语文（第1册）（第4版）
语文练习册（第1册）
语文（第2册）（第4版）
语文练习册（第2册）

数学（第1册）（第5版）
数学（第2册）（第5版）

英语（第1册）（第4版）
英语（第2册）（第4版）

物理（第4版）
化学（第4版）

计算机应用基础

新编五年制高等职业教育教材
XINBIAN WUNIANZHI GAODENGZHIYEJIAOYUJIAOCAI

ISBN 978-7-5664-2357-3
9 787566 423573
定价：40.00元

数学（第2册）（第5版）
洪晓峰 张 伟◎主编
北京师范大学出版集团 安徽大学出版社

"十四五"职业教育国家规划教材
新编五年制高等职业教育教材

数学

（第5版）

（第2册）

SHUXUE

洪晓峰 张 伟◎主编

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
安徽大学出版社

"十四五"职业教育国家规划教材

新编五年制高等职业教育教材

数学

（第5版）

（第2册）

SHUXUE

主　编　洪晓峰　张　伟
副主编　葛文军　周文龙　吴邦昆
　　　　江万满　孟红军
编　委（按姓氏笔画排序）
　　　　王　力　朱兴伟　仲继东
　　　　江万满　苏立本　李兰兰
　　　　吴邦昆　张　伟　陈　傑
　　　　周文龙　孟红军　洪晓峰
　　　　葛文军

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
安徽大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学.第 2 册/洪晓峰,张伟主编.—5 版.—合肥:安徽大学出版社,2021.12
新编五年制高等职业教育教材
ISBN 978-7-5664-2357-3

Ⅰ.①数… Ⅱ.①洪…②张… Ⅲ.①高等数学—高等职业教育—教材
Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2022)第 001287 号

数 学(第 2 册)(第 5 版) **洪晓峰 张 伟 主编**

出版发行: 北京师范大学出版集团
安 徽 大 学 出 版 社
(安徽省合肥市肥西路 3 号 邮编 230039)
www.bnupg.com
www.ahupress.com.cn

印 刷: 安徽昶颉包装印务有限责任公司
经 销: 全国新华书店
开 本: 787 mm×1092 mm 1/16
印 张: 15.5
字 数: 306 千字
版 次: 2021 年 12 月第 5 版
印 次: 2021 年 12 月第 1 次印刷
定 价: 40.00 元
ISBN 978-7-5664-2357-3

策划编辑: 刘中飞 陈玉婷 武溪溪
责任编辑: 刘中飞 武溪溪
责任校对: 陈玉婷
装帧设计: 李 军
美术编辑: 李 军
责任印制: 赵明炎

编写说明

五年制高等职业教育《数学》教材自 2001 年(第 1 版)出版发行以来,得到了各级领导和专家以及教材使用学校的师生的肯定和支持.根据教学的实际情况和要求,我们于 2007 年对教材进行了修订.2011 年我们在充分听取各方意见和广泛吸取同类、同层次教材的长处的基础上,再次对这套教材进行修订,修订后的第 3 版教材共分 2 册.第 1 册以初等数学为主,第 2 册以二次曲线、极坐标与参数方程、数列与数学归纳法、排列、组合、二项式定理以及一元函数微积分为主.特别要说明的是第 3 版教材的修订,教材结构变动较大,教材的质量得到进一步提高.在此衷心感谢为第 3 版教材的修订工作付出辛勤劳动的安徽机电职业技术学院夏国斌(第 3 版主编),安徽电气工程学校徐小伍,合肥铁路工程学校洪晓峰、葛文军,安徽化工学校周文龙、汪敏,安徽理工学校董安明,海军安庆市职业技术学校孙科,安徽省汽车工业学校章斌、徐黎,安徽省第一轻工业学校张永胜,安徽经济技术学院赵家成等老师.当然,我们也更不会忘记为本套教材(第 1 版)的出版作出重要贡献的夏国斌、韩业岚、李立众、姜绳、梁继会、刘传宝、吴方庭、辛颖、程伟、高山、吴照春、王芳玉、刘莲娣、杨兴慎、陈红、潘晓安等老师.

随着职业教育的不断发展,根据五年制高职数学教学的实际需要,我们于 2018 年对教材进行了修订,修订后的第 4 版教材(仍为 2 册)于 2020 年成功入选"十三五"职业教育国家规划教材.

由于国家"十四五"规划和党的二十大对职业教育提出了新的要求,为了让本套教材更贴近新形势下五年制高职教学的实际,推进职普融通、产教融合、科教融汇,优化职业教育类型定位,我们在保持第 4 版结构和特色的基础上,继续对教材进行修订.本次修订依据中等职业学校数学课程标准,对初等数学部分内容进行增减和调整,增加概率初步的部分内容及统计初步知识,删减反三角函数部分内容;在高等数学部分,删除了微分方程的内容.除此之外,我们对教材中部分阅读材料进行了调整和更新.修订后的第 5 版仍为 2 册.

第1册内容包括集合、充要条件、不等式，函数，任意角的三角函数，加法定理、正弦型曲线、解斜三角形，概率初步，统计初步，立体几何，直线和圆的方程等. 第2册内容包括圆锥曲线、坐标转换与参数方程、平面向量与复数、数列、极限与连续、导数与微分、导数的应用、积分及其应用等. 修订后的第5版全套教材主要体现以下特色：

1. 简明易学，使用方便. 教材在内容的组织与编排方面，由浅入深、由易到难、由具体到抽象，适应学生的年龄特点和认知水平，力求紧密结合实际，使教材更具弹性，更趋完善，能够适应更多专业的需要. 在练习的安排上，采取多梯度安排练习题的方式，教材每节内容后均配有A（基础题）、B（提高题）两套课外习题，每章后还配有复习题和单元自测题，可供学生进行单元复习和自我检测. 另外，本套教材中所有的习题、复习题及自测题都提供了参考答案，使用者可通过扫描二维码查阅.

2. 紧密结合实际. 注重从生活中的实际问题引入数学概念，利用数学知识解决实际问题.

3. 体现时代特征. 一方面，强调对计算器的使用，将相关知识点与计算器的使用相结合；另一方面，将一些教学内容与常用计算机软件有机结合起来，利用软件的强大功能，方便教师的教学，增强学生对数学的理解，提高教学效率.

4. 拓宽视野. 每章后附有阅读材料，内容涉及数学史及相关知识应用案例.

本套教材主要适用于五年制高等职业教育数学课程，同时也可以作为中等职业教育数学课程学习的辅助用书. 本书是这套教材的第2册，由合肥铁路工程学校洪晓峰、皖北卫生职业学院张伟担任主编，参加本次教材修订的人员还有合肥铁路工程学校李兰兰和王力等老师. 洪晓峰、李兰兰和王力三位老师为本册教材制作了教学辅助课件.

在教材的编写、修订过程中，我们得到了安徽省教育厅有关部门、各有关学校及安徽大学出版社的大力支持和帮助，在此一并表示衷心的感谢！

限于编者的学识和水平，教材中出现的错误、疏漏和不完善之处在所难免，敬请使用本教材的师生和同行予以指正.

编　者

2021年10月

目 录

第 9 章 圆锥曲线

第 10 章 *坐标转换与参数方程

第 11 章 平面向量 复数

第 12 章

数列

第 13 章

极限与连续

第 14 章

导数与微分

第 15 章

导数的应用

第 16 章

积分及其应用

第 9 章

圆锥曲线

在生产实际和科学研究中，我们经常会遇到各种形状的曲线. 例如，油罐车上油罐的横截面是椭圆，某些通风塔的通风筒的剖面是双曲线，物体平抛时运行的轨迹是抛物线等. 这些曲线都可以由一平面截二次锥面而得到，因而也叫作圆锥曲线. 本章将讨论椭圆（圆为椭圆的特例）、双曲线、抛物线等圆锥曲线（也称二次曲线）的定义、方程、图像和性质.

9.1 椭　　圆

一、椭圆定义和标准方程

1. 椭圆的定义

如图 9-1 所示，在平板上固定两个图钉 F_1 和 F_2，把一个没有伸缩性且绳长大于 F_1 和 F_2 距离的线的两端固定在图钉上，并且用笔尖拉紧线移动一周，则笔尖画出的曲线就是一个椭圆.

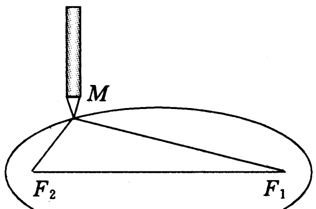


图 9-1

从上面画图过程可知，笔尖（即动点）在移动时，它到两个图钉（即定点）F_1 及 F_2 的距离之和始终保持不变.

定义　平面上与两定点 F_1，F_2 的距离之和（大于 $|F_1F_2|$）为常数的点的轨迹称为**椭圆**. 两定点 F_1 和 F_2 称为**椭圆的焦点**. 两焦点之间的距离 $|F_1F_2|$ 称为**椭圆的焦距**，用 $2c$ 表示；c 称为**半焦距**.

2. 椭圆的标准方程

以过两焦点 F_1，F_2 的直线作为 x 轴，线段 F_1F_2 的中点 O 为坐标原点，建立直角坐标系，如图 9-2 所示.

设 $M(x,y)$是椭圆上任意一点，椭圆的焦距为 $2c$ $(c>0)$，M 与 F_1 及 F_2 的距离之和为 $2a$ $(a>c>0)$，那么焦点 F_1 的坐标为$(-c,0)$，F_2 的坐标为$(c,0)$.

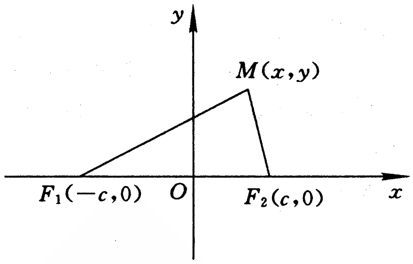


图 9-2

由椭圆的定义，得

$$|MF_1|+|MF_2|=2a.$$

根据两点间距离公式得

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a.$$

化简整理得

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2).$$

由椭圆的定义知，$2a>2c>0$，$a>c>0$，$a^2-c^2>0$. 设 $a^2-c^2=b^2(b>0)$，得

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2.$$

两边同除以 a^2b^2，得

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b>0)} \qquad (9\text{-}1)$$

方程(9-1)称为**椭圆的标准方程**，它所表示的椭圆焦点在 x 轴上. 其中，$a^2=b^2+c^2$.

如果椭圆的焦点在 y 轴上，则焦点坐标是 $F_1(0,-c)$，$F_2(0,c)$，如图9-3所示，设$M(x,y)$是椭圆上任意一点，由椭圆的定义，得

$$|MF_1|+|MF_2|=2a.$$

由此可得

$$\boxed{\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \quad (a>b>0)} \qquad (9\text{-}2)$$

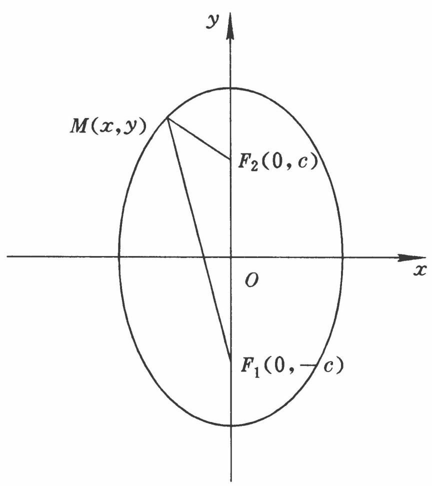


图 9-3

它也是**椭圆的标准方程**.

其中，a，b，c 之间的关系仍然是 $a^2=b^2+c^2$. 方程(9-1)与(9-2)的区别是前者的焦点在 x 轴上，后者的焦点在 y 轴上.

例 1 设椭圆的焦点为 $F_1(4,0)$，$F_2(-4,0)$，$2a=10$，求椭圆的标准方程.

解　由题意,设所求椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,由已知条件知 $c=4$,$a=5$,于是

$$b^2=a^2-c^2=25-16=9.$$

即所求椭圆的标准方程为

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1.$$

例 2　设椭圆的焦点为 $F_1(0,4)$,$F_2(0,-4)$且 $b=3$,求椭圆的标准方程.

解　由题意,设所求椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$,由已知条件知

$$c=4,\ b=3.$$

于是

$$a^2=b^2+c^2=16+9=25.$$

即所求椭圆的标准方程为

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1.$$

二、椭圆的形状、画法和离心率

下面以椭圆的标准方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 为例,讨论其形状、画法和离心率.

1. 范围

由椭圆的标准方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 得

$$\frac{x^2}{a^2}\leqslant 1,\quad \frac{y^2}{b^2}\leqslant 1,$$

即 $$x^2\leqslant a^2,\quad y^2\leqslant b^2.$$

所以 $$|x|\leqslant a,\quad |y|\leqslant b.$$

这说明此椭圆位于直线 $x=a$,$x=-a$,$y=b$ 和 $y=-b$ 所围成的矩形方框内,如图 9-4 所示.

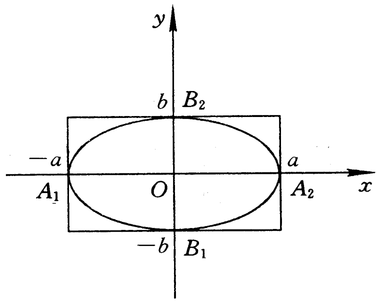


图 9-4

2. 对称性

在椭圆的标准方程中,以$-y$ 代替 y,$-x$ 代替 x,或同时以$-x$,$-y$ 代替 x,y,方程都不变,故椭圆的图像关于 x 轴,y 轴和原点都对称. 这时,坐标轴是椭圆的**对称轴**,原点是椭圆的**对称中心**.

以上讨论也适用于一般曲线，现列表 9-1 如下：

表 9-1

条　　件	曲线的对称性
以 $-y$ 代替 y，方程不变	曲线关于 x 轴对称
以 $-x$ 代替 x，方程不变	曲线关于 y 轴对称
以 $-x$ 代替 x，同时以 $-y$ 代替 y，方程不变	曲线关于原点对称

3. 顶点

在标准方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 中，令 $x=0$，则 $y=\pm b$，令 $y=0$，则 $x=\pm a$，所以椭圆与 x 轴的交点坐标是 $A_1(-a,0)$，$A_2(a,0)$，与 y 轴的交点坐标是 $B_1(0,-b)$，$B_2(0,b)$. 四点 A_1，A_2，B_1，B_2 称为**椭圆的顶点**. 线段 A_1A_2，B_1B_2 分别称为**椭圆的长轴和短轴**（如图 9-4 所示），其长度分别为 $2a$ 和 $2b$. a 和 b 分别称为**椭圆的长半轴长和短半轴长**.

4. 离心率

如图 9-5 所示，$\frac{b}{a}$ 的值越接近于 0，椭圆就越扁平；$\frac{b}{a}$ 的值越接近于 1，椭圆就越接于圆. 因为

$$\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a}=\sqrt{\frac{a^2-c^2}{a^2}}=\sqrt{1-\left(\frac{c}{a}\right)^2},$$

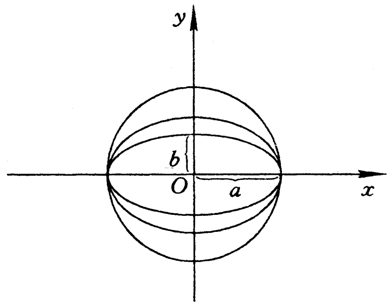


图 9-5

所以 $\frac{c}{a}$ 的值越接近于 1，椭圆就越扁平；$\frac{c}{a}$ 的值越接近于 0，椭圆就越接近于圆. 可见，$\frac{c}{a}$ 的值可刻画出椭圆的扁平程度，由此我们给出下面的定义.

定义　椭圆的焦距与长轴长之比，称为**椭圆的离心率**，通常用 e 表示，即

$$e=\frac{2c}{2a}=\frac{c}{a}.$$

因为 $0<c<a$，$0<e<1$，故椭圆的离心率是小于 1 的正数.

特别地，当 $a=b$ 时，椭圆的方程变成圆的方程.

例 3　求椭圆 $16x^2+25y^2=400$ 的长轴和短轴的长、顶点和焦点的坐标及离心率.

解　将已知方程两边同除以 400,得

$$\frac{16x^2}{400}+\frac{25y^2}{400}=1.$$

化为标准方程,得

$$\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{4^2}=1.$$

对照标准方程知 $a=5$,$b=4$,$c=\sqrt{a^2-b^2}=3$.

所以长半轴的长 $a=5$,短半轴的长 $b=4$,长轴的长 $2a=10$,短轴的长 $2b=8$,焦距 $2c=6$,半焦距 $c=3$,顶点坐标为 $A_1(-5,0)$,$A_2(5,0)$,$B_1(0,-4)$,$B_2(0,4)$,焦点坐标为 $F_1(-3,0)$,$F_2(3,0)$,离心率 $e=\frac{c}{a}=0.6$.

5. 椭圆的画法

椭圆的画法一般有以下步骤:

(1) 将方程化为标准方程,如 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$;

(2) 作出由直线 $x=a$,$x=-a$,及 $y=b$,$y=-b$ 所围成的矩形;

(3) 根据关系式 $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$,给出满足 $0\leqslant x\leqslant a$ 的 x 的几个值,算出对应的 y 值,用描点法作出椭圆在第一象限内的图形;

(4) 利用椭圆的对称性画出整个椭圆.

例 4　画出椭圆 $x^2+4y^2=9$ 的图像.

解　椭圆的标准方程为

$$\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}=1.$$

作出由直线 $x=3$,$x=-3$,$y=\frac{3}{2}$,$y=-\frac{3}{2}$ 围成的矩形.

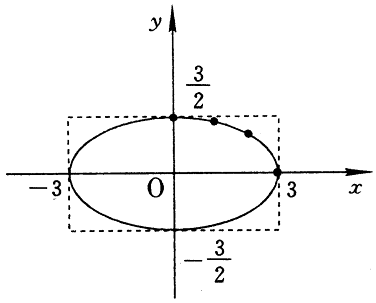


图 9-6

由方程 $x^2+4y^2=9$ 解得

$$y=\pm\frac{1}{2}\sqrt{9-x^2}.$$

根据关系式 $y=\frac{1}{2}\sqrt{9-x^2}$,算出 x $(0\leqslant x\leqslant 3)$和 y 的几组对应值,列表如下:

x	0	1	2	3
y	1.5	1.4	1.1	0

先用描点法画出椭圆在第一象限内的图形，再利用对称性画出整个椭圆，如图 9-6 所示.

例 5 设椭圆的焦距与长半轴之差为 2，离心率为$\dfrac{3}{5}$，焦点在 x 轴上，求椭圆的标准方程.

解 由已知条件，有

$$\begin{cases} 2c-a=2, \\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{3}{5}. \end{cases}$$

解这个方程组，得

$$a=10, \qquad c=6,$$

又由 $b^2=a^2-c^2$ 得

$$b^2=64,$$

故所求方程为

$$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1.$$

习题 9-1(A 组)

1. 填空题.

(1) 已知椭圆方程为$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，则长轴长为____，短轴长为____，离心率为____，顶点坐标为________，焦点坐标为________；

(2) 已知椭圆方程为 $4x^2+16y^2=25$，则长轴长为____，短轴长为____，离心率为____，顶点坐标为____，焦点坐标为________；

(3) 中心在原点，焦点在 x 轴上，且过两点$(\sqrt{2},1)$，$(0,\sqrt{2})$的椭圆标准方程为________，离心率为____________；

(4) 两半轴的和等于 8，焦距等于 8 的椭圆标准方程为____________；

(5) 椭圆$\dfrac{x^2}{k+8}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 的离心率 $e=\dfrac{1}{2}$，则 k 的值为________.

2. 平面内两定点距离等于 6，一动点 M 到这两个定点的距离的和等于 8. 建立适当坐标系，求动点 M 的轨迹方程.

习题 9-1(B 组)

1. 根据下列条件,求椭圆的标准方程.

(1) 长轴长等于 12,焦距等于 8,焦点在 x 轴上;

(2) 顶点 $A(0,\pm4)$,焦点 $F(0,\pm3)$;

(3) 中心在原点,焦点在 x 轴上,半长轴为 2,且过点$(1,-1)$.

2. 椭圆的中心在原点,一个顶点和一个焦点分别是直线 $x+3y-6=0$ 与两坐标轴的交点,求椭圆的标准方程,并作图.

3. 一直线经过椭圆 $9x^2+25y^2=225$ 的左焦点和圆 $x^2+y^2-2y-3=0$ 的圆心,求该直线的方程.

4. 一个圆的圆心在椭圆 $16x^2+25y^2=400$ 的右焦点上,并且通过椭圆在 y 轴上的顶点,求圆的方程.

5. 已知椭圆的中心在原点,焦点在 x 轴上,离心率等于 $\frac{1}{3}$,又知椭圆上有一点 M,它的横坐标等于右焦点的横坐标,而纵坐标等于 4,求椭圆的标准方程.

扫一扫,获取参考答案

6. 椭圆的中心在原点,对称轴重合于坐标轴,长轴为短轴的 2 倍,并经过点$A(3,0)$,求椭圆的标准方程.

9.2　双　曲　线

一、双曲线的定义和标准方程

1. 双曲线的定义

如图 9-7 所示,取一条拉链,先拉开一部分,分成两支,将一支剪短,把长的一支的端点固定在 F_1 处,短的一支的端点固定在 F_2 处,把笔尖放在 M 处,笔尖随拉链的拉开或合上,就画成一支曲线;再把短的一支的端点固定在 F_1 处,把长的一支的端点固定在 F_2 处,同样画出另一支曲线.这两支曲线就是常见的双曲线,从这个作法中可以看到,笔尖(即动点 M)在移动时,它到两个定点 F_1 及 F_2 的距离的差始终保持不变.

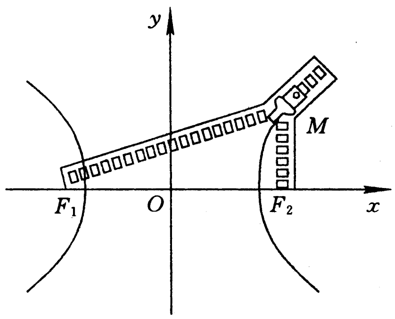


图 9-7

定义 平面上与两定点 F_1, F_2 的距离之差（小于 $|F_1F_2|$）的绝对值为常数的点的轨迹称为**双曲线**. 两定点 F_1 和 F_2 称为**双曲线的焦点**；两焦点间的距离 $|F_1F_2|$ 称为**双曲线的焦距**，用 $2c$ 表示；c 称为**半焦距**.

2. 双曲线的标准方程

取过焦点 F_1, F_2 的直线为 x 轴，线段 F_1F_2 的垂直平分线为 y 轴，建立直角坐标系，如图 9-8 所示. 设 $M(x, y)$ 是双曲线上的任意一点，双曲线的焦距为 $2c$ $(c>0)$，点 M 与 F_1 和 F_2 的距离之差的绝对值为 $2a$ $(a>0)$，则 F_1, F_2 的坐标分别为 $F_1(-c, 0)$，$F_2(c, 0)$. 由双曲线的定义得

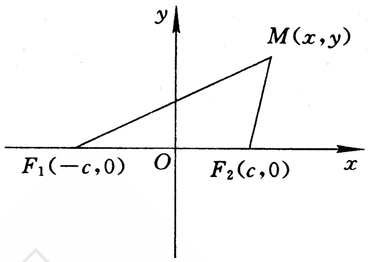


图 9-8

$$|MF_1|-|MF_2|=\pm 2a.$$

根据两点间距离公式，得

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a.$$

移项得

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\pm 2a+\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

两边平方并整理化简得

$$\pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx.$$

两边平方并整理得

$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2).$$

因为 $\triangle F_1MF_2$ 的两边之差小于第三边，所以

$$2a<2c,\ a<c,\ a^2<c^2,\ c^2-a^2>0.$$

于是令

$$c^2-a^2=b^2 \quad (b>0),$$

得

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2.$$

两边同除以 a^2b^2 得

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1} \tag{9-3}$$

方程(9-3)称为**双曲线的标准方程**，它所表示的双曲线的焦点在 x 轴上，焦点为 $F_1(-c, 0)$，$F_2(c, 0)$. 其中，$c^2=a^2+b^2$.

