　　　　B. $\log_a x^2=2\log_a|x|$

C. $\log_a|xy|=\log_a|x|\cdot\log_a|y|$　　　　D. $\log_a 3>\log_a 2$

(6) 设 $y=\ln x$,则下列选项中错误的是(　　).

A. $x=1$,则 $y=0$　　　　B. $x>1$,则 $y>0$

C. $0<x<\mathrm{e}$,则 $0<y<1$　　　　D. $x=\mathrm{e}$,则 $y=1$

(7) 函数 $y=\lg\dfrac{\sqrt{1-x}+1}{x}$的定义域是(　　).

A. $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$　　　　B. $(0,+\infty)$

C. $(0,1)$　　　　D. $(0,1]$

(8) 若 $0<\log_a\dfrac{2}{3}<1$,则 a 的取值范围是(　　).

A. $0<a<\dfrac{2}{3}$　　　　B. $a>\dfrac{2}{3}$

C. $\dfrac{2}{3}<a<1$　　　　D. $0<a<\dfrac{2}{3}$ 或 $a>1$

3. 已知函数 $f(x)=\lg\dfrac{1+x}{1-x}$,求 $f(x)$的定义域并判断它的奇偶性.

4. 求下列函数的定义域:

(1) $y=\sqrt{\log_2(x^2-3)}$;　　(2) $y=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2x-1}}$.

5. 解不等式:

(1) $2^{2x^2+1}<2^{x^2+2}$;　　(2) $\log_{\frac{1}{2}}(3x-4)>\log_{\frac{1}{2}}(2-x)$.

6. 已知 $\log_{18}9=a$,$18^b=5$,求证:$\log_{36}5=\dfrac{b}{2-a}$.

7. 某林场估计现有木材 10000 m^3,若木材每年平均增长率是 20%,增长至 17000 m^3 需要多少年?

扫一扫，获取参考答案