例 1 设双曲线的焦点为 $F_1(5, 0)$ 与 $F_2(-5, 0)$，动点到两焦点的距离之差为 8，求双曲线的标准方程.

解　设所求双曲线的标准方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，由已知条件，知

$$2a=8, a=4, c=5.$$

于是

$$b^2=c^2-a^2=5^2-4^2=9,$$

即所求方程为

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1.$$

如果双曲线的焦点在 y 轴上，焦点是$F_1(0,-c)$，$F_2(0,c)$，设 $M(x,y)$是双曲线上的任意一点，由双曲线的定义，得

$$|MF_1|-|MF_2|=\pm 2a.$$

可得它的另一标准方程为

$$\boxed{\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1} \tag{9-4}$$

它也是**双曲线的标准方程**，如图 9-9 所示. 其中 a,b,c 的关系仍是 $c^2=a^2+b^2$. 方程(9-3)与(9-4)的区别是前者的焦点在 x 轴上，后者的焦点在 y 轴上.

例 2　设双曲线的焦距为 $2\sqrt{5}$，焦点在 y 轴上，且 $a=1$，求双曲线的标准方程.

解　由题设所求双曲线的标准方程为$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$，依已知条件有

$$c=\sqrt{5},\ a=1.$$

于是

$$b^2=c^2-a^2=5-1=4.$$

故所求双曲线的标准方程为

$$y^2-\frac{x^2}{4}=1.$$

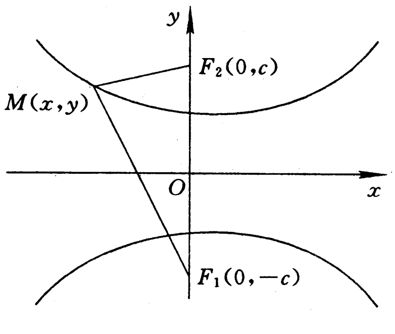


图 9-9

二、双曲线的形状、画法和离心率

下面以双曲线的标准方程$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 为例，讨论其形状、画法和离心率.

1. 范围

由标准方程$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$知，双曲线上任意点的坐标$(x,y)$，都适合不等式$\frac{x^2}{a^2}\geqslant 1$，即$x^2\geqslant a^2$，于是有$x\geqslant a$或$x\leqslant -a$，这说明双曲线在两条直线$x=a$和$x=-a$的外侧，如图9-10所示.

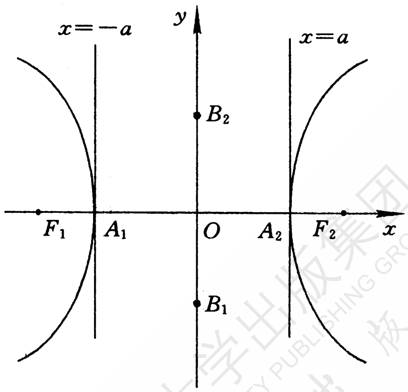


图 9-10

2. 对称性

在标准方程中，以$-y$代替y，$-x$代替x，或同时以$-x$，$-y$代替x，y，方程都不变，故图像关于x轴，y轴和原点都对称. 这时，坐标轴是双曲线的**对称轴**，原点是双曲线的**对称中心**.

3. 顶点

在标准方程$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$中，令$y=0$，则$x=\pm a$，所以双曲线与$x$轴的交点坐标是$A_1(-a,0)$，$A_2(a,0)$两点；再令$x=0$，得$y^2=-b^2$，这个方程没有实数解，这说明双曲线与$y$轴不相交，但我们仍把$B_1(0,-b)$，$B_2(0,b)$也画在$y$轴上. 双曲线与对称轴的交点称为**双曲线的顶点**. 双曲线有两个顶点，分别为$A_1(-a,0)$，$A_2(a,0)$. 线段A_1A_2称为**双曲线的实轴**，它的长等于$2a$；线段B_1B_2称为**双曲线的虚轴**，它的长等于$2b$.

4. 渐近线

由双曲线的标准方程$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，可得

$$y=\pm\frac{b}{a}x\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}.$$

由此可见，当$|x|$无限增大时，$\frac{a^2}{x^2}$就无限减小，且趋近于零，$\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}$就无限接近于1，这时y将无限趋近于$\pm\frac{b}{a}x$，从而双曲线上的点就无限接近于直线$y=\pm\frac{b}{a}x$. 为此，我们把直线$y=\pm\frac{b}{a}x$称为双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的**渐近线.**

不难看出，双曲线的渐近线就是四条直线$x=\pm a$，$y=\pm b$所围成的矩形的两条对角线，如图9-11所示.

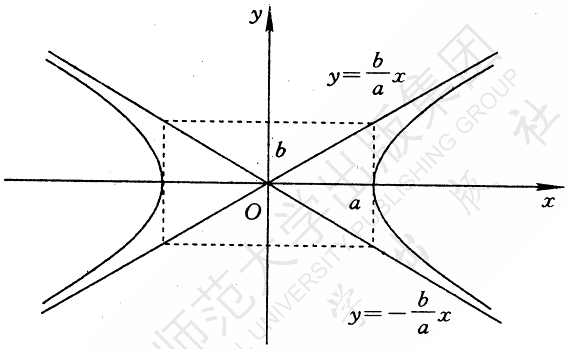


图9-11

双曲线的渐近线$y=\pm\frac{b}{a}x$又可写成下面的形式：

$$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0 \quad 和 \quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0.$$

如果把它们与双曲线方程$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$作比较就会发现，只要令方程$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的左边等于零，即

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0.$$

分解因式，得

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=0,$$

即
$$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0 \quad 及 \quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0.$$

这就是双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的渐近线方程.

类似地，双曲线$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$的渐近线方程为$y=\pm\frac{a}{b}x$.

5. 离心率

当$\dfrac{b}{a}$的值越大时，双曲线的“开口”就越大. 又因为

$$\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{c^2-a^2}}{a}=\sqrt{\left(\frac{c}{a}\right)^2-1},$$

所以$\dfrac{c}{a}$的值越大，双曲线的“开口”越大. 因此$\dfrac{c}{a}$的值能刻画出双曲线“开口”的大小.

定义 双曲线焦距与实轴长之比，称为**双曲线的离心率**，通常用 e 表示，即

$$e=\frac{2c}{2a}=\frac{c}{a}.$$

因为 $c>a>0$，所以 $e>1$，即双曲线的离心率是大于 1 的数.

例 3 求双曲线 $4x^2-16y^2=64$ 的实轴和虚轴的长，焦点和顶点的坐标，离心率和渐近线方程.

解 将已知方程化为标准方程，得

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1.$$

于是 $a=4$，$b=2$，$c=\sqrt{a^2+b^2}=2\sqrt{5}$，所以双曲线实轴和虚轴的长分别为 $2a=8$，$2b=4$，焦点为 $F_1(-2\sqrt{5},0)$，$F_2(2\sqrt{5},0)$，顶点为 $A_1(-4,0)$，$A_2(4,0)$，离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，渐近线方程为 $y=\pm\dfrac{1}{2}x$.

6. 双曲线的画法

双曲线的画法一般有以下步骤：

(1) 将方程化为标准形式，如$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$；

(2) 作出由直线 $x=a$，$x=-a$，及 $y=b$，$y=-b$ 所围成的矩形，画出它的两条对角线，两端延长即得渐近线；

(3) 根据关系式 $y=\dfrac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$，给出满足不等式 $x\geqslant a$ 的几个 x 值，算出对应的 y 值，用描点法作出双曲线在第一象限内的图形；

(4) 利用双曲线的对称性及其与渐近线的位置关系画出双曲线.

例 4　画出双曲线 $x^2-4y^2=16$ 的图像.

解　将方程

$$x^2-4y^2=16$$

化为标准方程

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1.$$

于是 $a=4,b=2$,即渐近线方程为 $y=\pm\frac{1}{2}x$.

作出由直线 $x=4,x=-4$ 及 $y=2,y=-2$ 所围成的矩形,画出它的两条对角线并延长,即得渐近线.

由标准方程解得 $y=\pm\frac{1}{2}\sqrt{x^2-16}$,根据关系式 $y=\frac{1}{2}\sqrt{x^2-16}$,算出 x $(x\geqslant4)$和 y 的几组对应值,列表如下:

x	4	5	6	7
y	0	1.5	2.2	2.9

根据双曲线与其渐近线的关系可画出双曲线在第一象限内的图像. 再根据双曲线的对称性,画出整个双曲线的图像,如图 9-12 所示.

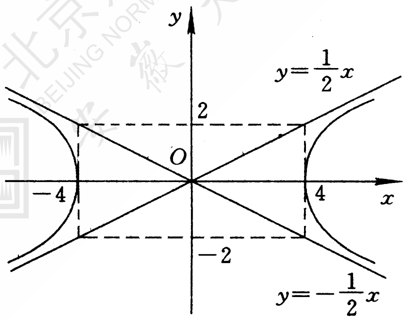


图 9-12

例 5　已知双曲线的焦点为$(\pm3,0)$,渐近线方程为 $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}x$,求双曲线的标准方程.

解　设所求双曲线的标准方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$,则由已知条件得

$$\begin{cases}c=3,\\ \dfrac{b}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{4},\\ b^2=c^2-a^2.\end{cases}$$

解这个方程组得 $a^2=8$，$b^2=1$，故所求方程为$\frac{x^2}{8}-y^2=1$.

三、等轴双曲线

在双曲线方程

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

中，如果 $a=b$，则方程变为

$$\boxed{x^2-y^2=a^2} \tag{9-5}$$

方程(9-5)所表示的双曲线，其实轴长与虚轴长相等，所以称为**等轴双曲线**. 这时，因为 $a=b$，所以等轴双曲线的两条渐近线为

$$y=\pm x,$$

互相垂直，如图 9-13 所示.

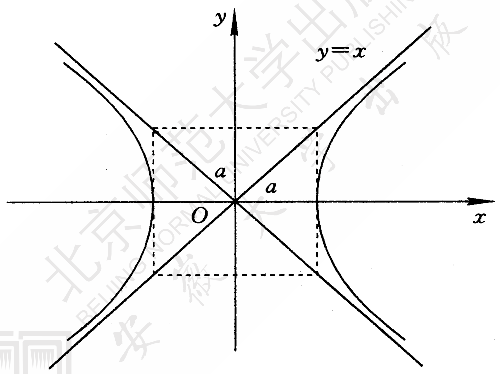


图 9-13

习题 9-2(A 组)

1. 填空题.

(1) 已知双曲线$\frac{x^2}{9}-y^2=1$，则实轴长为____，虚轴长为____，顶点坐标为____，焦点坐标为____，离心率为____，渐近线方程为________；

(2) 已知双曲线 $x^2-\frac{y^2}{9}=-1$，则实轴长为______，虚轴长为______，顶点坐标为____，焦点坐标为______，离心率为______，渐近线方程为____；

(3) 已知双曲线 $4y^2-9x^2=36$，则实轴长为______，虚轴长为________，顶点坐标为________，焦点坐标为________，离心率为________，渐近线方程为________________；

(4) 中心在原点，焦点在 y 轴上，且过点$(4\sqrt{2},9)$，$(2,3\sqrt{2})$的双曲线方程为______，离心率为______，渐近线方程为____________________；

(5) 设曲线的方程为$\dfrac{x^2}{|k|-2}+\dfrac{y^2}{5-k}=1$，当曲线为双曲线时，$k$ 取值范围是________，焦点在 x 轴上时，k 取值范围是_________，焦点在 y 轴上时，k 取值范围是_________.

2. 求满足下列条件的双曲线方程.

(1) 实轴等于 6，两焦点为$(\pm4,0)$；

(2) 焦点在 y 轴上，虚轴等于 12，焦距为 16.

习题 9-2(B 组)

1. 求满足下列条件的双曲线标准方程.

(1) 焦距等于 16，离心率等于$\dfrac{4}{3}$；

(2) 实轴在 y 轴上，渐近线方程为 $y=\pm\dfrac{5}{3}x$，且过点$(3\sqrt{3},10)$.

2. 求以双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的焦点为顶点，顶点为焦点的椭圆方程.

3. 在双曲线$\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$ 上求一点，使该点与左焦点的距离等于它与右焦点的距离的 2 倍.

4. 已知双曲线的焦点坐标为$(\pm4,0)$，双曲线上的点到两焦点距离的差的绝对值是 6，求双曲线的方程.

扫一扫，获取参考答案

5. 求过点 $A(3,1)$且实轴和虚轴都在坐标轴上的等轴双曲线方程.

6. 一动点到一定点 $F(3,0)$的距离和它到一条定直线 $x=\dfrac{3}{4}$ 的距离之比为 2∶1，求动点的轨迹方程.

9.3　抛　物　线

一、抛物线的定义和标准方程

如图 9-14 所示，在平板上作一条直线 l 及其直线外一定点 F，取一块直角三角板 ABC，使它的直角边 BC 重合于直线 l，再取一条无伸缩性且与三角板

的另一条直角边 AC 等长的线，一端固定在三角板的顶点 A 处，另一端固定在点 F 处，把笔尖放在 M 处，用笔尖沿着 AC 边把线拉紧，同时将三角板沿直线 l 上下滑动，于是笔尖就画出一条曲线，它就是抛物线.

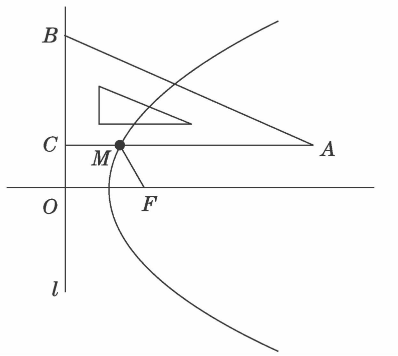


图 9-14

由上述过程可知，笔尖（即点 M）在移动时，它到定点 F 的距离始终等于它到定直线 l 的距离.

定义　平面上与一定点 F 和一定直线 l 的距离相等的点的轨迹称为**抛物线**，定点 F 称为抛物线的**焦点**，定直线 l 称为抛物线的**准线**.

取过焦点 F 且垂直于准线的直线为 x 轴，x 轴与直线 l 相交于点 K，以线段 KF 的垂直平分线为 y 轴，建立直角坐标系，如图 9-15 所示. 设 $M(x,y)$ 是抛物线上的任意一点，$|KF|=p$，作 $MN\perp l$，垂足为 N，则焦点 F 的坐标为 $\left(\frac{p}{2},0\right)$，准线方程为 $x=-\frac{p}{2}$，点 N 的坐标为 $\left(-\frac{p}{2},y\right)$. 由抛物线的定义，得

$$|MF|=|MN|.$$

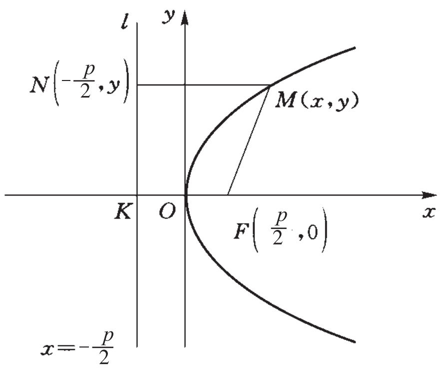


图 9-15

根据两点间距离公式，得

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}.$$

化简整理得

$$\boxed{y^2=2px\quad (p>0)} \tag{9-6}$$

方程(9-6)称为**抛物线的标准方程**，它所表示的抛物线的焦点在 x 轴的正半轴上，坐标是 $\left(\frac{p}{2},0\right)$，它的准线方程是 $x=-\frac{p}{2}$.

当我们以不同的方式建立直角坐标系时，还可得到抛物线其他形式的标准方程，如图 9-16 所示. 它们的方程分别是 $y^2=-2px\ (p>0)$，$x^2=2py\ (p>0)$，$x^2=-2py\ (p>0)$，焦点坐标分别是 $\left(-\frac{p}{2},0\right)$，$\left(0,\frac{p}{2}\right)$，$\left(0,-\frac{p}{2}\right)$，准线方程分

别是 $x=\frac{p}{2}$，$y=-\frac{p}{2}$，$y=\frac{p}{2}$.

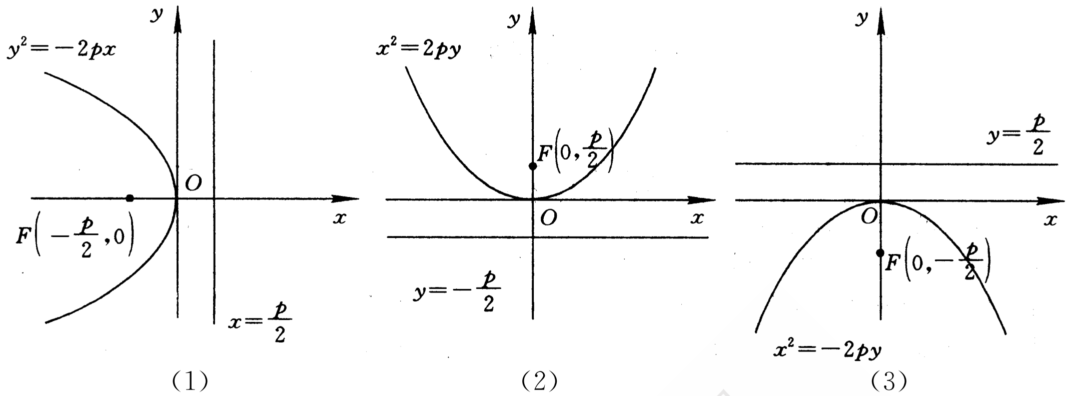


图 9-16

例 1　(1) 求抛物线 $y^2=4x$ 的焦点坐标和准线方程；

(2) 已知抛物线的焦点坐标为 $F(0,-2)$，求它的标准方程.

解　(1) 因为 $2p=4$，$p=2$，所以焦点坐标为 $(1,0)$，准线方程为

$$x=-1.$$

(2) 因为焦点在 y 轴的负半轴上，并且 $\frac{p}{2}=2$，所以 $p=4$，标准方程为

$$x^2=-8y.$$

二、抛物线的形状和画法

下面以抛物线的标准方程 $y^2=2px$ $(p>0)$ 为例，讨论其形状和画法.

1. 范围

从上面方程可知，x 的取值范围是 $x\geqslant 0$，因为当 $x<0$ 时，y 无对应的实数值，这说明在 y 轴的左边没有抛物线的点.

2. 对称性

在方程(9-6)中，用 $-y$ 代替 y，方程不变，这说明抛物线关于 x 轴对称，因此，抛物线有一条对称轴——x 轴.

3. 顶点

在标准方程中，令 $x=0$，得 $y=0$，所以这条抛物线经过原点，抛物线和它的对称轴的交点，称为**抛物线的顶点**，抛物线 $y^2=2px$ 的顶点在原点.

根据以上讨论可知，抛物线 $y^2=2px$ 有如图 9-15 所示的形状，它的顶点在原点，对称轴重合于 x 轴，开口向右，整个图像在 y 轴的右侧.

类似(参见图 9-16)可得：

抛物线 $y^2=-2px\ (p>0)$ 顶点在原点，对称轴重合于 x 轴，开口向左，整个图像在 y 轴的左侧；

抛物线 $x^2=2py\ (p>0)$ 顶点在原点，对称轴重合于 y 轴，开口向上，整个图像在 x 轴的上方；

抛物线 $x^2=-2py\ (p>0)$ 顶点在原点，对称轴重合于 y 轴，开口向下，整个图像在 x 轴的下方.

由上述讨论可知，画抛物线图像的一般步骤如下：

(1) 将所给方程化为 $y^2=\pm 2px$ 或 $x^2=\pm 2py$ 的标准形式；

(2) 根据方程中 x 和 y 的取值范围，判断抛物线的开口方向和对称轴；

(3) 列表求值，描点作图.

例 2 已知抛物线关于 x 轴对称，它的顶点在原点，并且经过点 $M(2,-2)$，求它的标准方程并作图.

解 由题意，设所求的标准方程为

$$y^2=2px.$$

因为点 M 在抛物线上，所以

$$(-2)^2=2p\cdot 2.$$

即

$$p=1,$$

故所求的抛物线方程为

$$y^2=2x.$$

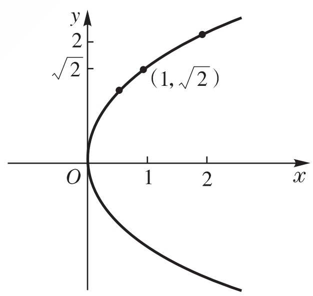


图 9-17

将已知方程变形为 $y=\pm\sqrt{2x}$，根据 $y=\sqrt{2x}$ 在 $x\geqslant 0$ 的范围内算出几个点的坐标 (x,y)，如下表所示：

x	0	0.5	1	2	…
y	0	1	$\sqrt{2}$	2	…

先描点画出抛物线在第一象限内的图形，再利用其对称性，画出整个抛物线，如图 9-17 所示.

例 3 求以原点为顶点，对称轴重合于坐标轴，并且经过点 $M(-5,-10)$ 的抛物线的标准方程.

解 如图 9-18 所示，由题意知抛物线图像有两种可能，开口向左或开口向下.

(1)设抛物线的开口向左，其标准方程为 $y^2=-2px$，因为点 $M(-5,-10)$

在抛物线上，所以有

$$(-10)^2=-2p(-5),$$

即

$$p=10.$$

因此，所求的抛物线的标准方程为 $y^2=-20x$.

(2)设抛物线的开口向下，其标准方程为

$$x^2=-2py.$$

因为点 $M(-5,-10)$ 在抛物线上，所以有

$$(-5)^2=-2p(-10),$$

即

$$p=\frac{5}{4}.$$

因此，所求的抛物线的标准方程为 $x^2=-\frac{5}{2}y$.

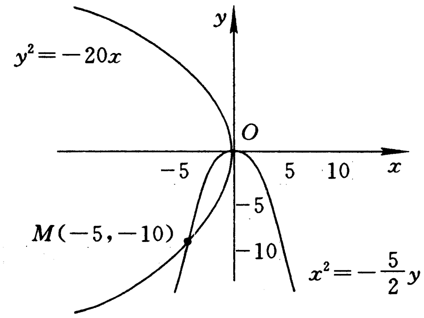


图 9-18

例 4　已知抛物线的顶点在原点，焦点在 y 轴上，抛物线上一点 $A(a,-8)$ 到焦点的距离是 10，求抛物线方程和 a 的值.

解　如图 9-19 所示，由题意可设抛物线方程为

$$x^2=-2py.$$

易得

$$|-8|+\frac{p}{2}=10,$$

即

$$p=4.$$

于是抛物线的方程为

$$x^2=-8y.$$

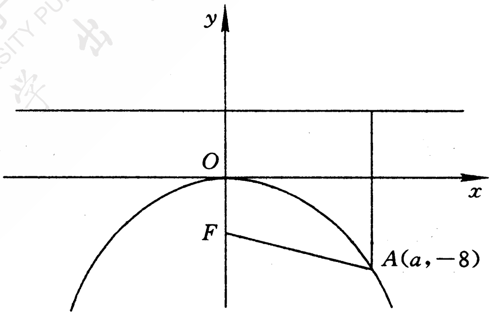


图 9-19

又因点 A 在抛物线上，故

$$a^2=-8(-8)=64,$$

即

$$a=\pm 8.$$

习题 9-3(A 组)

1. 填空题.

(1) 已知抛物线方程 $y^2=4x$，则对称轴方程为__________，焦点坐标为______，准线方程为______，开口方向是______；

(2) 已知抛物线方程 $x^2=-y$，则其对称轴方程为______，焦点坐标为______，准线方程为____________，开口方向是____________；

(3) 已知抛物线方程 $2y^2+5x=0$，则其对称轴方程为__________________，焦点坐标为__________________，准线方程为__________________，开口方向是__________________；

(4) 已知抛物线顶点在原点，对称轴为 y 轴，且过点 $(1,-4)$，则抛物线方程为__________，焦点坐标为____________，准线方程为____________，开口方向是____________.

2. 根据下列条件，写出抛物线的标准方程.

(1) 焦点为 $F(4,0)$；

(2) 准线方程为 $y=-\dfrac{1}{2}$；

(3) 开口向左，焦点到准线距离是 2.

3. 抛物线 $y^2=2px\ (p>0)$ 上一点 M 与焦点 F 的距离 $|MF|=2p$，求点 M 的坐标.

习题 9-3(B 组)

1. 已知一抛物线的焦点是直线 $4x-3y-12=0$ 与 Ox 轴的交点，求其标准方程.

2. 在抛物线 $y^2=4x$ 上求一点，使它到焦点的距离等于 10.

3. 已知某抛物线以原点为顶点，焦点在 y 轴正半轴上，第一、三象限角的平分线被抛物线截出的线段长为 $8\sqrt{2}$，求此抛物线的方程.

4. 已知某抛物线的顶点是双曲线 $16x^2-9y^2=144$ 的中心，而焦点是双曲线的左顶点，求此抛物线的方程.

5. 某校有一台电视接收器，其反射镜面是旋转抛物面，它能把平行的电磁波集中到焦点处，现已知镜面口径 $AB=60$ cm，深度 $OC=40$ cm，如图 9-20 所示，求焦点位置.

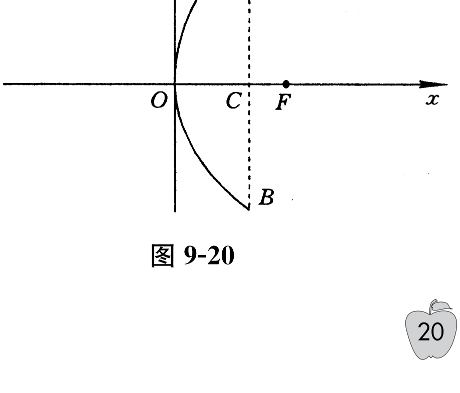


图 9-20

扫一扫，获取参考答案

复习题 9

扫一扫，复习本章内容

1. 填空题.

(1) 动点到点 $A(-4,0)$ 和 $B(4,0)$ 的距离的平方差是 48 的轨迹方程是________________；

(2) 如果椭圆的长轴长是短轴长的 2 倍，焦点在 x 轴上，又知椭圆经过点 $(4,2)$，那么椭圆的标准方程是________________；

(3) 如果双曲线的一个焦点是 $(0,4)$，一条渐近线方程是 $x+y=0$，则另一条渐近线方程是__________，双曲线的标准方程是____________；

(4) 顶点在原点，关于 y 轴对称，且过点 $A(-3,-4)$ 的抛物线标准方程是______________.

2. 选择题.

(1) 已知椭圆的长轴长是短轴长的 2 倍，则它的离心率 e 是(　　)；

A. $\dfrac{3}{4}$　　B. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\dfrac{1}{2}$

(2) 已知抛物线的焦点与圆 $x^2+y^2+6x=0$ 的圆心重合，则此抛物线的标准方程是(　　)；

A. $y^2=12x$　　B. $y^2=-12x$　　C. $y^2=6x$　　D. $y^2=-6x$

(3) 抛物线 $y=ax^2$ 的焦点坐标是(　　)；

A. $\left(0,\dfrac{a}{4}\right)$　　B. $\left(0,-\dfrac{a}{4}\right)$　　C. $\left(0,\dfrac{1}{4a}\right)$　　D. $\left(0,-\dfrac{1}{4a}\right)$

(4) 若曲线 $x^2+y^2\cos\alpha=1$ 中的 α 满足 $90^\circ<\alpha<180^\circ$，则曲线应为(　　)；

A. 抛物线　　B. 双曲线　　C. 椭圆　　D. 圆

(5) 当 $|x|\leqslant 2$ 时，方程 $y=\sqrt{4-x^2}$ 的图形是(　　).

A. 直线　　B. 圆　　C. 椭圆　　D. 半圆弧

3. 椭圆的一个焦点把长轴分为两段，分别等于 7 和 1，试求椭圆的标准方程.

4. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{225}-\dfrac{y^2}{64}=1$ 上的一点，它的横坐标等于 15，试求该点到两个焦点的距离.

5. 已知从椭圆的焦点看它的短轴两端所成视角是 60°，求椭圆的离心率.

6. 在抛物线 $y^2=4x$ 上求一点 P，使之到直线 $x-y+5=0$ 的距离最短.

扫一扫，获取参考答案

［阅读材料 9］

二次曲线的光学性质及其应用

当你把汽车的前灯开关从亮转到暗时，就有数学在起作用.具体地说，是抛物线原理在玩花招.前灯后面的反射镜的截面具有抛物线的形状，如图 9-21 所示.事实上，它们是抛物线环绕它的对称轴旋转形成的抛物面.明亮的光束是由位于抛物线反射镜焦点上的光源产生的.因此，光线沿着与抛物线的对称轴平行的方向射去.当光源改变了位置，它不再在焦点上时，光线的行进不再与轴平行，光只向上下射去，而向上射出的被屏蔽，只有向下射出的近光，所以此时灯光变暗.人们已经证明了抛物线的这个重要性质：从焦点发出的光线，经过抛物线上的一点反射后，反射光线平行于抛物线的轴，探照灯（如图 9-22 所示）也是利用这个原理设计的.

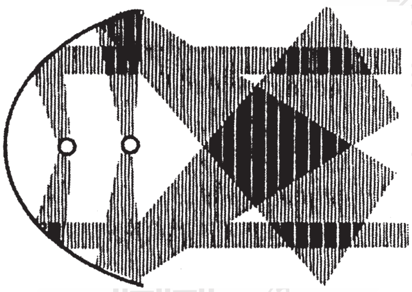


图 9-21

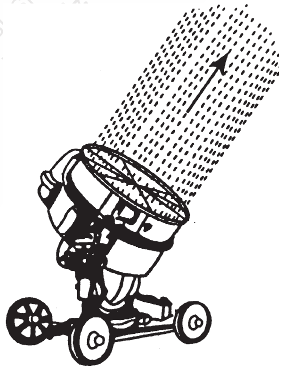


图 9-22

应用抛物线的这个性质，也可以使一束平行于抛物线的轴的光线，经过抛物面的反向集中于它的焦点.人们应用这个原理设计了一种加热水和食物的太阳灶，如图 9-23 所示.在这种太阳灶上装有一个旋转抛物面形状的反光镜，当它的轴与太阳光线平行时，太阳光线经过反射后集中于焦点处，这一点的温度就会很高.

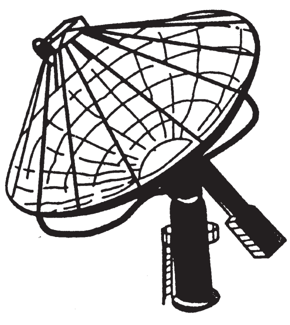


图 9-23

反射式望远镜是把双曲线和抛物线组合起来，让进入镜筒的光线在聚焦过程中来回往返，因而镜筒的长度比光线实际走过的路程短得多.这样就能使仪器的体积缩小，重量减轻，既经济、又方便.所以，现在的激光雷达和无线电接收装置都喜欢采用这种反射系统.

椭圆和双曲线的光学性质与抛物线不同．从椭圆的一个焦点发出的光线，经过椭圆反射后，反射光线交于椭圆的另一个焦点上，如图 9-24 所示；从双曲线上的一个焦点发出的光线，经过双曲线反射后，反射光线是散开的，它们就好像是从另一个焦点射出的一样，如图 9-25 所示．椭圆、双曲线的光学性质也常被人们广泛地应用于各种设计中．

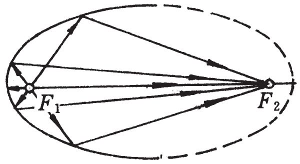


图 9-24

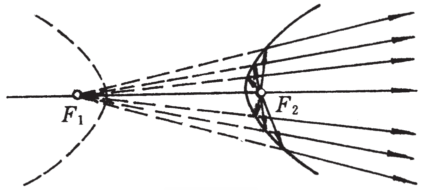


图 9-25

第 9 章单元自测

1. 填空题．

(1) 椭圆中心在原点，焦点在 x 轴上，半长轴为 2，过点 $(1,-1)$，则此椭圆标准方程为__________；

(2) 与双曲线 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 有共同的渐近线，且经过点 $(-3,2\sqrt{3})$ 的双曲线方程为__________；

(3) 抛物线 $y=-2x^2$ 的准线方程为__________，焦点坐标为__________．

2. 选择题．

(1) 方程 $2x^2+2y^2-4x+4y+6=0$ 所表示的曲线是(　　)；

A. 椭圆　　B. 圆　　C. 抛物线　　D. 以上都不是

(2) 抛物线 $y=-ax^2(a\neq 0)$ 的焦点坐标是(　　)；

A. $\left(0,\frac{1}{4a}\right)$　　B. $\left(0,-\frac{1}{4a}\right)$　　C. $\left(\frac{1}{4a},0\right)$　　D. $\left(-\frac{1}{4a},0\right)$

(3) 已知曲线方程是 $2x^2+3xy+y^2-4x+4=0$，那么在这条曲线上的点是(　　)；

A. $(2,-1)$　　B. $(-2,1)$　　C. $(-1,2)$　　D. $(1,-2)$

(4) 在抛物线 $x^2=8y$ 上，且到焦点的距离为 4 的点的坐标为(　　)．

A. $(4,2)$　　B. $(-4,2)$

C. $(4,2)$或$(-4,2)$　　D. $(4\sqrt{2},4)$或$(-4\sqrt{2},4)$

3. 解答题．

(1) 求经过点 $P(-2\sqrt{2},0)$ 与点 $Q(0,\sqrt{5})$ 的椭圆的标准方程；

(2) 求渐近线为 $y=\pm\frac{2}{3}x$，且经过点 $M\left(\frac{9}{2},-1\right)$ 的双曲线的标准方程；

(3) 一座抛物线形拱桥，当拱顶离水面 2 米时，水面宽 4 米，问水面下降 1 米后水面的宽度是多少？

扫一扫，获取参考答案

第 10 章

*坐标转换与参数方程

我们知道,同一个点在两个不同的直角坐标系中的坐标是不一样的,那么,这两个坐标是如何进行转换的呢?对于平面曲线而言,有些曲线的方程较为复杂,能否让这些方程变得简单些呢?而有些曲线的方程是无法用直角坐标系中的变量 x 和 y 来直接表示的,能不能将这些曲线用另一种形式的方程表示出来呢?本章主要学习坐标轴的平移与旋转、极坐标方程及参数方程等知识.通过本章的学习,可以为上述问题找到一个较为满意的解决方法.

10.1 坐标轴的平移与旋转

一、坐标轴的平移

在数控车床加工中,通常工件做旋转运动(主运动),而刀具与工件做相对运动(进给运动).为了保证切削加工顺利进行,经常需要对坐标轴进行平移与旋转来变换坐标系.不仅如此,一些较为复杂的曲线方程也要通过这样变换坐标系来进行化简.

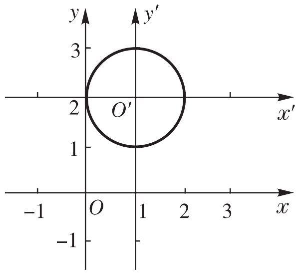


图 10-1

在如图 10-1 所示的坐标系 xOy 中,圆心为 $O'(1,2)$,半径为 1 的圆的方程是

$$(x-1)^2+(y-2)^2=1.$$

如果不改变坐标轴的方向和单位长度,将坐标原点移至点 O' 处,得新坐标系 $x'O'y'$,那么在这个新坐标系中,圆心为 $O'(0,0)$,该圆的方程为

$$x'^2+y'^2=1.$$

也就是说，对于同一点或者同一曲线，由于选取的坐标系不同，点的坐标或曲线的方程也不同. 从上面的例子可以看出，把一个坐标系变换为另一个适当的坐标系，就可以使曲线的方程简化. 我们把只改原点的位置，坐标轴的方向和长度单位都不改变的坐标系变换叫作**坐标轴的平移**.

下面我们来研究在坐标轴平移情况下，同一点在两个不同的坐标系中坐标之间的关系.

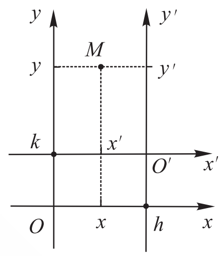


图 10-2

如图 10-2 所示，设 O' 在原坐标系 xOy 中的坐标为 (h,k)，以 O' 为原点平移坐标轴，建立新坐标系 $x'O'y'$. 平面内任意一点 M 在原坐标系 xOy 中的坐标为 (x,y)，在新坐标系 $x'O'y'$ 中的坐标为 (x',y'). 由图 10-2 知，$x=h+x'$，$y=k+y'$，因此，点 M 的原坐标、新坐标之间有下面的关系：

$$\boxed{\begin{cases}x=x'+h,\\y=y'+k,\end{cases}\text{或}\begin{cases}x'=x-h,\\y'=y-k.\end{cases}} \tag{10-1}$$

公式(10-1)也称作**平移公式**.

例 1 平移坐标轴，把原点移到 $O'(3,-4)$，求点 $A(5,2)$ 在新坐标系 $x'O'y'$ 中的坐标.

解 由题意知，$h=3$，$k=-4$，$x=5$，$y=2$，由平移公式$\begin{cases}x'=x-h,\\y'=y-k,\end{cases}$得

$$x'=5-3=2,\ y'=2+4=6,$$

故点 A 在新坐标系 $x'O'y'$ 中的坐标为 $(2,6)$.

例 2 平移坐标轴，把原点移到 $O'(2,-1)$，求曲线 $\dfrac{(x-2)^2}{9}+\dfrac{(y+1)^2}{4}=1$ 在新坐标系 $x'O'y'$ 中的方程.

解 设曲线上任意一点 M 的原坐标为 (x,y)，新坐标为 (x',y')，由平移公式得

$$\begin{cases}x=x'+2,\\y=y'-1.\end{cases}$$

将其代入原方程，得到曲线在新坐标系 $x'O'y'$ 中的方程为

$$\frac{x'^2}{9}+\frac{y'^2}{4}=1.$$

例 3　利用坐标轴平移，化简圆 $x^2+y^2+4x-2y+1=0$ 的方程，并画出新坐标系和圆.

解　将方程的左边配方，得

$$(x+2)^2+(y-1)^2=4.$$

这是以点 $(-2,1)$ 为圆心，2 为半径的圆. 以点 $Q'(-2,1)$ 为新坐标系的原点，平移坐标轴，得新坐标系 $x'O'y'$，将平移公式 $\begin{cases}x=x'-2\\y=y'+1\end{cases}$ 代入原方程，得圆在新坐标系 $x'O'y'$ 中的方程为

$$x'^2+y'^2=4.$$

新坐标系 $x'O'y'$ 和圆如图 10-3 所示.

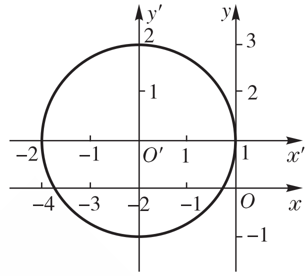


图 10-3

二、坐标轴的旋转

平移坐标轴时，同一点在两个不同的坐标系中的坐标之间的关系可以用平移公式来描述. 若将坐标轴进行旋转，同一点的坐标之间的关系又如何呢？

如果坐标轴的原点和单位长度都不变，只是坐标轴按同一方向绕原点旋转同一角度，这种坐标系的变换叫作**坐标轴的旋转**.

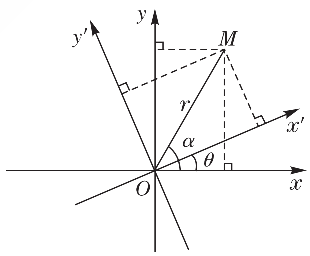


图 10-4

如图 10-4 所示，设坐标轴绕逆时针方向旋转，其旋转角为 θ，得新坐标系 $x'Oy'$. 在平面内任取一点 M，它在坐标系 xOy 和 $x'Oy'$ 中的坐标分别为 (x,y) 和 (x',y'). 则有

$x=r\cos\alpha$，$y=r\sin\alpha$，$x'=r\cos(\alpha-\theta)$，$y'=r\sin(\alpha-\theta)$，由于

$x'=r\cos\alpha\cos\theta+r\sin\alpha\sin\theta=x\cos\theta+y\sin\theta$，

$y'=r\sin\alpha\cos\theta-r\cos\alpha\sin\theta=y\cos\theta-x\sin\theta$，

由此得坐标轴旋转的坐标变换公式（简称**旋转公式**）为

$$\boxed{\begin{cases}x'=x\cos\theta+y\sin\theta,\\y'=-x\sin\theta+y\cos\theta,\end{cases}\text{或}\begin{cases}x=x'\cos\theta-y'\sin\theta,\\y=x'\sin\theta+y'\cos\theta.\end{cases}}\quad(10\text{-}2)$$

可以证明，对于任意角 θ，公式(10-2)仍成立.

例 4　把坐标轴按逆时针方向旋转 $\frac{\pi}{6}$，求点 $P(-1,\sqrt{3})$ 在新坐标系 $x'Oy'$

中的坐标.

解 把 $\theta=\frac{\pi}{6}$, $x=-1$, $y=\sqrt{3}$, 代入公式 $\begin{cases}x'=x\cos\theta+y\sin\theta,\\ y'=-x\sin\theta+y\cos\theta,\end{cases}$ 得

$$x'=-1\cdot\cos\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=0,$$

$$y'=-(-1)\cdot\sin\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}\cdot\cos\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}+\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2.$$

故点 M 在新坐标系 $x'Oy'$ 中的坐标是 $(0,2)$.

例 5 设点 M 在坐标系 xOy 中的坐标为 $(-1,2)$. 先平移坐标轴,将原点移至 $O'(1,2)$, 得坐标系 $x'O'y'$, 然后将坐标轴绕点 O' 逆时针旋转 60°, 得坐标系 $x''O'y''$. 求点 M 在新坐标系 $x''O'y''$ 中的坐标.

解 由题意知, $h=1$, $k=2$, $x=-1$, $y=2$, 代入平移公式 $\begin{cases}x'=x-h,\\ y'=y-k\end{cases}$, 得 $\begin{cases}x'=-2,\\ y'=0\end{cases}$. 即点 M 在坐标系 $x'O'y'$ 中的坐标为 $(-2,0)$.

再把 $\theta=60^\circ$, $x'=-2$, $y'=0$ 代入旋转公式 $\begin{cases}x''=x'\cos\theta+y'\sin\theta,\\ y''=-x'\sin\theta+y'\cos\theta,\end{cases}$ 得

$$\begin{cases}x''=-2\cdot\cos60^\circ+0\cdot\sin60^\circ=-1,\\ y''=-(-2)\sin60^\circ+0\cdot\cos60^\circ=\sqrt{3}.\end{cases}$$

故点 M 在坐标系 $x''O'y''$ 中的坐标为 $(-1,\sqrt{3})$.

例 6 将坐标轴逆时针旋转 $\frac{\pi}{3}$, 求曲线 $2x^2-\sqrt{3}xy+y^2=10$ 在新坐标系 $x'Oy'$ 中的方程.

解 把 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 代入公式 $\begin{cases}x=x'\cos\theta-y'\sin\theta,\\ y=x'\sin\theta+y'\cos\theta,\end{cases}$ 得

$$x=x'\cos\frac{\pi}{3}-y'\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}x'-\frac{\sqrt{3}}{2}y',$$

$$y=x'\sin\frac{\pi}{3}+y'\cos\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}x'+\frac{1}{2}y'.$$

代入原曲线方程,得曲线在新坐标系 $x'Oy'$ 中的方程为

$$2\left(\frac{1}{2}x'-\frac{\sqrt{3}}{2}y'\right)^2-\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}x'-\frac{\sqrt{3}}{2}y'\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x'+\frac{1}{2}y'\right)+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x'+\frac{1}{2}y'\right)^2=10,$$

化简,得标准方程

$$\frac{x'^2}{20}+\frac{y'^2}{4}=1,$$

它的图像是一个椭圆.

习题 10-1(A 组)

1. 平移坐标轴,把原点移到 $O'(3,2)$. 求下列各点的新坐标,并画出新坐标轴和各点.

(1) $A(2,-2)$； (2) $B(4,0)$； (3) $C(-2,3)$； (4) $D(0,6)$.

2. 设旋转角 $\theta=\frac{\pi}{6}$, 求点 $M(2,-1)$ 在新坐标系 $x'Oy'$ 中的坐标,并画出新坐标轴和点.

3. 平移坐标轴,把原点移到 $O'(-2,3)$, 求曲线 $x^2+y^2+4x-6y+12=0$ 在新坐标系 $x'O'y'$ 中的方程,并画出新坐标系和图形.

4. 利用坐标轴平移,化简下列各方程,并指出新坐标系原点在原坐标系中的坐标.

(1) $\frac{(x+1)^2}{4}+\frac{(y-2)^2}{9}=1$；

(2) $y=x^2-6x+5$.

习题 10-1(B 组)

1. 设点 A 在下列新坐标系中的坐标为 $(0,-1)$, 求点 A 在原坐标系 xOy 中的坐标.

(1) 平移坐标轴,把原点移到 $O'(-3,2)$, 得新坐标系 $x'O'y'$；

(2) 将坐标轴逆时针旋转 $30°$,得新坐标系 $x'Oy'$.

2. 平移坐标轴,将原点移至 $O'(-1,1)$, 得坐标系 $x'O'y'$, 再将坐标轴逆时针旋转 $\frac{\pi}{4}$, 得坐标系 $x''O'y''$.

(1) 求原坐标系 xOy 中的点 $(1,2)$ 在新坐标系 $x''O'y''$ 中的坐标;

(2) 求原坐标系 xOy 中的直线 $y=x+5$ 在新坐标系 $x''O'y''$ 中的方程.

3. 将坐标轴旋转 $-\frac{\pi}{3}$, 求曲线 $x^2-2\sqrt{3}xy+3y^2=8$ 在新坐标系 $x'Oy'$ 中的方程.

扫一扫，获取参考答案

10.2 极坐标方程

一、极坐标的概念

有时在一些实际问题中用直角坐标系并不是很方便，如炮兵确定射击目标时需要知道目标的方向和距离. 像这种用方向和距离来确定平面内点的位置的坐标系就是极坐标系. 本节讨论极坐标系的概念和曲线的极坐标方程.

1. 平面上点的极坐标

定义 在平面上取一定点 O，从 O 引一条射线 Ox，再取定一个单位长度并规定角的正方向(通常取逆时针方向)，如图 10-5 所示，这样就建立了一个坐标系，称为**极坐标系**. O 称为**极点**，射线 Ox 称为**极轴**.

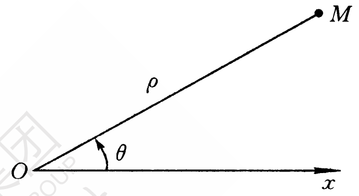


图 10-5

对于平面内任意一点 M，用 ρ 表示线段 OM 的长度，θ 表示从 Ox 到 OM 的角度，ρ 称为点 M 的**极径**，θ 称为 M 的**极角**，有序数对 (ρ,θ) 就称为点 M 的**极坐标**，可表示为 $M(\rho,\theta)$. 当点 M 是极点时，它的极坐标是 $\rho=0$，θ 可取任意值.

如图 10-6 所示，在极坐标系中，A,B,C,D,E,F,G 各点的极坐标分别是 $(4,0)$，$\left(2,\dfrac{\pi}{4}\right)$，$\left(3,\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\left(1,\dfrac{5\pi}{6}\right)$，$(3.5,\pi)$，$\left(6,\dfrac{4\pi}{3}\right)$，$\left(5,\dfrac{5\pi}{3}\right)$.

建立极坐标系后，给定 ρ 和 θ，就可以在平面内确定唯一点 M；反过来，给定平面内一点，也可以找到它的极坐标 (ρ,θ)，但和直角坐标系不同的是，平面内一个点的极坐标可以有无数种表示法，这是因为一个角加上 $2k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$ 后都是和原角终边相同的角. 比如 $\left(6,\dfrac{\pi}{6}\right)$，$\left(6,\dfrac{\pi}{6}+2\pi\right)$，$\left(6,\dfrac{\pi}{6}-2\pi\right)$ 等，都是同一点的极坐标.

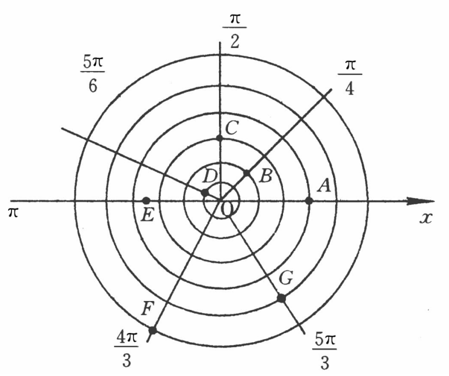


图 10-6

一般地，如果 (ρ,θ) 是一点的极坐标，那么 $(\rho,\theta+2k\pi)$ 可以作为它的极坐标. 但如果限定 $\rho>0$，$0\leqslant\theta<2\pi$，那么除极点外，平面内的点可用唯一的极坐标 (ρ,θ) 表示；同时，极坐标 (ρ,θ) 表示的点也是唯一确定的.

以后，除非特别说明，一般认为 $\rho\geqslant 0$.

2. 极坐标和直角坐标的互化

平面内的同一点可以用极坐标表示，也可以用直角坐标表示，为了方便研究问题，有时需要把它们进行互化.

如图10-7所示，把直角坐标系的原点作为极点，x轴的正半轴作为极轴，并在两种坐标系中取相同的单位长度.

设M是平面上任意一点，它的直角坐标是(x,y)，极坐标是(ρ,θ)，显然

$$\boxed{\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\ y=\rho\sin\theta.\end{cases}} \qquad (10\text{-}3)$$

利用公式(10-3)，可以把M点的极坐标化为直角坐标.

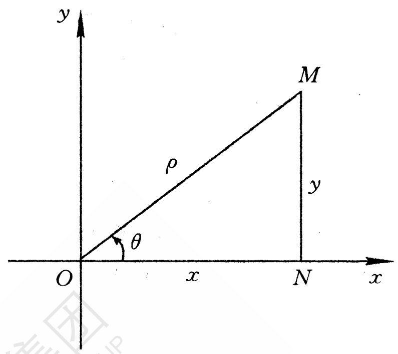


图 10-7

例 1　设M点的极坐标为$\left(5,-\frac{\pi}{4}\right)$，求它的直角坐标.

解　由公式(10-3)，可得

$$x=5\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{5}{2}\sqrt{2},$$

$$y=5\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=5\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{5}{2}\sqrt{2}.$$

于是得M点的直角坐标为$\left(\frac{5}{2}\sqrt{2},-\frac{5}{2}\sqrt{2}\right)$.

我们也可以把M点的直角坐标化为极坐标，由公式(10-3)可得

$$\boxed{\begin{cases}\rho^2=x^2+y^2,\\ \tan\theta=\dfrac{y}{x}\ (x\neq0).\end{cases}} \qquad (10\text{-}4)$$

角θ与点(x,y)在同一个象限.

例 2　设M点的直角坐标为$(1,-1)$，求它的极坐标.

解　由公式(10-4)，可得

$$\rho=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2},$$

$$\tan\theta=\frac{-1}{1}=-1.$$

因为点$M(1,-1)$在第四象限，而$\theta=\frac{7\pi}{4}$是第四象限的角，且$\tan\frac{7\pi}{4}=$

$\tan\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\tan\frac{\pi}{4}=-1$，于是所求点的极坐标为$\left(\sqrt{2},\frac{7\pi}{4}\right)$.

说明：把直角坐标转化为极坐标时，一般只要取 $\theta\in[0,2\pi)$就可以了.

二、曲线的极坐标方程

1. 曲线的极坐标方程的概念

在极坐标系中，曲线可以用含有 ρ,θ 的方程 $\psi(\rho,\theta)=0$ 来表示，这种方程称为曲线的**极坐标方程**. 利用点的直角坐标与极坐标间的关系，可将曲线的直角坐标方程与极坐标方程进行互化.

例 3 将等轴双曲线 $x^2-y^2=a^2(a\neq 0)$化为极坐标方程.

解 由公式(10-3)，将 $x=\rho\cos\theta,y=\rho\sin\theta$ 代入方程，得

$$\rho^2\cos^2\theta-\rho^2\sin^2\theta=a^2,$$

$$\rho^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=a^2,$$

$$\rho^2\cos2\theta=a^2,$$

即
$$\rho^2=\frac{a^2}{\cos2\theta}.$$

这就是所给等轴双曲线的极坐标方程.

例 4 将 $\rho=2a\sin\theta\ (a>0)$化为直角坐标方程.

解 将方程 $\rho=2a\sin\theta$ 的两端乘以 ρ，得

$$\rho^2=2a\rho\sin\theta.$$

由 $\rho^2=x^2+y^2,\rho\sin\theta=y$ 得

$$x^2+y^2=2ay,$$

即
$$x^2+(y-a)^2=a^2.$$

显然它是一个以$(0,a)$为圆心，a 为半径的圆.

例 5 将 $\rho=\frac{4}{1+\cos\theta}$ 化为直角坐标方程.

解 由 $\rho=\frac{4}{1+\cos\theta}$变形得

$$\rho+\rho\cos\theta=4,$$

由 $\rho=\sqrt{x^2+y^2},\rho\cos\theta=x$，得

$$\sqrt{x^2+y^2}+x=4.$$

$$\sqrt{x^2+y^2}=4-x,$$

两边平方，得

$$x^2+y^2=16-8x+x^2.$$

化简整理，得

$$y^2=-8(x-2).$$

显然它是一条抛物线.

2. 极坐标方程的建立

求曲线的极坐标方程的方法和步骤，与求直角坐标方程类似，就是把曲线看作适合某种条件的点的集合或轨迹，将已知条件用曲线上点的极坐标 ρ,θ 的关系式 $\psi(\rho,\theta)=0$ 表示出来，就得到曲线的极坐标方程.

例 6　求从极点出发，倾斜角是 $\frac{\pi}{4}$ 的射线的极坐标方程.

解　设 $M(\rho,\theta)$ 为射线上任意一点，如图 10-8 所示，则射线上点的集合 $P=\left\{(\rho,\theta)\,\middle|\,\theta=\frac{\pi}{4},\rho\geqslant 0\right\}$.

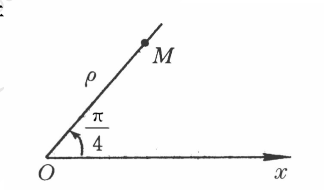


图 10-8

将已知条件用坐标表示，得

$$\theta=\frac{\pi}{4}.$$

这就是所求的射线的极坐标方程，方程中不含 ρ，说明射线上点的极坐标中的 ρ 无论取何正值，θ 对应的值都是 $\frac{\pi}{4}$.

例 7　求圆心是 $C(a,0)$，半径是 a 的圆的极坐标方程.

解　由已知条件，圆心在极轴上，圆经过极点 O. 设圆和极轴的另一个交点是 A，如图 10-9 所示，则 $|OA|=2a$.

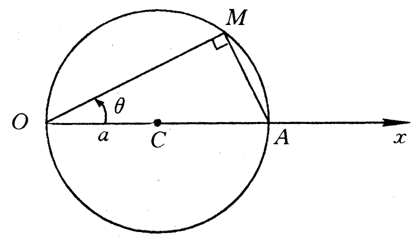


图 10-9

设 $M(\rho,\theta)$ 是圆上任意一点，则 $\triangle OMA$ 是直角三角形，则可得

$$|OM|=|OA|\cos\theta.$$

用极坐标表示已知条件，可得方程

$$\rho=2a\cos\theta.$$

这就是所求圆的极坐标方程.

3. 等速螺线

定义　当一个动点沿着一条射线做等速运动，而射线又绕着它的端点作等角速旋转时，这个动点的轨迹称为**等速螺线**（或**阿基米德螺线**）.

下面我们来建立等速螺线的极坐标方程.

如图 10-10 所示,以射线 l 的端点为极点 O,射线的初始位置为极轴 Ox,建立极坐标系.

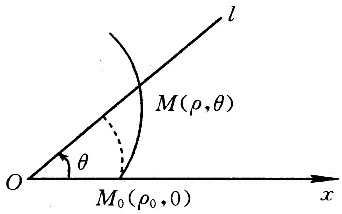


图 10-10

设曲线上动点 M 的坐标为(ρ,θ),动点在初始位置 M_0 的坐标为$(\rho_0,0)$,M 在 l 上运动的速度为 v,l 绕 O 转动的角速度为 ω.

可以看出,经过时刻 t,M 点的极径为

$$\rho=\rho_0+vt, \tag{1}$$

极角为

$$\theta=\omega t. \tag{2}$$

由(2)式,得

$$t=\frac{\theta}{\omega}. \tag{3}$$

将(3)式代入(1)式,得

$$\rho=\rho_0+\frac{v}{\omega}\theta. \tag{4}$$

令$\frac{v}{\omega}=a$,代入(4)式,得

$$\rho=\rho_0+a\theta \quad (a,\rho_0\text{ 为常量,且 } a\neq 0).$$

这就是等速螺线的极坐标方程.

在生产实际中,等速螺线的应用较广. 例如,机械传动上常用的等速凸轮,它的轮廓线就是等速螺线;又如,机床上加工零件用的夹具三爪卡盘,卡盘上的平面螺纹也是等速螺线.

例 8 由于某种需要,设计一个凸轮,轮廓线如图 10-11 所示,要求如下:

(1) 凸轮依顺时针方向绕点 O 转动,开始时从动杆接触点为 A,$|OA|=4$ cm;

(2) 当从动杆接触轮廓线 ABC 时,它被推向右方做等速直线运动,凸轮旋转角度为$\frac{11}{8}\pi$时,有最大推程 14 cm,即$|OC|=18$ cm;

(3) 当从动杆接触轮廓线 CDA 时,它向左等速退回原位.

求曲线 ABC 和 CDA 的方程.

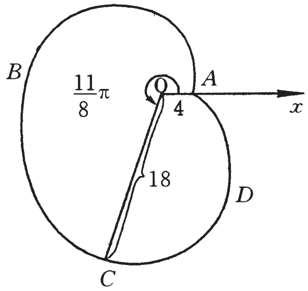


图 10-11

解 取极坐标系,如图 10-11 所示.

(1) 由于曲线 ABC 是等速螺线,设它的极坐标方程为

$$\rho=\rho_0+a\theta. \tag{1}$$

因为点 $A(4,0)$ 和点 $C\left(18,\frac{11}{8}\pi\right)$ 都在曲线上，所以

$$\begin{cases}4=\rho_0,\\ 18=\rho_0+a\cdot\frac{11}{8}\pi.\end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\rho_0=4,\quad a=\frac{112}{11\pi}.$$

代入方程(1)，得到曲线 ABC 的极坐标方程为

$$\rho=4+\frac{112}{11\pi}\theta\quad\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{11}{8}\pi\right).$$

(2) 由于曲线 CDA 也是等速螺线，设它的极坐标方程为

$$\rho=\rho_1+a_1\theta.$$

因为点 $C\left(18,\frac{11}{8}\pi\right)$ 和点 $A(4,2\pi)$ 都在曲线上，所以

$$\begin{cases}18=\rho_1+a_1\cdot\frac{11}{8}\pi,\\ 4=\rho_1+a_1\cdot 2\pi.\end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\rho_1=48.8,\quad a_1=-\frac{22.4}{\pi}.$$

因此，CDA 这段曲线的极坐标方程是

$$\rho=48.8-\frac{22.4}{\pi}\theta\quad\left(\frac{11}{8}\pi\leqslant\theta\leqslant 2\pi\right).$$

习题 10-2(A 组)

1. 在极坐标系中标出下列各点.

(1) $A\left(3,\frac{2}{3}\pi\right)$；　(2) $B\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$；　(3) $C(0,\pi)$；

(4) $D\left(3,\frac{5}{3}\pi\right)$；　(5) $E(1,\pi)$；　(6) $F\left(2,\frac{5}{4}\pi\right)$.

2. 将下列各点的极坐标化为直角坐标.

(1) $A\left(6,\frac{\pi}{6}\right)$；　(2) $B(5,0)$；　(3) $C(0,\pi)$；　(4) $D\left(2,\frac{\pi}{2}\right)$.

3. 将下列各点的直角坐标化为极坐标.

(1) $A(-5,0)$； (2) $B(0,-2)$； (3) $C(1,1)$； (4) $D(-3,3)$；

(5) $E(-1,-\sqrt{3})$； (6) $F(\sqrt{3},-1)$.

4. 将下列极坐标方程化为直角坐标方程.

(1) $\rho\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$；

(2) $\rho=-5\cos\theta$.

5. 把下列直角坐标方程化为极坐标方程.

(1) $x^2+y^2=9$； (2) $4xy=9$；

(3) $x^2+y^2-6y=0$； (4) $x^2-y^2=16$.

习题 10-2(B 组)

1. 求经过点 $A(4,0)$，并与极轴成直角的直线的极坐标方程.

2. 求经过点 $A\left(3,\frac{\pi}{2}\right)$，并与极轴平行的直线的极坐标方程.

3. 求圆心在点 $B\left(5,\frac{\pi}{2}\right)$，半径为 5 的圆的极坐标方程.

扫一扫，获取参考答案

10.3 参数方程

我们知道，对于平面上的一条曲线，在直角坐标系中可以用含有流动坐标 x 和 y 的方程来表示，在极坐标系中可以用含有流动坐标 ρ 和 θ 的方程来表示. 但在实际问题中，有些曲线用这两种方程直接来表示比较困难，而用 x 和 y（或 ρ 和 θ）分别与另一变量 t 的一组关系式来表示就比较方便，这就是本节所要讨论的参数方程.

一、参数方程的概念

先看下面的例子.

设炮弹的发射角为 α，发射的初速度为 v_0，求弹道曲线的方程(不计空气阻力).

弹道曲线是炮弹飞行的轨迹，它上面的各个点都表示炮弹发射后某个时刻的位置. 当这个时刻确定后，炮弹的位置也就确定了. 取炮口为原点，水平方向为 x 轴，建立直角坐标系，如图 10-12 所示. 设炮弹发射后的位置在点 $M(x,y)$，

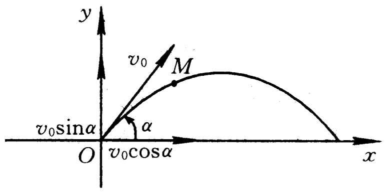


图 10-12

因为炮弹在水平方向是以 $v_0\cos\alpha$ 为速度的匀速直线运动，在竖直方向是以 $v_0\sin\alpha$ 为初速度的竖直上抛运动，根据匀速直线运动和竖直上抛运动的位移公式，得

$$\begin{cases}x=v_0\cos\alpha\cdot t,\\ y=v_0\sin\alpha\cdot t-\dfrac{1}{2}gt^2.\end{cases}\tag{1}$$

其中 g 是重力加速度（$9.8\ \text{m/s}^2$）.

当 t 取某一个允许值时，由方程组(1)就可以确定当时炮弹所在的位置，也就是说，当 t 确定时，点 $M(x,y)$ 的位置也就随着确定了. 这样建立 t 与 x，y 之间的关系不仅方便，而且可以反映变量的实际意义. 如方程组(1)中的两个方程就分别反映出炮弹飞行的水平距离、高度与时间的关系.

一般地，在取定的直角坐标系中，如果曲线上任意一点的坐标 x，y 都是某个变量 t 的函数，即

$$\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t).\end{cases}\tag{2}$$

并且对于 t 的每一允许值，由方程组(2)所确定的点 $M(x,y)$ 都在这条曲线上，那么方程组(2)就称为这条曲线的**参数方程**，联系 x，y 之间关系的变量 t 称为**参数**. 参数方程中的参数可以是有物理、几何意义的变量，也可以是没有明显意义的变量. 同样，在极坐标系中的参数方程可表示为$\begin{cases}\rho=\rho(t),\\ \theta=\theta(t).\end{cases}$

相对于参数方程来说，前面学过的直接给出曲线上点的坐标关系的方程，称为曲线的**普通方程**.

二、参数方程的作图

在所给曲线的参数方程

$$\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t)\end{cases}$$

中，先给出参数 t 的值，求出 x 和 y 的对应值，这样就确定了曲线上某些点. 将这些点连成光滑的曲线，就是参数方程的图像.

例 1 作出参数方程

$$\begin{cases}x=t^2,\\ y=2t\end{cases}$$

的图像.

解 这里,t 可以取一切实数,将 t,x 和 y 的对应值列表如下:

t	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
x	…	9	4	1	0	1	4	9	…
y	…	-6	-4	-2	0	2	4	6	…

描点作图时,可以不管表里第一行 t 的数值,只需根据 x 和 y 的值,就可以确定点的位置,图 10-13 所示为所给参数方程的图像.

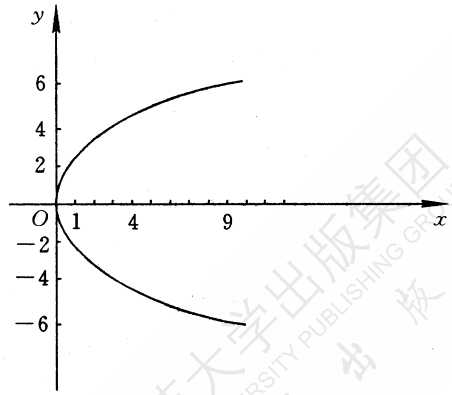


图 10-13

三、化曲线的参数方程为普通方程

参数方程和普通方程是曲线方程的不同形式,它们都表示曲线上点坐标之间的关系. 一般情况下,我们可以通过消去参数方程中的参数,得出直接表示 x,y 或 ρ,θ 之间关系的普通方程.

例 2 把参数方程

$$\begin{cases} x = \sin t, & (1) \\ y = \cos^2 t & (2) \end{cases}$$

化为普通方程,并说明它表示什么曲线.

解 将(1)式两边平方,得

$$x^2 = \sin^2 t,$$

即

$$x^2 = 1 - \cos^2 t. \tag{3}$$

再将(2)式代入(3)式,得普通方程

$$x^2 = 1 - y,$$

即

$$y = -x^2 + 1.$$

显然，它的图像是抛物线，顶点在(0,1)，对称轴为 y 轴，开口向下. 由于 $y=\cos^2 t$恒为正值或零，故参数方程的图像仅为 x 轴的上方的实线部分，如图 10-14 所示.

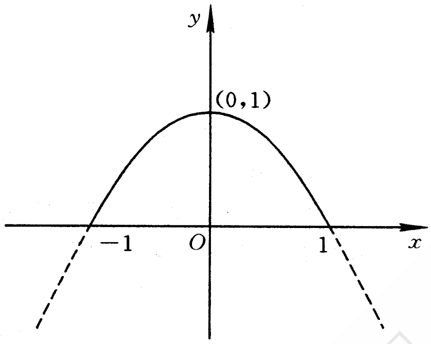


图 10-14

习题 10-3(A 组)

1. 将下列参数方程化为普通方程.

(1) $\begin{cases} x=3-2t, \\ y=-1-4t; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x=3\cos t, \\ y=5\sin t; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x=2+3\cos t, \\ y=3\sin t-1; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} x=t+\dfrac{1}{t}, \\ y=t-\dfrac{1}{t}. \end{cases}$

2. 作出参数方程$\begin{cases} x=t^2, \\ y=4t \end{cases}$的图像.

习题 10-3(B 组)

1. 设 $x=\cos t$(t 为参数)，将方程 $x^2+y^2=1$ 化为参数方程.

2. 以初速 $v_0=20$ m/s，并与水平面成 45°角的方向投掷手榴弹，若不计空气阻力，求手榴弹运动轨迹的参数方程和投掷的距离(以时刻 t 为参数).

3. 求直线$\begin{cases} x=-1+t, \\ y=1-t \end{cases}$与双曲线 $4x^2-y^2=12$ 的交点 .

扫一扫，获取参考答案

扫一扫，复习本章内容

复习题 10

1. 选择题.

(1) 平移坐标轴，将坐标原点移至 $O'(-2,1)$，则直线 $y=3x-2$ 在新坐标系 $x'O'y'$ 中的方程为(　　)；

A. $y'=3x'-7$　　B. $y'=3x'-9$

C. $y'=3x'-11$　　D. $y'=3x'-13$

(2) 平移坐标轴后，圆 $x^2+y^2+4x-4y-1=0$ 在新坐标系中的方程为 $x'^2+y'^2=9$，则新坐标系原点 O' 在原坐标系中的坐标为(　　)；

A. $(2,-2)$　　B. $(-2,2)$　　C. $(-4,4)$　　D. $(4,-4)$

(3) 将坐标轴旋转 $60°$ 后，点 $(2,-1)$ 在新坐标系中的坐标为(　　)；

A. $\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}-\sqrt{3}\right)$　　B. $\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}+\sqrt{3}\right)$

C. $\left(\sqrt{3}-\frac{1}{2},-\sqrt{3}-1\right)$　　D. $\left(\sqrt{3}+\frac{1}{2},-\sqrt{3}-1\right)$

(4) 下列的有序数对中，前一个是极坐标系下的数对，后一个是直角坐标系下的数对，表示同一个点的一组数对是(　　)；

A. $\left(4,\frac{11}{6}\pi\right)$ 和 $(2\sqrt{3},-2)$　　B. $\left(4,\frac{\pi}{6}\right)$ 和 $(-2\sqrt{3},2)$

C. $\left(4,\frac{\pi}{6}\right)$ 和 $(-2\sqrt{3},-2)$　　D. $\left(4,\frac{11}{6}\pi\right)$ 和 $(2\sqrt{3},2)$

(5) 参数方程 $\begin{cases}x=2\cos t,\\ y=4\sin t\end{cases}$ (t 是参数)表示的曲线是(　　).

A. 圆　　B. 椭圆　　C. 双曲线　　D. 抛物线

2. 填空题.

(1) 平移坐标轴，将原点移到 $O'(-1,2)$，点 A 的新坐标为 $(-4,0)$，则它的原坐标为________；

(2) 将坐标轴旋转 $-\frac{\pi}{2}$，则椭圆 $x^2+\frac{y^2}{2}=1$ 在新坐标系 $x'Oy'$ 中的方程为________；

(3) 化简参数方程 $\begin{cases}x=5\cos\theta+2,\\ y=2\sin\theta-3\end{cases}$ 为普通方程，其普通方程为________；

(4) 极坐标方程为 $\rho=\frac{1}{\cos\varphi}$ 的曲线上，极角为 $\frac{\pi}{6}$ 的点的极坐标为________；

（5）中心为 $O'(-2,1)$，长半轴长为 10，焦距为 12，焦点在平行于 x 轴的直线上的椭圆方程为________.

3. 将坐标轴旋转 30°，再平移坐标轴，将坐标原点移至 $O'(-1,1)$，求原坐标系中点 $(1,2)$ 在新坐标系中的坐标.

4. 把下列极坐标方程化为直角坐标方程.

（1）$\rho=\dfrac{5}{\sin\theta}$；　　（2）$\rho=\dfrac{6}{\rho-2\cos\theta}$.

5. 把下列直角坐标方程化为极坐标方程.

（1）$x^2+y^2=16$；　　（2）$xy=a$；　　（3）$x^2+y^2+2y=0$.

6. 求下列各图形的极坐标方程.

（1）经过点 $A\left(3,\dfrac{\pi}{3}\right)$ 且平行于极轴的直线；

（2）经过点 $A\left(2,\dfrac{\pi}{4}\right)$ 且垂直于极轴的直线；

（3）圆心在点 $A(5,\pi)$ 且半径等于 5 的圆.

7. 设 t 和 θ 是参数，将下列各参数方程化为普通方程，并说明它表示什么曲线.

（1）$\begin{cases}x=t,\\y=t^2+2;\end{cases}$　　（2）$\begin{cases}x=2\cos\theta,\\y=2\sin\theta.\end{cases}$

8. 已知弹道曲线的参数方程为

$$\begin{cases}x=v_0t\cos\alpha,\\y=v_0t\sin\alpha-\dfrac{1}{2}gt^2.\end{cases}$$

（1）求炮弹从发射到落回地面所需的时间；

（2）求炮弹到达的最大高度.

扫一扫，获取参考答案

［阅读材料 10］

几种常见曲线的参数方程

机械加工和数控编程常遇到的除了直线和椭圆外，还有一些齿轮轮廓曲线，如圆的渐开线、摆线等. 下面我们就来讨论一些常见曲线的参数方程.

1. 直线

如图 10-15 所示，已知直线 l 过点 $M_0(a,b)$，倾斜角为 θ. 设点 $M_0(a,b)$ 到

直线上任意一点 $M(x,y)$ 的位移 t 为参数，则有

$$x = OB = OA + AB = a + t\cos\theta,$$

$$y = BM = BC + CM = AM_0 + CM = b + t\sin\theta.$$

因此，直线 l 的参数方程为

$$\begin{cases} x = a + t\cos\theta, \\ y = b + t\sin\theta, \end{cases} \text{其中 } t \text{ 为参数.}$$

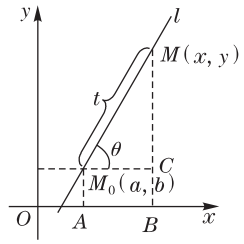


图 10-15

2. 椭圆

如图 10-16 所示，已知椭圆的中心在原点，长轴为 $2a$，短轴为 $2b$. 以原点为圆心，分别以 a 和 b 为半径画两圆，直线 OA 与两圆的交点分别为 A 和 B. 设以 x 正半轴为始边，以角 θ 为参数. 则 $OA = a, OB = b$，

$$x = OD = OA\cos\theta = a\cos\theta,$$

$$y = DM = CB = OB\sin\theta = b\sin\theta.$$

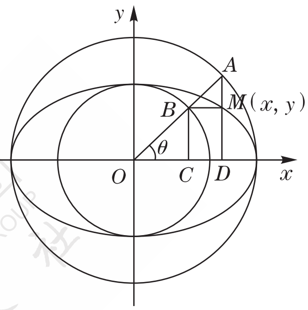


图 10-16

因此，椭圆的参数方程为

$$\begin{cases} x = a\cos\theta, \\ y = b\sin\theta. \end{cases}$$

特别地，若取 $a = b = r$，则得到圆的参数方程为

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta. \end{cases}$$

3. 圆的渐开线

如图 10-17 所示，把一条没有弹性的细绳绕在一个定圆上，拉开绳子的一端并拉直，使绳子与圆周始终相切，绳子端点的轨迹就是一条曲线，这条曲线叫作**圆的渐开线**，这个定圆叫作**渐开线的基圆**.

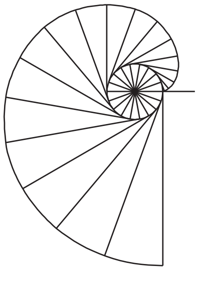


图 10-17

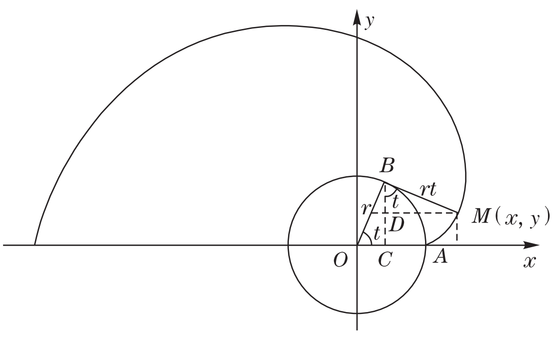


图 10-18

如图 10-18 所示，设基圆的半径为 r，点 $M(x, y)$ 是圆的渐开线上的任意一点，圆心角 t（单位：弧度）为参数. 由定义知，线段 BM 的长度等于弧 AB 的长度，即 $|BM| = rt$. 故有

$$x = OE = OC + CE = OC + DM = r\cos t + rt\sin t = r(\cos t + t\sin t),$$

$$y = EM = CD = CB - DB = r\sin t - rt\cos t = r(\sin t - t\cos t).$$

因此，圆的渐开线的参数方程为

$$\begin{cases} x = r(\cos t + t\sin t), \\ y = r(\sin t - t\cos t), \end{cases} \text{其中 } t \text{ 为参数.}$$

注意：圆的渐开线广泛应用于齿轮的啮合，齿轮的受力总是沿着与基圆相切的方向.

4. 摆线

如图 10-19 所示，一个定圆在一条定直线上作无滑动滚动时，圆周上一点的轨迹叫作**摆线**（或**旋轮线**）.

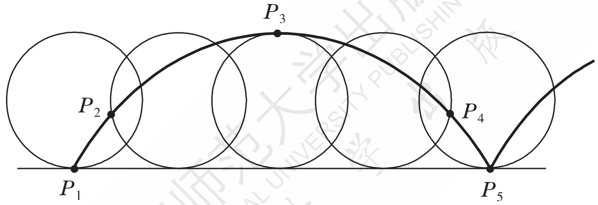


图 10-19

设已知动圆的半径为 r，取动圆滚动所沿的直线为 x 轴，圆上定点 M 落在直线上的位置为坐标原点，建立直角坐标系，如图 10-20 所示.

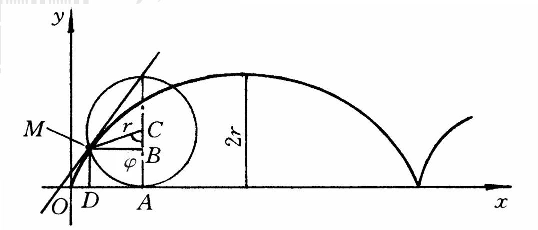


图 10-20

设圆在运动中任一位置时圆心为 C，并与 x 轴相切于 A 点，圆上的定点 M 的坐标为 (x, y)，作 $MB \perp AC$，$\angle MCB = \varphi$ 为参数，于是得点 M 的坐标为

$$x = OD = OA - DA = OA - MB,$$

$$y = DM = AC - BC.$$

因为 $OA = \overset{\frown}{AM} = r\varphi$，$AC = r$，$MB = r\sin\varphi$，$BC = r\cos\varphi$，所以

$$\begin{cases} x = r(\varphi - \sin\varphi), \\ y = r(1 - \cos\varphi). \end{cases}$$

这就是摆线的参数方程，参数 φ 是圆的半径所转过的角度，称为滚动角. 当参数 φ 从 0 变化到 2π 时，M 就描绘出摆线的一拱，如图 10-20 所示，拱高为 $2r$，拱宽为 $2\pi r$.

我们把上述问题稍加改变一下：一个人在他的自行车的一根辐条上安装了一颗发光的小电珠，夜晚当他骑车行进时，这颗发光的小电珠在黑夜中描绘出一条什么样的曲线呢？

将这个问题变成数学问题就是：一个圆沿着一条直线作无滑动的滚动时，求圆所在的平面内与动圆固定地连接在一起的圆内的一定点 M 的轨迹方程. 这个轨迹称为短幅摆线，我们可以同上得到它的参数方程

$$\begin{cases} x=r\varphi-a\sin\varphi, \\ y=r-a\cos\varphi. \end{cases}$$

其中，φ 为参数，r 为动圆的半径，a 为圆内定点 M 与圆心的距离，且 $a<r$，如图 10-21 所示.

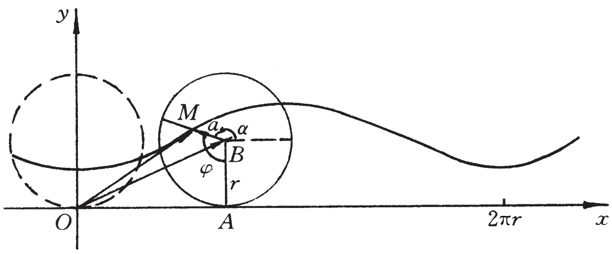


图 10-21

类似地，一个圆在一条直线上无滑动地滚动时，圆所在平面内与动圆固定地连接在一起的圆外一定点 M 的轨迹称为长幅摆线，它的参数方程是

$$\begin{cases} x=r\varphi-a\sin\varphi, \\ y=r-a\cos\varphi. \end{cases}$$

其中，φ 为参数，r 为动圆的半径，a 为圆外定点 M 与圆心的距离，且 $a>r$，如图 10-22 所示. 长幅摆线自己绕成的许多小圈叫作绕扣.

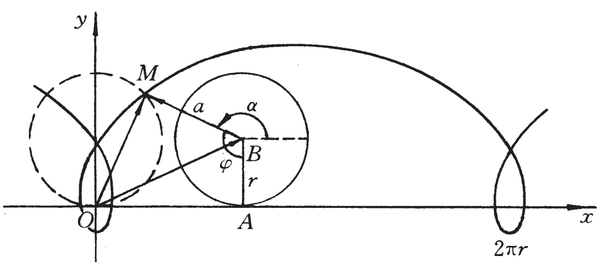


图 10-22

短幅摆线和长幅摆线统称为变幅摆线，它们是当动圆沿着直线无滑动地滚动时动圆所在平面内与动圆固定地连接在一起，但不在圆周上的一定点 M 运动的轨迹. 当 M 在圆内时其轨迹为短幅摆线，M 在圆外时其轨迹为长幅摆线. 变幅摆线的参数方程为

$$\begin{cases} x=r\varphi-a\sin\varphi, \\ y=r-a\cos\varphi, \end{cases} \quad \text{其中 } \varphi \text{ 为参数.}$$

当 $a<r$ 时是短幅摆线，当 $a>r$ 时是长幅摆线，当 $a=r$ 时则变为普通的摆线.

长幅摆线在农业机械中常常用到. 卧式旋耕机的每把刀片画出的就是一条长幅摆线，而且它的绕扣部分很大，其工作原理如图 10-23 所示. 调整旋转轴的高度，可以使刀片在绕扣最宽的地方切入土中，翻松绕扣下半截的泥土后再露出地面，四把刀片画出的四条长幅摆线顺次排开，绕扣部分互相衔接，因此不致发生漏耕现象. 试想，如果刀片的轨迹不是长幅摆线而是普通摆线或短幅摆线，还能进行翻土作业吗？

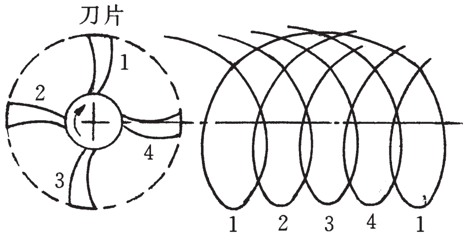


图 10-23

第 10 章单元自测

1. 填空题.

（1）平移坐标轴，把原点移到 $O'(3,-2)$，则点 $(-2,3)$ 在新坐标系中的坐标为________；

（2）点 $\left(5,-\frac{5}{3}\pi\right)$ 的直角坐标为______，点 $(1,-1)$ 的极坐标为______；

（3）经过直角坐标为 $(0,b)$ 的点，且倾斜角是 α 的直线的极坐标方程是______；

（4）$\rho=-4\sin\theta$ 的直角坐标方程是______；

（5）参数方程 $\begin{cases} x=\sqrt{3}\cos^2\theta, \\ y=\sin^2\theta \end{cases}$ 的普通方程是______.

2. 选择题.

（1）与 (ρ,θ) 表示同一点的坐标是（　　）；

A. $(\rho,\pi+\theta)$　　B. $(-\rho,-\theta)$　　C. $(-\rho,\theta)$　　D. $(\rho,2\pi+\theta)$

(2) 极坐标方程 $\rho(\sin\theta+\cos\theta)=2$ 表示的曲线是(   );

A. 圆　　B. 椭圆　　C. 直线　　D. 双曲线

(3) 如图 10-24 所示,曲线的极坐标方程是(   );

A. $\rho=5\cos\theta$　　B. $\rho=5\sin\theta$

C. $\rho=10\sin\theta$　　D. $\rho=10\cos\theta$

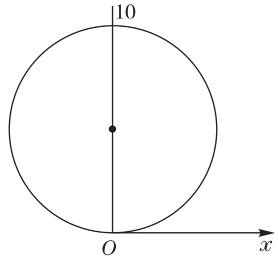


图 10-24

(4) 参数方程 $\begin{cases}x=t+\dfrac{2}{t},\\ y=t-\dfrac{2}{t}\end{cases}$ 表示的曲线是(   );

A. 抛物线　　B. 圆　　C. 椭圆　　D. 双曲线

(5) 椭圆 $\begin{cases}x=2\cos\theta\\ y=5\sin\theta\end{cases}$ 的焦距等于(   );

A. $\sqrt{21}$　　B. $2\sqrt{21}$　　C. $\sqrt{29}$　　D. $2\sqrt{29}$

(6) 参数方程 $\begin{cases}x=t^2+\dfrac{1}{t^2},\\ y=t-\dfrac{1}{t}\end{cases}$ 的普通方程是(   ).

A. $y^2=2x$　　B. $y^2=x-2$　　C. $y^2=x-4$　　D. $x^2+y^2=4$

3. 将坐标轴旋转 $\dfrac{\pi}{4}$,求曲线 $xy=1$ 在新坐标系 $x'oy'$ 中的方程.

4. 将下列极坐标方程化为直角坐标方程.

(1) $\rho^2=\dfrac{2}{\sin 2\theta}$;　　(2) $\rho\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$.

5. 将下列参数方程化为普通方程.

(1) $\begin{cases}x=3t,\\ y=2t^2;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}x=3\sin\theta,\\ y=2\tan\theta.\end{cases}$

6. 求圆心在 $\left(2,\dfrac{\pi}{4}\right)$,半径为 2 的圆的极坐标方程.

扫一扫,获取参考答案

第 11 章

平面向量　复数

向量和复数是沟通代数、几何、三角等内容的桥梁，它们都是研究力学、电学和其他自然科学的有效工具. 本章主要学习向量和复数的概念及基本运算. 为方便起见，本章只在平面中讨论向量，因此，所研究的向量都是平面向量.

11.1　平面向量的概念

一、向量的定义

在物理学和其他一些学科中，经常遇到一些量，如距离、时间、面积、质量等，在选定度量单位后，就可以用一个实数确切地表示它们，这种只有大小的量称为数量或标量. 另外一些量，它们不仅有大小，还有方向.

下面以物理学中的位移为例来说明这类量的一些性质.

一质点由位置 A 位移："北偏东 30°，3 个单位"，到达 B 点（如图 11-1 所示）. "北偏东"表示位移的方向，"3 个单位"表示位移的距离.

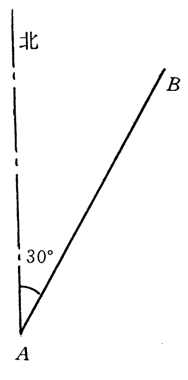


图 11-1

定义　既有大小又有方向的量称为**向量**或**矢量**. 向量的大小称为该向量的**模**. 以 A 为起点，B 为终点的向量常记为$\overline{AB}$，也可以用一个小写字母上加箭头$\vec{a}$，$\vec{i}$，$\vec{v}$或用一个黑体字 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{v}$ 等来表示. 向量的模记为$|\overline{AB}|$或$|\boldsymbol{a}|$.

向量的例子很多，例如，力、速度等都是向量. 下面介绍两个特殊向量.

零向量：模等于零的向量称为零向量，记为 $\mathbf{0}$，零

向量的方向不确定.

单位向量:模等于 1 的向量称为单位向量.

二、平行向量的定义和符号

定义　两个非零向量,若它们方向相同或相反,则称这两个向量为**平行向量**,记为$\overline{AB}//\overline{CD}$或$\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$,两平行向量也称为**共线向量**(如图 11-2 所示).

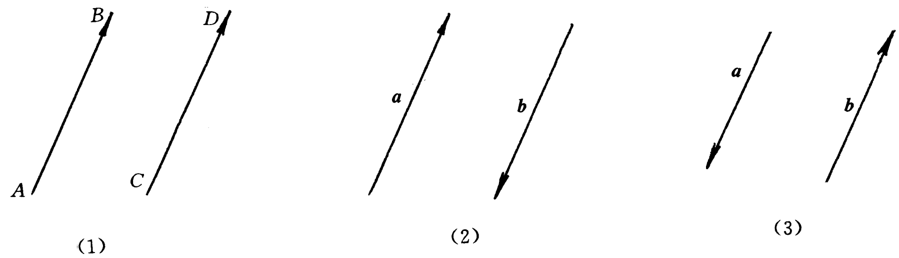


图 11-2

三、两向量相等的定义和负向量的定义

1. 相等向量

定义　若两个向量大小相等且方向相同,则称这两个**向量相等**. 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 相等记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}$. 通过平移可以完全重合的向量视为同一向量.

如图 11-3 所示:$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}$,$\boldsymbol{d}=\boldsymbol{b}$,如图 11-4 所示:$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{b}$.

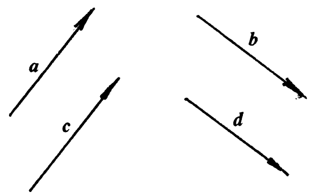


图 11-3

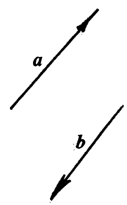


图 11-4

2. 负向量

定义　两个大小相等、方向相反的向量互称为**负向量**或互为**相反向量**,记为 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$(如图 11-4 所示).

例　如图 11-5 所示,设 O 是正六边形 $ABCDEF$ 的中心,分别写出与向量$\overline{OA}$、$\overline{OB}$、$\overline{OC}$相等的向量,写出与$\overline{AF}$、$\overline{AB}$平行的向量及负向量.

解 因为$|\overline{OA}|=|\overline{DO}|=|\overline{CB}|$，且$\overline{OA}$、$\overline{DO}$、$\overline{CB}$的方向相同，所以$\overline{OA}=\overline{CB}=\overline{DO}$.

同理，$\overline{OB}=\overline{DC}=\overline{EO}$，$\overline{OC}=\overline{AB}=\overline{FO}=\overline{ED}$；

$\overline{AF}//\overline{OB}//\overline{DC}//\overline{EO}$，

$\overline{AB}//\overline{OC}//\overline{FO}//\overline{ED}$；

$\overline{AF}=-\overline{OB}=-\overline{DC}=-\overline{EO}$，

$\overline{AB}$无负向量.

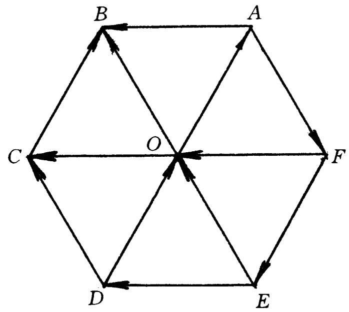


图 11-5

习题 11-1(A 组)

1. 一人从点 A 出发，向东走 500 m 到达点 B，接着向东偏北 30°走 300 m 到达点 C，然后再向东北走 100 m 到达点 D，选择适当的比例尺，用向量表示这个人的位移.

2. 已知 D,E,F 是$\triangle ABC$ 各边的中点，分别写出图 11-6 中与$\overline{DE}$、$\overline{EF}$、$\overline{FD}$相等的向量.

3. 如果$\overline{AA'}=\boldsymbol{a}$，$\overline{BB'}=\boldsymbol{b}$，且 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$，那么 A、B、B'、A'的连线能构成平行四边形吗？为什么？反之，如果 $ABB'A'$是平行四边形，那么$\overline{AA'}=\overline{BB'}$吗？

4. 如果 $ABCDEF$ 为正六边形(如图 11-7 所示)，中心为 O，试写出：

(1) $\overline{AB}$向量的相等向量；

(2) $\overline{OA}$向量的相反向量.

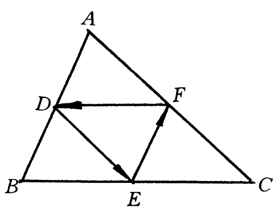


图 11-6

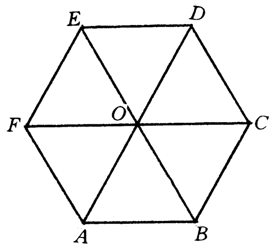


图 11-7

习题 11-1(B 组)

1. 试判断下列说法是否正确 .

(1) 设有两个向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$，若$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

(2) 设有两个向量 $\boldsymbol{c}$,$\boldsymbol{d}$，若$|\boldsymbol{c}|>|\boldsymbol{d}|$，则 $\boldsymbol{c}>\boldsymbol{d}$.

(3) 任何向量都有确定的大小和方向 .

2. 写出图 11-8 中与向量$\overline{AE}$相等的向量和相反的向量,写出与向量$\overline{AE}$共线的向量.

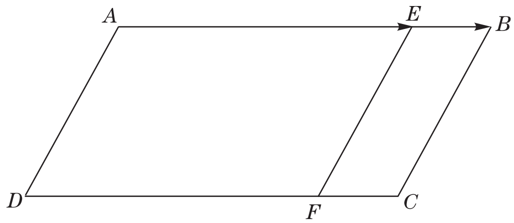


图 11-8

扫一扫，获取参考答案

3. 四边形 $ABCD$ 中,若$\overline{AD}=\overline{BC}$,试证明四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

11.2　向量的线性运算

数量可以进行加减乘除等运算,向量也可以进行运算. 在物理学中,对力、速度等向量可按照一定的规则进行加、减等运算. 同样,对一般定义下的向量,也可以进行类似的运算. 下面介绍向量的加、减、数乘运算,这些运算统称为向量的线性运算.

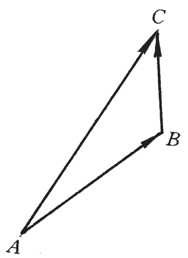
一、向量的加法

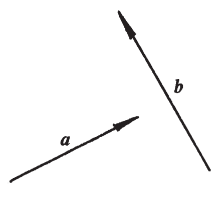
先观察下例:一质点从点 A 位移到点 B,又由点 B 位移到点 C,那么一定存在一个从点 A 到点 C 的位移,与两次连续位移的结果相同,如图 11-9 所示,这时我们说:质点从 A 到 C 的位移是质点 A 到 B,再由 B 到 C 两次位移的和.

定义　设向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,在平面上任取一点 A,作$\overline{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overline{BC}=\boldsymbol{b}$,作向量$\overline{AC}$,则向量$\overline{AC}$称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**和**(或**和向量**),记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,即

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$$

如图 11-10 所示.





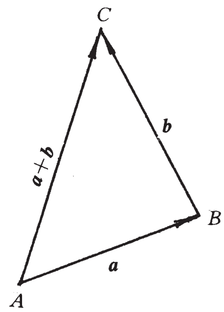


图 11-9　　**图 11-10**

1. 加法的三角形法则

上述求和的定义即为向量加法的三角形法则，即：经平移使向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点与向量 $\boldsymbol{b}$ 的始点重合，则这时向量 $\boldsymbol{a}$ 的始点到向量 $\boldsymbol{b}$ 的终点的向量，即为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

2. 加法的平行四边形法则

设向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 为两个不在同一条直线上的向量，把它们平移，使其始点与 A 点重合，得 $\overline{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overline{AD}=\boldsymbol{b}$，并以 $\overline{AB}$，$\overline{AD}$ 为邻边作平行四边形，则对角线向量 $\overline{AC}$ 即为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$（如图 11-11 所示）.

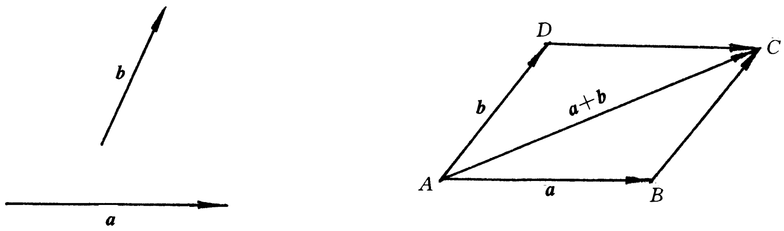


图 11-11

必须注意：

(1) 求两个在同一直线上的向量之和只可用三角形法则；

(2) 三角形法则同样可以用于求多个向量之和. 例如，$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}=\overline{AD}$.

例 1 设向量 $\boldsymbol{a}$，模为 2，方向水平向右，向量 $\boldsymbol{b}$，模为 3，方向水平向左，作出向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

作法 在平面上任取一点 A，作 $\overline{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overline{BC}=\boldsymbol{b}$，$\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{BC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，方向水平向左，模为 1（如图 11-12 所示）.

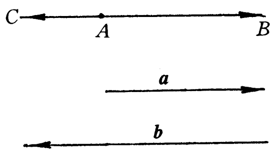


图 11-12

3. 向量加法的运算性质

(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$；

(2) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$（交换律）；

(3) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$（结合律）.

例 2　一艘船先向东走 3 km，接着再向北走 3 km，求两次位移的和.

解　作$\overline{AB}$表示向东走 3 km，$\overline{BC}$表示向北走 3 km，则$\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{BC}$表示两次位移和(如图 11-13 所示).

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$|\overline{AB}|=3$，$|\overline{BC}|=3$，

$|\overline{AC}|=\sqrt{|\overline{AB}|^2+|\overline{BC}|^2}=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$(km).

且$\overline{AB}$与$\overline{AC}$的夹角为 $45°$.

所以两次位移的和是向东北走 $3\sqrt{2}$ km.

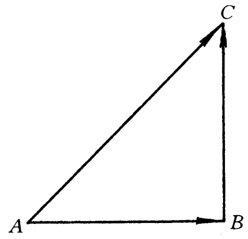


图 11-13

二、向量的减法

定义　向量 $\boldsymbol{a}$ 加上向量 $\boldsymbol{b}$ 的相反向量，称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差，记为 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

减法的三角形法则：把两个向量的始点放在一起，则这两个向量的差是减向量的终点到被减向量的终点的向量，如图11-14 所示，$\overline{AC}-\overline{AD}=\overline{DC}$.

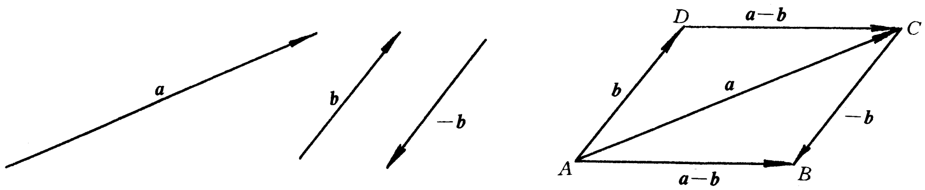


图 11-14

例 3　如图 11-15 所示，已知 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$，求作 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$.

作法　如图 11-16 所示，在平面上任取一点 A，作$\overline{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overline{AC}=\boldsymbol{b}$，则 $\overline{CB}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

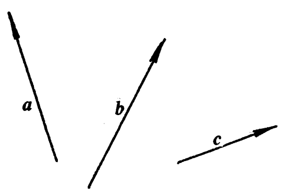


图 11-15

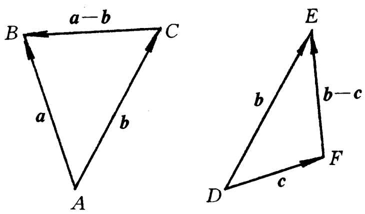


图 11-16

在平面上任取一点 D，作$\overline{DE}=\boldsymbol{b}$，$\overline{DF}=\boldsymbol{c}$，则$\overline{FE}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$.

三、向量的数乘运算

先观察下面的例子.

已知非零向量 $\boldsymbol{a}$，可作出：

（1）$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}$；　　　　　（2）$(-\boldsymbol{a})+(-\boldsymbol{a})+(-\boldsymbol{a})$.

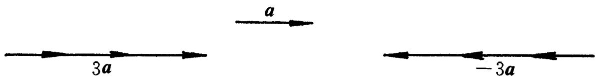


图 11-17

3 个 $\boldsymbol{a}$ 连加，记作 $3\boldsymbol{a}$，3 个 $(-\boldsymbol{a})$ 连加记作 $-3\boldsymbol{a}$. 由图 11-17 可以看到，3 个 $\boldsymbol{a}$ 连加是一向量，它的长度等于 $3|\boldsymbol{a}|$，方向与 $\boldsymbol{a}$ 相同；3 个 $(-\boldsymbol{a})$ 连加是一个向量，它的长度等于 $3|\boldsymbol{a}|$，方向与 $\boldsymbol{a}$ 相反.

由上面分析，引入数乘向量的定义.

定义　实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积是一个向量，记作 $\lambda\boldsymbol{a}$，其长度 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$. 当 $\lambda>0$ 时，与 $\boldsymbol{a}$ 同方向；当 $\lambda<0$ 时，与 $\boldsymbol{a}$ 反方向（如图11-18 所示）.

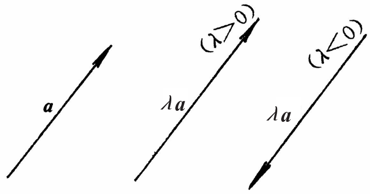


图 11-18

$\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$. $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

$\lambda\boldsymbol{a}$ 中的实数 λ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的系数. 数乘向量的几何意义是：把向量 $\boldsymbol{a}$ 沿 $\boldsymbol{a}$ 的方向或 $\boldsymbol{a}$ 的反方向放大或缩小.

数乘向量运算满足下列运算律：

设 λ,μ 为实数，则

（1）$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$；

（2）$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$；

（3）$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

例 4　计算下列各式：

（1）$(-3)\times\dfrac{1}{3}\boldsymbol{a}$；　　（2）$3(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-4(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$；

（3）$(\lambda+\mu)(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-(\lambda-\mu)(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.

解　（1）$(-3)\times\dfrac{1}{3}\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$.

（2）$3(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-4(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=3\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-4\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{a}+7\boldsymbol{b}$.

（3）
$$\begin{aligned}&(\lambda+\mu)(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-(\lambda-\mu)(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\\=&(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}+(\lambda+\mu)\boldsymbol{b}-(\lambda-\mu)\boldsymbol{a}+(\lambda-\mu)\boldsymbol{b}\\=&\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}+\mu\boldsymbol{b}-\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}-\mu\boldsymbol{b}\\=&2\mu\boldsymbol{a}+2\lambda\boldsymbol{b}.\end{aligned}$$

例 5　设 $\boldsymbol{x}$ 是未知向量，解方程

$$4(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a})+3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{0}.$$

解　原方程变形为

$$4\boldsymbol{x}+4\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{x}-3\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0},$$
$$7\boldsymbol{x}=3\boldsymbol{b}-4\boldsymbol{a},$$
$$\boldsymbol{x}=\frac{3}{7}\boldsymbol{b}-\frac{4}{7}\boldsymbol{a}.$$

由上节知两向量平行即共线向量，进一步由本节可知，若向量 $\boldsymbol{a}\neq 0$，任取 $\lambda\in\mathbf{R}$ $(\lambda\neq 0)$，则$\lambda\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{a}$. 反之，设 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，若 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向，取$\lambda=\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}>0$，显然，$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，又 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向，即得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，若 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向，取 $\lambda=\frac{-|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}<0$，显然 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，又 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向，即得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

综合以上分析可得：

定理　若非零向量 $\boldsymbol{b}$ 与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 共线，则有且只有一个实数 λ $(\lambda\neq 0)$，使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，反之也成立.

例 6　如图 11-19 所示，$\triangle ABC$ 中，已知$\overline{AB}=3\,\overline{AD}$，$\overline{AC}=3\,\overline{AE}$，试证：$\overline{DE}$与$\overline{BC}$共线.

证明　$\overline{BC}=\overline{AC}-\overline{AB}=3\,\overline{AE}-3\,\overline{AD}$

$=3(\overline{AE}-\overline{AD})=3\,\overline{DE}$，

所以，$\overline{DE}$与$\overline{BC}$共线.

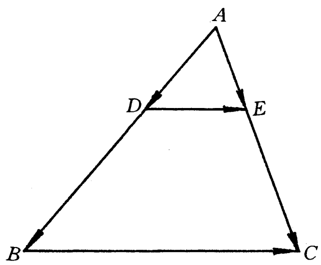


图 11-19

习题 11-2(A 组)

1. 填空题.

(1) $\overline{AB}-\overline{AC}+\overline{BD}-\overline{CD}=$________________;

(2) $\overline{AB}+\overline{MB}+\overline{BO}+\overline{OM}=$________________;

(3) $\overline{MB}+\overline{AC}+\overline{BM}=$________________.

2. 一轮渡向北以航速 20 km/h 航行，此时东风风速 5 m/s，用作图法求轮渡的实际航行速度和方向.

3. 求证：在$\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=\boldsymbol{0}$.

4. 已知$\triangle ABC$，D 为边 BC 的中点，求证：

(1) $\overline{AD}=\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{AC})$；

(2) $3\,\overline{AB}+2\,\overline{BC}+\overline{CA}=2\,\overline{AD}$.

5. 化简.

(1) $3(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})+2(-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})-4(3\boldsymbol{a})$；

（2）$\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\frac{1}{3}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})+\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a})$.

6. 判断下列向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 是否共线.

（1）$\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{e}$，$\boldsymbol{b}=-4\boldsymbol{e}$；

（2）$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$　（$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 不共线）.

习题 11-2(B 组)

1. ▱$ABCD$ 中对角线 AC 与 BD 相交于点 O，已知 $\overline{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overline{AD}=\boldsymbol{b}$. 试用 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\overline{OB}$、$\overline{OC}$、$\overline{OD}$.

2. 填空题.

（1）$\overline{AB}+\overline{CB}+\overline{BD}+\overline{DC}=$______________________________；

（2）$\overline{OA}+\overline{OC}+\overline{BO}+\overline{CO}=$______________________________；

（3）$\overline{AB}-\overline{AD}-\overline{DC}=$______________________________.

3. 化简.

（1）$6(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})-4(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c})$；

（2）$\frac{1}{2}\left[(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})-\frac{1}{2}(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+4\boldsymbol{a}\right]$.

4. 判断下列向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 是否共线.

（1）$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{e}$；

（2）$\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{b}=-4\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2$（$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 不共线）.

扫一扫，获取参考答案

11.3　向量的坐标表示

一、平面直角坐标系下的位置向量

1. 坐标轴上的单位向量

在平面直角坐标系 xOy 中，x 轴正向的单位向量和 y 轴正向的单位向量称为坐标轴上的单位向量，分别记为 $\boldsymbol{i}$（或 $\boldsymbol{e}_x$）和 $\boldsymbol{j}$（或 $\boldsymbol{e}_y$），如图 11-20 所示.

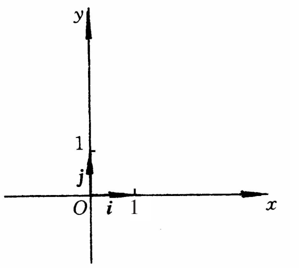


图 11-20

2. 位置向量及坐标表示

始点在坐标原点的向量称为**位置向量**. 每个位置向量 $\overline{OP}$，由其终点 P 决定，平面位置向量集合与平面点集一一对应，如图 11-21 所示. 在坐标系 xOy 上，过

P 点分别作 x 轴和 y 轴的垂线，分别交 x 轴、y 轴于点 M 和点 N，设 P 点的坐标为 (x, y)，显然有 $M(x, 0)$，$N(0, y)$，由加法的平行四边形法则得

$$\overline{OP}=\overline{OM}+\overline{ON}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}.$$

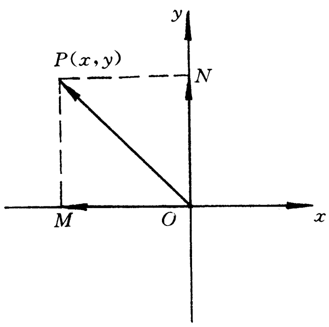


图 11-21

我们习惯称 (x, y) 为位置向量 $\overline{OP}$ 在直角坐标系中的坐标，x 为 $\overline{OP}$ 的横坐标，y 为 $\overline{OP}$ 的纵坐标，从而可记 $\overline{OP}=(x, y)$，特别地：$\mathbf{0}=0\boldsymbol{i}+0\boldsymbol{j}$ 或 $\mathbf{0}=(0,0)$，所以位置向量的坐标即为其终点的坐标.

例 1 如图 11-22 所示，用单位向量 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ 分别表示 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$，并写出各自的坐标.

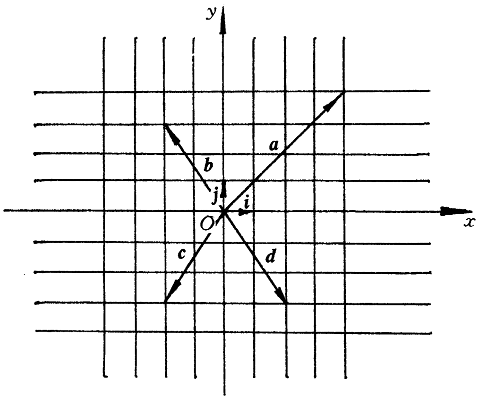


图 11-22

解 $\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}=(4,4)$；

$\boldsymbol{b}=-2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}=(-2,3)$；

$\boldsymbol{c}=-2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}=(-2,-3)$；

$\boldsymbol{d}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}=(2,-3)$.

二、位置向量的线性运算的坐标表示

在直角坐标系 xOy 中，设位置向量 $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}&=(a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j})+(b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j})\\&=(a_1+b_1)\boldsymbol{i}+(a_2+b_2)\boldsymbol{j};\\\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}&=(a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j})-(b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j})\\&=(a_1-b_1)\boldsymbol{i}+(a_2-b_2)\boldsymbol{j};\\\lambda\boldsymbol{a}&=\lambda(a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j})=\lambda a_1\boldsymbol{i}+\lambda a_2\boldsymbol{j}.\end{aligned}$$

上述位置向量的坐标运算公式，也可以用语言来表述：

两个向量的和或者差的坐标等于两个向量相应坐标的和或者差.

数乘向量的坐标等于数乘以向量相应坐标的积.

上面结果还可写成更简单的形式：

$$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(a_1\pm b_1, a_2\pm b_2);$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_1, \lambda a_2).$$

例 2　已知 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{b}=-3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{c}=3\boldsymbol{i}-7\boldsymbol{j}$，求 $3\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}$，$2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c}$.

解　$$\begin{aligned}3\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}&=3(2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})-4(-3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j})\\&=18\boldsymbol{i}-13\boldsymbol{j}=(18,-13);\end{aligned}$$

或 $$\begin{aligned}3\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}&=3(2,1)-4(-3,4)\\&=(6,3)-(-12,16)\\&=(18,-13)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c}&=2(2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})-(-3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j})+3(3\boldsymbol{i}-7\boldsymbol{j})\\&=16\boldsymbol{i}-23\boldsymbol{j}=(16,-23);\end{aligned}$$

或 $$\begin{aligned}2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c}&=2(2,1)-(-3,4)+3(3,-7)\\&=(4,2)-(-3,4)+(9,-21)\\&=(16,-23)\end{aligned}$$

三、平面向量的坐标表示

设平面向量$\overline{AB}$，始点坐标和终点坐标分别为 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，如图11-23 所示，由位置向量的减法法则可得

$$\begin{aligned}\overline{AB}&=\overline{OB}-\overline{OA}\\&=(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j})-(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j})\\&=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}\\&=(x_2-x_1, y_2-y_1),\end{aligned}$$

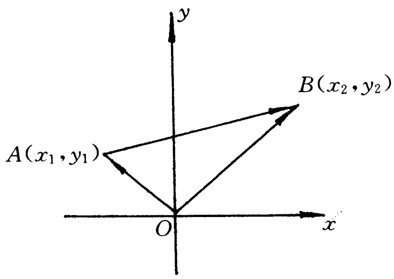


图 11-23

即一个向量的坐标等于向量的终点坐标减去始点的坐标.

例 3　已知▱$ABCD$ 的三个顶点 $A(-2,1)$，$B(-1,3)$，$C(3,4)$，求顶点 D 的坐标（如图 11-24 所示）.

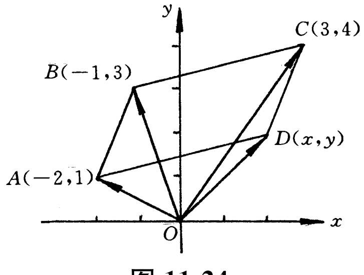


图 11-24

解　因为 $$\begin{aligned}\overline{OD}&=\overline{OA}+\overline{AD}=\overline{OA}+\overline{BC}\\&=\overline{OA}+\overline{OC}-\overline{OB}\\&=(-2,1)+(3,4)-(-1,3)\\&=(2,2).\end{aligned}$$

所以，点 D 的坐标为$(2,2)$.

例 4　已知 $A(-2,1)$，$B(1,3)$，求线段 AB 的中点 M 和三等分点 P、Q 的坐标(如图 11-25 所示).

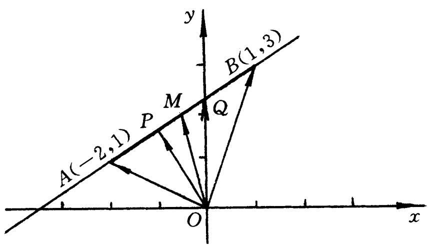


图 11-25

解　因为 $\overline{AB}=(1,3)-(-2,1)=(3,2)$，

所以 $\overline{OM}=\overline{OA}+\frac{1}{2}\overline{AB}=(-2,1)+\frac{1}{2}(3,2)=\left(-\frac{1}{2},2\right)$，

$\overline{OP}=\overline{OA}+\frac{1}{3}\overline{AB}=(-2,1)+\frac{1}{3}(3,2)=\left(-1,\frac{5}{3}\right)$，

$\overline{OQ}=\overline{OA}+\frac{2}{3}\overline{AB}=(-2,1)+\frac{2}{3}(3,2)=\left(0,\frac{7}{3}\right)$，

即所求的坐标为 $M\left(-\frac{1}{2},2\right)$，$P\left(-1,\frac{5}{3}\right)$，$Q\left(0,\frac{7}{3}\right)$.

四、平行向量的坐标表示

设 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2)$，则条件 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$ 可化为 $(b_1,b_2)=\lambda(a_1,a_2)$，故有

$$b_1=\lambda a_1,b_2=\lambda a_2.$$

于是

$$b_1\lambda a_2=\lambda a_1 b_2,$$

当 $\lambda\neq 0$ 时，有

$$a_2b_1-a_1b_2=0.$$

由 11.2 节定理知，对于非零向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow$存在实数 $\lambda\neq 0$，使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$. 由此得到

$$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow a_2b_1-a_1b_2=0.$$

特别地，当 $a_1\neq 0$，$a_2\neq 0$ 时，有

$$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}.$$

例 5　设 $\boldsymbol{a}=(1,3)$，$\boldsymbol{b}=(2,6)$，判断向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 是否平行.

解法 1　由于 $3\times 2-1\times 6=0$，所以 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.

解法 2　由于 $\frac{2}{1}=\frac{6}{3}$，所以 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.

例 6　已知 $A(-1,-1)$，$B(1,3)$，$C(2,5)$，求证：A，B，C 三点共线.

证明　因为 $\overrightarrow{AB}=(1,3)-(-1,-1)=(2,4)$，

$\overrightarrow{AC}=(2,5)-(-1,-1)=(3,6)$，

而 $2\times6-3\times4=0$，所以

$$\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{AC}.$$

又因为直线 AB、AC 有公共点 A，所以 A，B，C 三点共线.

习题 11-3（A 组）

1. 已知 $\square ABCD$ 的顶点 $A(-1,-2)$，$B(3,-1)$，$C(3,1)$，求顶点 D 的坐标.

2. 已知 $A(-3,-2)$，$B(3,4)$，求线段 AB 的中点和三等分点的坐标.

3. 已知 A 点及向量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标，求点 B 的坐标.

(1) $A(-1,5)$，$\overrightarrow{AB}=(1,3)$；　　(2) $A(3,7)$，$\overrightarrow{AB}=(-3,-5)$.

4. 已知 $O(0,0)$，$A(1,2)$，$B(4,5)$ 及 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{AB}$，求：

当 (1) $\lambda=2$；(2) $\lambda=\dfrac{1}{2}$；(3) $\lambda=-2$ 时对应点 P 的坐标.

5. 已知点 $A(-2,-3)$，$B(2,1)$，$C(5,8)$，$D(-7,-4)$，判断 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 是否共线.

6. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,1)$，$\boldsymbol{b}=(-3,-1)$，$\boldsymbol{c}=(0,-2)$，求：

(1) $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}$；　　(2) $\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})+\boldsymbol{b}$.

7. 已知点 $A(-12,9)$，$B(6,15)$，向量 $\overrightarrow{OC}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OD}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OB}$，求点 C、D 的坐标，并证明 $\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{CD}$.

习题 11-3（B 组）

1. 求下列各点关于直线 $y=x$ 的对称点的坐标.

(1) $A(-3,2)$；　　(2) $B(3,-7)$；　　(3) $C(-2,-7)$.

2. 已知点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$P(x,y)$，且 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}$ $(\lambda\neq-1)$，求证：

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

3. 四边形 $ABCD$ 的顶点坐标为 $A(1,0)$，$B(0,-3)$，$C(2,-1)$，$D(3,2)$，试证：$ABCD$ 为平行四边形.

扫一扫，获取参考答案

11.4　向量的数量积

向量之间除了有线性运算之外，还有其他运算，本节介绍向量的数量积（也称内积或点积）运算.

一、向量的数量积概念

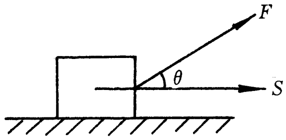


图 11-26

引例：已知一物体在力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下产生位移 $\boldsymbol{S}$，如图 11-26 所示，那么力 $\boldsymbol{F}$ 做的功应为：$W=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{S}|\cos\theta$.

定义　设两个非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，它们的夹角记为 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$，规定 $0\leqslant\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\leqslant\pi$，则 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ 称为向量 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 的**数量积**，并记为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle.$$

求向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 数量积的运算可简称为向量 $\boldsymbol{a}$ 点乘向量 $\boldsymbol{b}$.

规定：零向量与任何向量的数量积为零，即 $\boldsymbol{0}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{0}=0$.

由数量积定义可得

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}=0\quad \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=1.$$

当 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ 为锐角时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}>0$；

当 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ 为直角时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$；

当 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ 为钝角时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<0$；

当 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ 为零时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$；

当 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ 为 π 时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$.

例 1　如图 11-27 所示，设 $|\boldsymbol{F}|=5\ \mathrm{N}$，$|\boldsymbol{S}|=6\ \mathrm{m}$，$\theta=\dfrac{\pi}{6}$，求力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功 W.

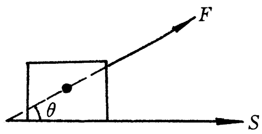


图 11-27

解　$W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{S}=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{S}|\cos\theta=5\times6\times\cos\dfrac{\pi}{6}=15\sqrt{3}(\mathrm{J})$.

向量的数量积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 还有其他形式，下面先引入投影的概念.

把 $|\boldsymbol{a}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的**投影**，记为 $(\boldsymbol{a})_b$，即

$$(\boldsymbol{a})_b=|\boldsymbol{a}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle,$$

$|\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ 称为向量 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 上的**投影**，记为 $(\boldsymbol{b})_a$，即

$$(\boldsymbol{b})_a=|\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle,$$

如图 11-28 所示.

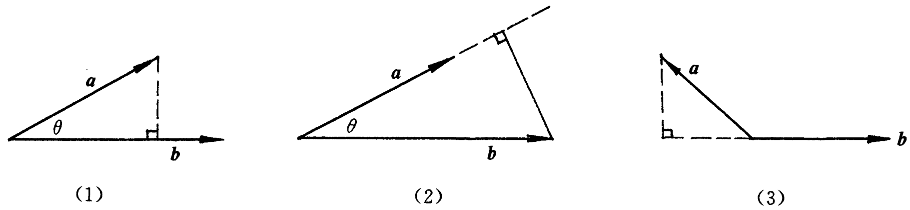


图 11-28

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=|\boldsymbol{a}|(\boldsymbol{b})_{a}=|\boldsymbol{b}|(\boldsymbol{a})_{b}.$$

当 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 时，为方便起见，记 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}^2$，则有 $\boldsymbol{a}^2=|\boldsymbol{a}|^2$.

二、向量数量积的运算律与坐标运算

向量的数量积运算满足下列运算律：

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$；

(2) $\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$；

(3) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$.

在直角坐标系 $\boldsymbol{xOy}$ 内，已知 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2)$，则

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2.$$

证明 因为 $$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j},$$

所以
$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j})\cdot(b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j})\\&=a_1b_1\boldsymbol{i}^2+a_1b_2\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+a_2b_1\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+a_2b_2\boldsymbol{j}^2\\&=a_1b_1+a_2b_2.\end{aligned}$$

这就是说，两个向量的数量积等于它们对应坐标的乘积的和.

由此可得：

(1) 若 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2)$，则 $|\boldsymbol{a}|^2=a_1{}^2+a_2{}^2$，或 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2}$.

(2) 设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 都是非零向量，$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2)$，θ 是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角，根据向量数量积的定义及坐标表示可得：

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}}.$$

例 2 已知 $a=(3,-1)$，$b=(1,-2)$，求 $a\cdot b$，$|a|$，$|b|$，$\langle a,b\rangle$.

解 $a\cdot b=3\times1+(-1)\times(-2)=5$，

$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{3^2+(-1)^2}=\sqrt{10}$，

$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{1^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$，

因为 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{5}{\sqrt{10}\times\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$0\leqslant\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\leqslant\pi$，

所以
$$\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\pi}{4}.$$

例 3　已知$|\boldsymbol{a}|=5$，$|\boldsymbol{b}|=4$，$\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\pi}{3}$，求$(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})$.

解
$$\begin{aligned}(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})&=2\boldsymbol{a}^2+(2\boldsymbol{a})\cdot(3\boldsymbol{b})-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}^2\\&=2|\boldsymbol{a}|^2+5\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-3|\boldsymbol{b}|^2\\&=2\times5^2+5|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle-3\times4^2\\&=2+5\times5\times4\times\cos\frac{\pi}{3}=52.\end{aligned}$$

由数量积的运算律可得
$$(\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2\pm2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2,$$
$$\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}).$$

三、两向量互相垂直与平行的条件

由上述分析易得：

设$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$都是非零向量，$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2)$，向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$垂直$\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$垂直，记为$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，即$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2=0$.

$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\pm|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$，当$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$方向相同时取“+”，当$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$方向相反时取“−”.

规定$\boldsymbol{0}$向量与任何向量垂直.

例 4　已知$|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=4$，证明：$\boldsymbol{a}+\frac{3}{4}\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}-\frac{3}{4}\boldsymbol{b}$垂直.

证明
$$\begin{aligned}\left(\boldsymbol{a}+\frac{3}{4}\boldsymbol{b}\right)\cdot\left(\boldsymbol{a}-\frac{3}{4}\boldsymbol{b}\right)&=\boldsymbol{a}^2-\frac{9}{16}\boldsymbol{b}^2\\&=|\boldsymbol{a}|^2-\frac{9}{16}|\boldsymbol{b}|^2=0.\end{aligned}$$

所以$\boldsymbol{a}+\frac{3}{4}\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}-\frac{3}{4}\boldsymbol{b}$垂直.

例 5　已知$A(1,2)$，$B(2,3)$，$C(-2,5)$，求证：$\overline{AB}\perp\overline{AC}$.

证明　$\overline{AB}=(2,3)-(1,2)=(1,1)$，

$\overline{AC}=(-2,5)-(1,2)=(-3,3)$，

$\overline{AB}\cdot\overline{AC}=1\times(-3)+1\times3=0$，

所以$\overline{AB}\perp\overline{AC}$.

例 6　求证：菱形的两条对角线互相垂直.

证明　如图 11-29 所示，因为

$\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{AD}$，$\overline{BD}=\overline{AD}-\overline{AB}$.

所以

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})$$
$$=|\overrightarrow{AD}|^2-|\overrightarrow{AB}|^2.$$

因为

$$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AD}|.$$

所以

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0,\text{即 }\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}.$$

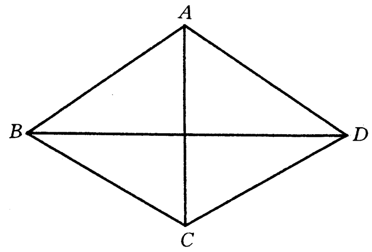


图 11-29

习题 11-4(A 组)

1. 已知 $|\boldsymbol{a}|=5$，向量 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 方向上的投影数量为下列值时，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.

(1) 6；　　(2) -6.

2. 根据下列条件，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.

(1) $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=3$，$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=30°$；

(2) $|\boldsymbol{a}|=4$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$，$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=135°$.

3. 在直角坐标系 xOy 中，已知 $A(-1,2)$，$B(3,5)$，分别求向量$\overrightarrow{AB}$与 x 轴和 y 轴夹角的余弦.

4. 已知 $\boldsymbol{a}=(1,2)$，$\boldsymbol{b}=(-2,3)$，求：

(1) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$；　(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$；　(3) $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.

5. 已知 AM 是$\triangle ABC$ 中 BC 边上的中线，用向量法证明：

$$AM^2=\frac{1}{2}(AB^2+AC^2)-BM^2.$$

习题 11-4(B 组)

1. 已知 $|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=4$，$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=120°$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2$.

2. 已知 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=4$，$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}=9$，求$|\boldsymbol{a}|$，$|\boldsymbol{b}|$.

3. 已知 $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=3$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{3}{2}$，求(1) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$；(2) $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.

4. 已知 $\boldsymbol{a}=(5,0)$，$\boldsymbol{b}=(-3,3)$，求$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$.

5. 已知四边形 $ABCD$ 的顶点坐标 $A(1,0)$，$B(5,-2)$，$C(8,4)$，$D(4,6)$，求证：四边形 $ABCD$ 为矩形.

扫一扫，获取参考答案

11.5　复数的概念

我们已经学习过自然数、整数、分数、有理数、无理数和实数，但在解决实际问题时，这些数还是不够用的，我们有必要在此基础上，引入新的数——**复数**，并把实数集扩充到复数集.

情境与问题

我们知道，没有任何实数的平方是负数，所以在实数集 $\mathbf{R}$ 中，一元二次方程 $x^2=-1$ 是无解的. 那么，如何才能使这类方程有确定的解呢？

一、虚数单位

为了使方程 $x^2=-1$ 有确定的解，人们引进一个新的数 i（在电工学中为 j），称为**虚数单位**，并规定：

(1) $\mathrm{i}^2=-1$；

(2) i 与实数在一起，可以按照实数的四则运算法则进行运算.

在这种规定下，i 就是 -1 的一个平方根，因为 $(-\mathrm{i})^2=\mathrm{i}^2=-1$，所以 $-\mathrm{i}$ 是 -1 的另一个平方根. 因此，方程 $x^2=-1$ 就有了确定的两个解：$x_1=\mathrm{i}$ 和 $x_2=-\mathrm{i}$.

根据上述规定，虚数单位 i 有以下性质：

$$\mathrm{i}^1=\mathrm{i},\ \mathrm{i}^2=-1,\ \mathrm{i}^3=-\mathrm{i},\ \mathrm{i}^4=1;$$
$$\mathrm{i}^5=\mathrm{i},\ \mathrm{i}^6=-1,\ \mathrm{i}^7=-\mathrm{i},\ \mathrm{i}^8=1;$$
$$\cdots$$

一般地，当 $n\in\mathbf{N}^*$ 时，有

$$\mathrm{i}^{4n+1}=\mathrm{i},\ \mathrm{i}^{4n+2}=-1,\ \mathrm{i}^{4n+3}=-\mathrm{i},\ \mathrm{i}^{4n}=1.$$

另外，还规定：

$$\mathrm{i}^0=1;\ \mathrm{i}^{-n}=\frac{1}{\mathrm{i}^n}\ (n\in\mathbf{N}^*).$$

例 1　化简：

(1) i^{2011}；　　(2) i^{-5}.

解　(1) $\mathrm{i}^{2011}=\mathrm{i}^{4\times52+3}=-\mathrm{i}$；

(2) $\mathrm{i}^{-5}=\dfrac{1}{\mathrm{i}^5}=\dfrac{1}{\mathrm{i}}=-\mathrm{i}$.

二、复数的代数形式

引进了虚数单位 i 之后，我们可以把数的概念从实数扩充到复数.

定义　形如 $a+bi$ $(a,b\in \mathbf{R})$ 的数称为**复数**，通常记为 $z=a+bi$，并称其为**复数的代数形式**，其中 a,b 分别称为复数的**实部**和**虚部**. 需要说明的是，复数的表示形式除代数形式外，通常还有三角形式和指数形式.

全体复数所组成的集合称为**复数集**，常用字母 $\mathbf{C}$ 表示. 即

$$\mathbf{C}=\{z\,|\,z=a+bi,\ a,b\in \mathbf{R}\}$$

可以看出，在复数 $a+bi$ 中，当 $b=0$ 时，$a+bi$ 就是实数 a；当 $b\neq 0$ 时，$a+bi$ 称为**虚数**. 全体虚数所组成的集合称为**虚数集**，常用字母 $\mathbf{I}$ 表示，即

$$\mathbf{I}=\{z\,|\,z=a+bi,\ a,b\in \mathbf{R}\text{ 且 }b\neq 0\}.$$

如果 $b\neq 0$，$a=0$，虚数 $a+bi=0+bi$，则数 bi 称为**纯虚数**.

例如：$3+4i$，$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，$-0.5i$，$2+\sqrt{3}$都是复数，它们的实部分别是 3，$\frac{1}{2}$，0，$2+\sqrt{3}$，虚部分别是 4，$\frac{\sqrt{3}}{2}$，-0.5，0. 其中 $3+4i$，$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，$-0.5i$是虚数，$-0.5i$是纯虚数.

想一想

任何一个实数都是复数吗？实数集 $\mathbf{R}$ 是不是复数集 $\mathbf{C}$ 的真子集呢？

显然，复数集包含了实数集和虚数集.

于是：$\mathbf{R}\cup \mathrm{I}=\mathbf{C}$，$\mathbf{R}\cap \mathrm{I}=\varnothing$，$\mathbf{R}\subsetneqq \mathbf{C}$，$\mathrm{I}\subsetneqq \mathbf{C}$. 若以 $\mathbf{C}$ 作为全集，则 $\complement_{\mathbf{C}}\mathbf{R}=\mathrm{I}$，$\complement_{\mathbf{C}}\mathrm{I}=\mathbf{R}$.

例 2　实数 m 取何值时，复数$(m^2-3m-4)+(m^2-5m-6)i$ 是：

(1) 实数；　　(2) 纯虚数？

解　由复数定义得：实部 $a=m^2-3m-4$，虚部 $b=m^2-5m-6$.

(1) 若复数为实数，则 $b=0$，即 $m^2-5m-6=0$，解得 $m=6$ 或 $m=-1$，当 $m=6$或 $m=-1$ 时，这个复数为实数.

(2) 若复数为纯虚数，则 $a=0$，$b\neq 0$，即 $m^2-3m-4=0$，解得 $m=4$ 或 $m=-1$，$m^2-5m-6\neq 0$ 解得 $m\neq -1$，$m\neq 6$，故当 $m=4$ 时，这个复数为纯虚数.

三、复数的相等及共轭复数

一个复数是由它的实部和虚部唯一确定的. 如果两个复数 $a+bi$ 和 $c+di$

的实部与虚部分别相等，那么称这两个**复数相等**. 记作：$a+b\mathrm{i}=c+d\mathrm{i}$. 即：如果 $a,b,c,d\in\mathbf{R}$，那么

$$a+b\mathrm{i}=c+d\mathrm{i}\Leftrightarrow a=c,b=d.$$

特别地，$a+b\mathrm{i}=0\Leftrightarrow a=b=0$.

例 3　已知 $(2x-1)+\mathrm{i}=y-(3-y)\mathrm{i}$，其中 $x,y\in\mathbf{R}$. 求 x,y.

解　根据复数相等的条件，得

$$\begin{cases}2x-1=y,\\1=-(3-y),\end{cases}$$

解此方程组，得

$$x=\frac{5}{2},y=4.$$

想一想

两个实数是可以比较大小的. 如果两个复数不全是实数，这两个复数能否比较大小？

如果两个复数实部相等，虚部互为相反数，那么把这两个复数称为**共轭复数**. 复数 z 的共轭复数常用 $\bar{z}$ 表示. 即：如果 $z=a+b\mathrm{i}$，则 $\bar{z}=a-b\mathrm{i}$.

例如：$1+2\mathrm{i}$ 与 $1-2\mathrm{i}$，$-0.5\mathrm{i}$ 与 $0.5\mathrm{i}$ 都是共轭复数. 特别地，实数 a 的共轭复数就是 a 本身.

四、复数的几何表示法

情境与问题

1. 实数和数轴上的点是一一对应的，也就是说，任何一个实数都可以用数轴上的一个点来表示，那么，一个复数能否用平面上的一点来表示呢？

2. 平面上的点和平面向量是一一对应的，复数能否用平面向量来表示？

1. 用复平面内的点表示复数

从复数相等的条件可知，任何一个复数 $z=a+b\mathrm{i}$，都可以由一对有序实数 (a,b) 唯一确定，这就使我们联想到借用平面直角坐标系来表示复数 $z=a+b\mathrm{i}$. 如图 11-30 所示，我们规定：直角坐标平面内的 x 轴为实轴，单位是 1，y 轴（除去原点）为虚轴，单位是 i. 那么，复数就可以用这样的平面内的点 $M(a,b)$ 来表示. 其中复数的实部 a 和虚部 b 分别是点 M 的横坐标和纵坐标. 我们把这种

表示复数的平面称为**复数直角坐标平面**，简称**复平面**.

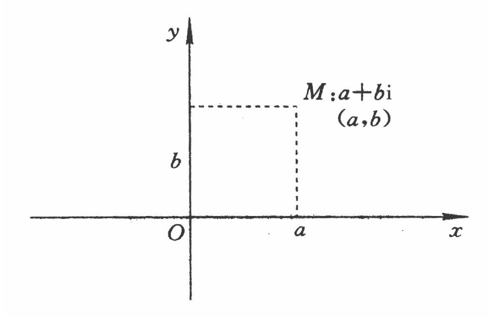


图 11-30

按照这种表示方法，每一个复数在复平面内都有唯一的点和它对应；反之，复平面内的每一个点都有唯一的复数和它对应. 这样，复数集 **C** 和复平面内所有的点构成的点集一一对应. 所以，任何复数都可用复平面内的点来表示. 显然，表示实数的点都在实轴上，表示纯虚数的点都在虚轴上.

复平面内互为共轭复数的 z 与 $\bar{z}$ 所对应的点关于实轴对称. 如图 11-31 所示，复数 $-3\mathrm{i}$，$-2+\mathrm{i}$ 分别对应的点 M_1，N_1 与它们的共轭复数 $3\mathrm{i}$，$-2-\mathrm{i}$ 所对应的点 M_2，N_2 关于 x 轴对称.

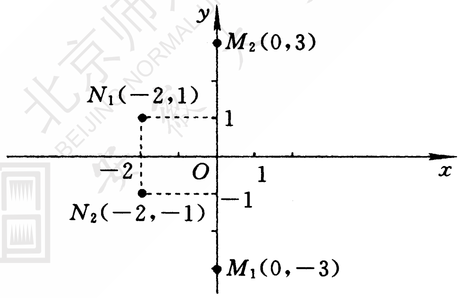


图 11-31

2. 用向量表示复数

如图 11-32 所示，复数 $a+b\mathrm{i}$ 对应于复平面内的点 M，如果连接 OM，就可以得到一个以原点 O 为起点，M 为终点的向量$\overline{OM}$. 于是，复平面内的点 M 和以原点 O 为起点的向量 $\overline{OM}$ 之间可以建立一一对应关系. 因为复平面内的点 $M(a,b)$ 和复数 $a+b\mathrm{i}$ 是一一对应的，所以复数 $a+b\mathrm{i}$ 和向量 $\overline{OM}$ 之间也是一一对应的. 因此，复数 $a+b\mathrm{i}$ 也可以用向量 $\overline{OM}$ 来表示. 即

$$\text{复数 } a+b\mathrm{i} \longleftrightarrow \text{点 } M(a,b) \longleftrightarrow \text{向量 } \overline{OM}$$

定义　表示复数 $a+b\mathrm{i}$ 的向量 $\overline{OM}$ 的长度 r 称为复数 $a+b\mathrm{i}$ 的**模数（绝对值）**，记作 $|z|$ 或 $|a+b\mathrm{i}|$，由 x 轴的正半轴到向量 $\overline{OM}$ 的角 θ 称为复数 $a+b\mathrm{i}$ 的

幅角. 容易看出，

$$r=|z|=|a+b\mathrm{i}|=\sqrt{a^2+b^2}.$$

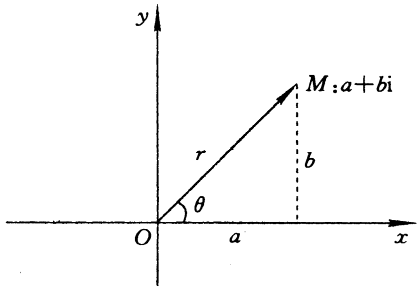


图 11-32

例如：$\left|-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right|=\sqrt{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$，

$$\left|-\frac{2}{3}\right|=\sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2+0^2}=\frac{2}{3}.$$

一个不等于零的复数 $a+b\mathrm{i}$ 的幅角有无数多个，这些值相差 2π 的整数倍. 例如，i 的幅角是：

$$\theta=2k\pi+\frac{\pi}{2}\quad(k\in\mathbf{Z}).$$

为简便起见，把幅角在 $[0,2\pi)$ 内的值称为复数的**幅角主值**（电工学中的幅角主值范围为 $(-\pi,\pi]$），通常记作 $\arg z$，即 $0\leqslant\arg z<2\pi$.

很明显，当 $a\in\mathbf{R}^+$ 时，

$$\arg a=0,\ \arg(-a)=\pi,\ \arg(a\mathrm{i})=\frac{\pi}{2},\ \arg(-a\mathrm{i})=\frac{3\pi}{2}.$$

如果 $z=0$，那么与它对应的向量 $\overline{OM}$ 缩成一个点（零向量），这样的向量的方向是任意的，所以复数 0 的幅角也是任意的.

由图 11-32 可以看出，复数 $a+b\mathrm{i}(a\neq 0)$ 的幅角 θ，可以利用公式

$$\tan\theta=\frac{b}{a}$$

来确定，其中 θ 所在象限就是与复数相对应的点 $M(a,b)$ 所在的象限.

例 4　用向量表示复数 $1-\sqrt{3}\mathrm{i}$，$-2\mathrm{i}$，3，并分别求出它们的模数和幅角主值.

解　(1) 如图 11-33 所示，向量 $\overline{OA}$ 表示复数 $1-\sqrt{3}\mathrm{i}$，它的模数是

$$|1-\sqrt{3}\mathrm{i}|=\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}=2$$

因为　$a=1,b=-\sqrt{3}$，

所以 $$\tan\theta=-\sqrt{3}.$$

而点$(1,-\sqrt{3})$在第Ⅳ象限内，所以幅角主值$\theta=\dfrac{5\pi}{3}$.

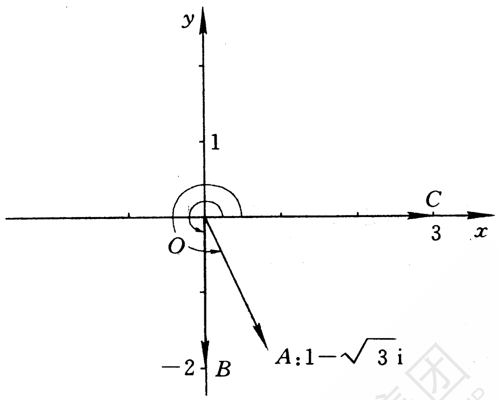


图 11-33

（2）如图 11-33 所示，向量$\overline{OB}$表示复数$-2\mathrm{i}$，它的模数是$|-2\mathrm{i}|=2$，因为复数$-2\mathrm{i}$对应的点在虚轴的下半轴上，所以它的幅角主值$\theta=\dfrac{3\pi}{2}$.

（3）如图 11-33 所示，向量$\overline{OC}$表示复数 3，它的模数是$|3|=3$，因为复数 3 对应的点在实轴的正半轴上，所以它的幅角主值$\theta=0$.

探索与研究

1. 实数 a 的绝对值 $|a|$ 的几何意义是指实数 a 在数轴上对应的点到原点的距离，复数 z 的绝对值 $|z|$ 的几何意义能否理解为复数 z 在复平面上对应的点到原点的距离？

2. 实数 a 与 $-a$ 在数轴上对应的点是关于原点对称的，复数 z 与 $-z$ 在复平面上对应的点是否也是关于原点对称的呢？

3. 实数 a 的绝对值 $|a|$ 与复数 z 的绝对值 $|z|$ 两者之间的关系如何？

习题 11-5(A 组)

1. 下列复数中，哪些是实数？哪些是虚数？哪些是纯虚数？

$\sqrt{2}+\sqrt{3}$，　　$2\mathrm{i}^{2004}$，　　$1-\sqrt{3}\mathrm{i}^{-5}$，　　$\mathrm{i}+\mathrm{i}^{-63}$.

2. 指出下列复数的实部与虚部.

（1）$1-\sqrt{3}$；　（2）$1-\sqrt{3}\mathrm{i}$；　（3）$(1-\sqrt{3})\mathrm{i}$.

3. m 取何实数时，复数 $(m^2+m-2)+(m^2-4m+3)\mathrm{i}$ 是实数、纯虚数或虚数？

4. 求适合下列条件的实数 x 和 y.

(1) $(x+y-2)+(x-3)\mathrm{i}=0$；

(2) $(2x+y)+(3x-y)\mathrm{i}=13+2\mathrm{i}$.

5. 在复平面内描出复数 $-2-2\mathrm{i}$，$1+\sqrt{3}\mathrm{i}$，-3，$2\mathrm{i}$ 所表示的点.

习题 11-5(B 组)

1. m 取何实数时，复数 $\dfrac{m^2+m-6}{m+5}+(m^2+8m+15)\mathrm{i}$ 是实数、纯虚数或虚数？

2. 求适合下列条件的实数 x 和 y.

(1) $(x-y-2)+(x^2+y^2-2)\mathrm{i}=0$；

(2) $(x^2+y^2)+xy\mathrm{i}$ 与 $13-6\mathrm{i}$ 为共轭复数.

3. 用向量表示复数 $1+\mathrm{i}$，4，$-\sqrt{3}\mathrm{i}$ 的共轭复数.

4. 求下列复数的模数和幅角主值 θ.

(1) 5；　　(2) $-\sqrt{2}\mathrm{i}$；

(3) $1-\sqrt{3}\mathrm{i}$；　　(4) $\sqrt{2}+\sqrt{2}\mathrm{i}$.

扫一扫，获取参考答案

11.6　复数代数形式的运算

情境与问题

在复平面中，复数与向量是一一对应的，能否用向量的加、减法的坐标运算类似地来定义复数的加、减法运算呢？

一、复数的加法和减法

复数的加法和减法就是实部与实部相加减，虚部与虚部相加减. 即设 $z_1=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$，$z_2=c+d\mathrm{i}(c,d\in\mathbf{R})$，则

$$z_1+z_2=(a+b\mathrm{i})+(c+d\mathrm{i})=(a+c)+(b+d)\mathrm{i},$$

$$z_1-z_2=(a+b\mathrm{i})-(c+d\mathrm{i})=(a-c)+(b-d)\mathrm{i}.$$

复数的加法运算满足下列的交换律与结合律. 即对任意复数 z_1、z_2、z_3，有

(1) 交换律：$z_1+z_2=z_2+z_1$；

(2) 结合律：$(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$.

由于复数可以用向量表示，故复数的加减运算相当于向量的加减运算. 设复数 $z_1=a+b\mathrm{i}$ 和 $z_2=c+d\mathrm{i}$ 在复平面内对应的向量分别为$\overline{OZ_1}$和$\overline{OZ_2}$，即$\overline{OZ_1}=(a,b)$，$\overline{OZ_2}=(c,d)$，则

$$\overline{OZ_1}+\overline{OZ_2}=(a+c,b+d),\overline{OZ_1}-\overline{OZ_2}=(a-c,b-d).$$

例 1 计算：$(2-3\mathrm{i})+(-5+2\mathrm{i})-(7+11\mathrm{i})$.

解 $(2-3\mathrm{i})+(-5+2\mathrm{i})-(7+11\mathrm{i})$

$=[2+(-5)-7]+[(-3)+2-11]\mathrm{i}=-10-12\mathrm{i}$.

显然，$(a+b\mathrm{i})+(a-b\mathrm{i})=2a$，$(a+b\mathrm{i})-(a-b\mathrm{i})=2b\mathrm{i}$. 即两个共轭复数的和是一个实数. 当 $b\neq0$ 时，它们的差是一个纯虚数.

想一想

两个共轭复数 z 与$\bar{z}$的和$(z+\bar{z})$与差$(z-\bar{z})$各是什么数？

例 2 在复平面内用向量表示下列复数：

(1) $(2-\mathrm{i})+(1+2\mathrm{i})$； (2) $(2-\mathrm{i})-(1+2\mathrm{i})$.

解 (1) 如图 11-34 所示，分别作表示复数$2-\mathrm{i}$和 $1+2\mathrm{i}$ 的向量$\overline{OM}$和$\overline{ON}$，再以$\overline{OM}$和$\overline{ON}$为邻边作平行四边形 $OMLN$，则对角线$\overline{OL}=\overline{OM}+\overline{ON}$就表示复数$(2-\mathrm{i})+(1+2\mathrm{i})$.

(2) 如图 11-35 所示，分别作表示复数 $2-\mathrm{i}$ 和$1+2\mathrm{i}$的向量$\overline{OM}$和$\overline{ON}$，再以$\overline{OM}$为对角线，$\overline{ON}$为一边作平行四边形，则$\overline{OL}=\overline{OM}-\overline{ON}$就表示复数$(2-\mathrm{i})-(1+2\mathrm{i})$.

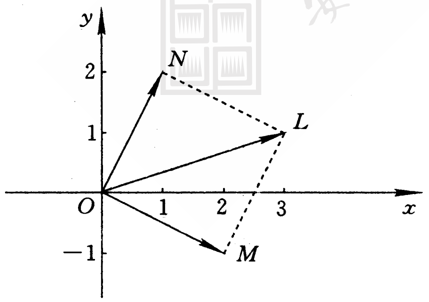


图 11-34

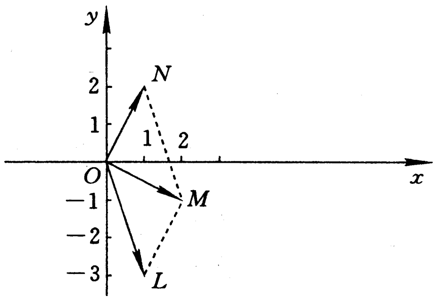


图 11-35

二、复数的乘法

两个复数相乘，可以按照多项式相乘的运算法则来进行，在所得的结果中，把 i^2 换成-1，并把实部与虚部分别合并. 即

设 $z_1=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$，$z_2=c+d\mathrm{i}(c,d\in\mathbf{R})$，则

$z_1\cdot z_2=(a+b\mathrm{i})\cdot(c+d\mathrm{i})=ac+ad\mathrm{i}+bc\mathrm{i}+bd\mathrm{i}^2=(ac-bd)+(ad+bc)\mathrm{i}$.

复数的乘法运算满足下列的交换律、结合律和分配律. 即对任意复数 z_1、z_2、z_3，有

(1) 交换律：$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$；

(2) 结合律：$(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$；

(3) 分配律：$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$.

由于复数乘法满足交换律，因此，我们以前学习过的完全平方公式及平方差公式在复数范围内仍然是成立的. 例如，可以用平方差公式计算

$(a+b\mathrm{i})(a-b\mathrm{i}) = a^2-(b\mathrm{i})^2 = a^2-b^2\mathrm{i}^2 = a^2+b^2$

由此可知，设复数 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$，则 $z\cdot\bar{z}=|z|^2=|\bar{z}|^2=a^2+b^2$.

复数的乘方是指相同复数的乘积. 即 $z^n=\underbrace{z\cdot z\cdot\cdots\cdot z}_{n个}(n\in\mathbf{N}^*)$.

例 3　计算：$(2+3\mathrm{i})(2-\mathrm{i})(-4+\mathrm{i})$.

解　$(2+3\mathrm{i})(2-\mathrm{i})(-4+\mathrm{i})=(7+4\mathrm{i})(-4+\mathrm{i})=-32-9\mathrm{i}$.

三、复数范围内解实系数一元二次方程

情境与问题

我们知道，对于实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$，当判别式 $\Delta=b^2-4ac\geqslant 0$ 时，方程有实数解；当 $\Delta<0$ 时，方程无实数解. 那么，该方程在复数范围内是否有复数解呢？若有，复数解有什么特点？如何求其复数解？

先看一个简单的求解一元二次方程的例子.

在复数范围内，求方程 $x^2=-2$ 的解. 由于 $-2=2\mathrm{i}^2=(\sqrt{2}\mathrm{i})^2$，即 $x^2=(\sqrt{2}\mathrm{i})^2$，所以，$x=\pm\sqrt{2}\mathrm{i}$. 显然，$-\sqrt{2}\mathrm{i}$ 和 $\sqrt{2}\mathrm{i}$ 是方程 $x^2=-2$ 的两个复数解.

类似地，对于方程 $x^2=-a(a>0)$，我们得到它的两个复数解为

$$x=\pm\sqrt{a}\mathrm{i}(a>0).$$

显然，若方程为 $x^2=a(a<0)$，可写成 $x^2=-|a|(a<0)$ 的形式. 根据上面的结论，方程 $x^2=a(a<0)$ 的两个复数解可表示为

$$x=\pm\sqrt{|a|}\mathrm{i}(a<0).$$

下面再看一个用配方法求解一元二次方程的例子.

例 4　解方程 $x^2-4x+8=0$.

解　因为 $\Delta=(-4)^2-4\times1\times8=-16<0$，所以方程 $x^2-4x+8=0$ 无实数根.

通过配方，将 $x^2-4x+8=0$ 化为 $(x-2)^2=-4$，故有 $x-2=\pm\sqrt{|-4|}\mathrm{i}$，即 $x-2=\pm 2\mathrm{i}$. 所以，方程 $x^2-4x+8=0$ 的两个复数根分别为

$$x_1=2+2\mathrm{i},x_2=2-2\mathrm{i}.$$

试一试

用例 4 的方法，求解方程 $x^2+2x+3=0$.

一般地，对于实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$，记 $\Delta=b^2-4ac$. 为便于配方，我们先将方程 $ax^2+bx+c=0$ 两边同乘以 $4a$，得 $4a^2x^2+4abx+4ac=0$，再通过配方，整理得 $(2ax+b)^2=b^2-4ac$，即 $(2ax+b)^2=\Delta$. 下面分两种情况讨论：

(1) 当 $\Delta\geqslant 0$ 时，有 $2ax+b=\pm\sqrt{\Delta}$，解得 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$；

(2) 当 $\Delta<0$ 时，有 $2ax+b=\pm\sqrt{|\Delta|}\mathrm{i}$，解得 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{|\Delta|}\mathrm{i}}{2a}$.

综上所述，实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 在复数范围内解的求根公式为（其中 $\Delta=b^2-4ac$ 为判别式）：

(1) 当 $\Delta\geqslant 0$ 时，方程的解为 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$；

(2) 当 $\Delta<0$ 时，方程的解为 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{|\Delta|}\mathrm{i}}{2a}$.

例 5 解方程 $3x^2-x+1=0$.

解 因为 $\Delta=(-1)^2-4\times 3\times 1=-11<0$，所以方程 $3x^2-x+1=0$ 无实数根. 由求根公式得，方程的两个复数根为 $x=\dfrac{-(-1)\pm\sqrt{|-11|}\mathrm{i}}{2\times 3}=\dfrac{1\pm\sqrt{11}\mathrm{i}}{6}$. 即

$$x_1=\frac{1}{6}-\frac{\sqrt{11}}{6}\mathrm{i},x_2=\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{11}}{6}\mathrm{i}.$$

探索与研究

1. 通过本节内容的学习，我们知道，实系数一元二次方程在复数范围内一定有解. 如果其解为复数解，那么解一定是两个共轭复数吗？

2. 如果实系数一元二次方程的判别式的值是负数，除了用求根公式求解外，你还能找到其他的解法吗？

习题 11-6(A 组)

计算题.

(1) $(6-3\mathrm{i})+(3\mathrm{i}-2)$；　　(2) $(2-\mathrm{i})-(2+3\mathrm{i})+4\mathrm{i}$；

(3) $(-8-7\mathrm{i})(-3\mathrm{i})$；　　(4) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)$；

(5) $\frac{2\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}$；　　(6) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}\mathrm{i}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}\mathrm{i}}$.

习题 11-6(B 组)

计算题.

(1) $(1-2\mathrm{i}^5)-(2+3\mathrm{i}^7)+(3-5\mathrm{i}^{11})$；

(2) $(2+\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})(4-3\mathrm{i})$；

(3) $\left(\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)^{10}$；

(4) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}\mathrm{i}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}\mathrm{i}}-\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}\mathrm{i}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}\mathrm{i}}$.

扫一扫，获取参考答案

扫一扫，复习本章内容

复习题 11

1. 填空题.

(1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=$____________；

(2) 已知▱$ABCD$，则$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=$____________；

(3) 如果 $\boldsymbol{a}=-\frac{2}{3}\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的关系是____________；

(4) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{BA}=$____________；

(5) $\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\overrightarrow{A_3A_4}-\overrightarrow{A_4A_1}=$____________；

(6) 已知$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$，则点 M 是线段 AB 的____________；

(7) 已知$\overrightarrow{OM}=\left(1-\frac{1}{3}\right)\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$，则$\overrightarrow{AM}=$__________$\overrightarrow{AB}$；

(8) 已知 $A(5,-4)$，$B(-1,4)$，则 $|\overrightarrow{AB}|=$__________；

(9) 已知 $A(2,1)$，$B(-3,-2)$，及$\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$，则点 M 的坐标是________.

2. 选择题.

(1) 在平行四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=$(　　)；

A. $\overrightarrow{DB}$　　B. $\overrightarrow{BC}$　　C. $\overrightarrow{AC}$　　D. $\vec{0}$

(2) 在平行四边形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}+\overline{BC}-\overline{AD}=$（　　）；

A. $\overline{CD}$　　B. $\overline{DC}$　　C. $\overline{AC}$　　D. $\overline{BC}$

(3) 设向量 $\boldsymbol{a}=(2,1)$，$\boldsymbol{b}=(-1,3)$，$\boldsymbol{c}=(0,2)$，则 $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c}=$（　　）；

A. $(3,4)$　　B. $(5,\ 5)$　　C. $(4,\ 3)$　　D. $(3,5)$

(4) 下面不是单位向量的是（　　）；

A. $(1,0)$　　B. $\boldsymbol{i}$　　C. $(-1,-1)$　　D. $\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$ $(\boldsymbol{a}\neq0)$

(5) 下列命题正确的是（　　）；

A. $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|\Rightarrow\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$　　B. $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|\Rightarrow\boldsymbol{a}=\pm\boldsymbol{b}$

C. $|\boldsymbol{a}|>|\boldsymbol{b}|\Rightarrow\boldsymbol{a}>\boldsymbol{b}$　　D. $|\boldsymbol{a}|=0\Rightarrow\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$

(6) 设 $\boldsymbol{c}$ 为非零向量，$\lambda\in\mathbf{R}$，若（　　）成立，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$；

A. $\lambda\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$　　B. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$

C. $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$ 且 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$　　D. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$

(7) 已知向量 $\boldsymbol{a}=(5,-7)$，$\boldsymbol{b}=(-6,-4)$，则下列正确的是（　　）；

A. $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$　　B. $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$　　C. $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$　　D. 以上均不对

(8) 若向量 $\boldsymbol{a}=(2,3)$ 与向量 $\boldsymbol{b}=(x,-6)$ 共线，则 $x=$（　　）；

A. 4　　B. 2　　C. -4　　D. -2

(9) 若 $a\in\mathbf{R}$，则复数 $(a^2-3a+2)+(a^2+4a-5)\mathrm{i}$ 为纯虚数的条件是（　　）；

A. $a=1$ 或 $a=2$　　B. $a=1$

C. $a=2$　　D. $a=1$ 或 $a=-5$

(10) 当 $n\in\mathbf{N}^*$ 时，$\left(\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^{2n}+\left(\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)^{2n}$ 的值是（　　）；

A. 0　　B. 2　　C. -2　　D. 2 或 -2

(11) 设复数 $3+\mathrm{i}$ 与 $2+3\mathrm{i}$ 对应的点分别是 P、Q，则向量 $\overline{PQ}$ 对应的复数是（　　）；

A. $5+4\mathrm{i}$　　B. $1-2\mathrm{i}$　　C. $-1+2\mathrm{i}$　　D. $1+2\mathrm{i}$

(12) 下列每组数中两个都是实数的是（　　）；

A. $z+\bar{z}$ 与 $z-\bar{z}$　　B. $z+\bar{z}$ 与 $z\cdot\bar{z}$

C. $z-\bar{z}$ 与 $\dfrac{z}{\bar{z}}$　　D. $z\cdot\bar{z}$ 与 $\dfrac{z}{\bar{z}}$

(13) 设 $\omega=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，则 ω^3 的值为（　　）.

A. 1　　B. -1　　C. $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$　　D. $-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$

3. 已知 $A(2,1)$，$B(3,5)$，$C(-6,3)$，求证：$\triangle ABC$ 是直角三角形.

4. 已知$\overline{OP}=(3,-4)$，$\overline{OP}$绕原点转 $90°$，到$\overline{OQ}$的位置，求点 Q 的坐标.

5. 在$\triangle ABC$ 中，$|\overline{AB}|=6$，$|\overline{BC}|=3$，$|\overline{CA}|=8$，求$\overline{AB}\cdot\overline{AC}$.

6. 已知 $\boldsymbol{a}=(2,-3)$，$\boldsymbol{b}=(-1,-2)$，$\boldsymbol{c}=(-5,6)$，求：

(1) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$；　　(2) $(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

7. 已知$(2-\mathrm{i})^2(x-y\mathrm{i})+(3y-2x\mathrm{i})=11-7\mathrm{i}$，求实数 x 和 y.

8. 计算题.

(1) $(1-\mathrm{i})+(2-\mathrm{i}^3)+(3-\mathrm{i}^5)+(4-\mathrm{i}^7)$；

(2) $(a+b\mathrm{i})(a-b\mathrm{i})(-a+b\mathrm{i})(-a-b\mathrm{i})$.

9. 计算下列各题，并将结果用代数形式表示.

(1) $3[\cos(-120°)+\mathrm{i}\sin(-120°)]\cdot 2(\cos 60°+\mathrm{i}\sin 60°)$；

(2) $[\sqrt{2}(\cos 15°+\mathrm{i}\sin 15°)]^4$；

(3) $4e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\div 2e^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$；

(4) $\dfrac{(1+\mathrm{i})^4}{1+2\mathrm{i}}+\dfrac{(1-\mathrm{i})^4}{1-2\mathrm{i}}$.

扫一扫，获取参考答案

[阅读材料 11]

有关向量的一个实验

一、形式：实验.

二、准备：三个弹簧秤，一个钩码，细绳(或细钢丝)，一个重物，两个支点.

三、步骤(按图 11-36 所示装置仪器).

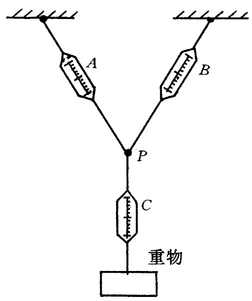


图 11-36

1. 检查弹簧秤 A、B 与 C 上刻度的读数，看看 A 与 B 上刻度的读数之和大于、小于还是等于 C 上刻度的读数.

2. 加长上面的绳子，使得$\angle APB$ 变小，将刻度上的读数与上面的那些读数相比较；反过来，增大$\angle APB$，再一次比较你所测得的结果.

3. 装好这些弹簧秤，使$\angle APB$ 成为直角$(90°)$，看看 A 和 B 的刻度读数，并将刻度 A 上的读数平方$(A\times A)$，同样将刻度 B 上的读数也平方$(B\times B)$，再把这两个结果加起来，然后读出 C 刻度上的读数，求出 C 上读数的平方$(C\times C)$，拿这个结果与刚才求得的结果 A^2+B^2 进行比较.

4. 假定$\angle APB$是90°，刻度A与B的读数各为3 N和4 N，而刻度C上的读数为5 N，结果C点的5 N恰与图11-37中平行四边形$AMBP$的对角线PM的数值相同.

5. 由实验得出结论：同时作用在一点或一个物体上的两个力，可以用称为合成向量(或向量和)的单个力来代替. 对于图11-37中的两个向量$\overline{PB}$与$\overline{PA}$，它们的合成向量是平行四边形$AMBP$的对角线$\overline{PM}$. 同样地，对于向量的加法问题，我们可以应用这种平行四边形法则来解答.

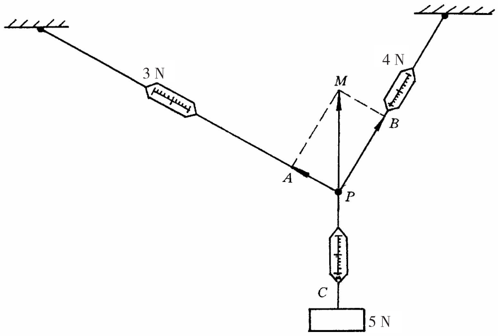


图 11-37

四、应用.

例 河水从东向西流，流速为2 m/s，一艘轮船以2 m/s的速度垂直于水流方向向北横渡，求轮船实际航行的方向和航速(如图11-38所示).

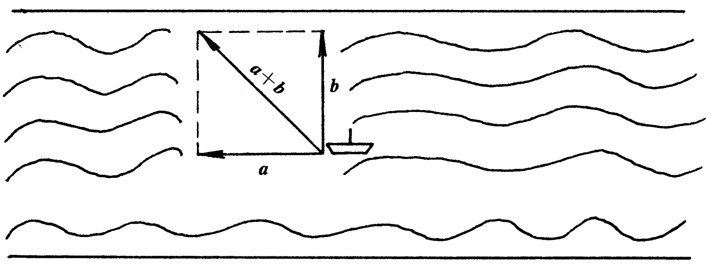


图 11-38

解 设$\boldsymbol{a}$="向西方向，2 m/s"，$\boldsymbol{b}$="向北方向，2 m/s"，则

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}\approx 2.8(\mathrm{m/s})$$

由$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$可得$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$的方向为西北方向.

答 轮船实际航行速度为"向西北方向，2.8 m/s".

上面仅以速度向量为例说明向量的应用，其实向量在力学、电学和机械工程等学科中都有着十分广泛的应用.

第 11 章单元自测

1. 填空题.

(1) 若 $|\boldsymbol{a}|=1$，则 $\boldsymbol{a}$ 称为__________；

(2) 设向量 $\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$ 不共线，若 $k\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$ 与 $\boldsymbol{e}_1+k\boldsymbol{e}_2$ 共线，则实数 k 的值为__________；

(3) 设 $\boldsymbol{a}=(1,-2)$，$\boldsymbol{b}=(4,3)$，则 $-2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}=$__________；

(4) 若 $\overrightarrow{AB}=(-2,5)$，$B(1,-3)$，则 A 点的坐标为__________；

(5) 若 $\boldsymbol{a}$ 为非零向量，则 $0\boldsymbol{a}=$__________，$\boldsymbol{0}\cdot\boldsymbol{a}=$__________；

(6) 已知 $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=4$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=3$，则 $(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=$__________；

(7) 若点 $A(-3,2)$ 到点 $B(1,m)$ 的距离为 5，则 m 的值为__________.

2. 选择题.

(1) 在下列 4 个等式中，正确的是(　　)；

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=0$　　B. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$

C. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}=0$　　D. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$

(2) 下列命题中，正确的是(　　)；

A. 两个单位向量的数量积为 1　　B. 若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$ 且 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$

C. 若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，则 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 中至少有一个零向量　　D. 若 $\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{c}$，则 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$

(3) 下列各式中，不正确的是(　　)；

A. $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2$　　B. $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2$

C. $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2$　　D. $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$

(4) “$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{0}$”是“$A,B,C$ 是三角形的三个顶点”的(　　)条件；

A. 充分不必要　　B. 必要不充分　　C. 充要　　D. 既不充分也不必要

(5) 已知 $|\boldsymbol{a}|=10$，$|\boldsymbol{b}|=8$，且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-40$，则向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为(　　)；

A. 30°　　B. 60°　　C. 120°　　D. 150°

(6) 若 $\boldsymbol{a}=(0,1)$，$\boldsymbol{b}=(1,1)$ 且 $(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{a}$，则实数 λ 的值是(　　).

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

3. 作用于同一点的两个力的大小都是 5 N，且夹角为 120°，那么它们的合力的大小是多少？

4. 已知 $\boldsymbol{e}_1/\!/\boldsymbol{e}_2$，且 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$，求证：$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.

5. 已知 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的直角坐标分别是 $(-5,0)$，$\left(-5,\dfrac{5}{\sqrt{3}}\right)$，求 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角.

6. 求适合下列方程的 x 与 y $(x,y\in\mathbf{R})$ 的值.

(1) $(3x+2y)+(5x-y)\mathrm{i}=17-2\mathrm{i}$；

(2) $2x^2-5x+2+(y^2+y-2)\mathrm{i}=0$.

7. 设复数 $z=a+b\mathrm{i}$ 和复平面内的点 $Z(a,b)$ 对应，a,b 必须满足什么条件，才能使点 Z 位于：

（1）实轴上？

（2）右半平面（不包括原点和虚轴）？

8. 对任何 $z\in C$，求证：$z\cdot\bar{z}=|z|^2=|\bar{z}|^2$.

9. 计算.

（1）$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right)^2$；　（2）$\dfrac{1-2\mathrm{i}}{3+4\mathrm{i}}$；　（3）$[3(\cos 10°-\mathrm{i}\sin 10°)]^6$.

10. 设 $\omega=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，求证：$1+\omega+\omega^2=0$.

11. 将复数 $z=-2+2\mathrm{i}$ 化为三角形式和指数形式.

12. 计算下列各题，并将结果用代数形式表示.

（1）$8(\cos 120°-\mathrm{i}\sin 120°)\cdot 2(\cos 60°+\mathrm{i}\sin 60°)$；

（2）$8e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\div 2e^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$.

13. 方程 $z^2+az+b=0\ (a,b\in\mathbf{R})$ 有一个根为 $2+\sqrt{3}\mathrm{i}$，求 a,b 的值.

14. 已知复数 $(k^2-6k+5)+(k-2)\mathrm{i}$ 在复平面内对应的点在第Ⅱ象限，求实数 k 的取值范围.

扫一扫，获取参考答案