

天津市 普通高校专升本考试专用教材

高等数学

主编 华腾新思专升本考试研究中心

天津市普通高校专升本考试

天津市普通高校专升本考试专用教材·大学英语
天津市普通高校专升本考试专用教材·计算机应用基础
天津市普通高校专升本考试专用教材·大学语文
天津市普通高校专升本考试专用教材·高等数学
天津市普通高校专升本考试考前冲刺试卷及历年真题·大学英语
天津市普通高校专升本考试考前冲刺试卷及历年真题·计算机应用基础
天津市普通高校专升本考试考前冲刺试卷及历年真题·大学语文
天津市普通高校专升本考试考前冲刺试卷及历年真题·高等数学

天津市

普通高校专升本考试专用教材·高等数学

北京邮电大学出版社



ISBN 978-7-5635-7050-8



9 787563 570508 >

定价: 66.00元

策划编辑: 李家隆
责任编辑: 谭宏微
封面设计: 刘文东



北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

天津市

普通高校专升本考试专用教材

高等数学

主编 华腾新思专升本考试研究中心



北京邮电大学出版社
www.buptpress.com



为了帮助参加天津市普通高校专升本考试的考生系统、全面、精准、高效地复习备考,我们特组织省内具有丰富教研经验的教研员,以天津市普通高等教育专科升本科招生考试相应科目的考试要求为依据,深入研究近几年天津市普通高校专升本考试的命题情况,紧密结合考生的学习特点,精心编写了这套天津市普通高校专升本考试复习丛书。

本书是该复习丛书之《天津市普通高校专升本考试专用教材·高等数学》,专为参加天津市普通高校专升本考试的考生编写。本书将基础知识考查与解题能力训练相结合,旨在建立完整的备考体系,提供科学的备考方案,帮助广大参加天津市普通高校专升本考试的考生迅速掌握考点,突破重点,攻克难点,弄清疑点。

本书具有以下特色。

1. 紧扣考试要求,合理选取内容

本书编写时以《天津市普通高等教育专科升本科招生考试·高等数学考试要求》为依据,结合天津市普通高校专升本考试历年真题,分为“函数、极限与连续”“一元函数微分学”“一元函数积分学”“多元函数微积分学”“常微分方程”五章。本书内容编排合理,整体难易程度与《天津市普通高等教育专科升本科招生考试·高等数学考试要求》一致,考生可以利用本书更好地把握考情,强化对基础知识的理解与运用,学习必备的解题方法,切实提升应试能力。

2. 科学安排体例,全面覆盖考点

本书根据知识间的关系,每章又细分为不同的小节,每节设置了“思维导图”“考纲要求”“知识清单”“巩固练习”“真题链接”五个栏目。“思维导图”栏目罗列了本节主要的知识内容及知识间的结构,可帮助考生梳理和记忆各知识间的逻辑顺序;“考纲要求”栏目详细分析了考试大纲对每一个知识点的要求;“知识清单”栏目细致讲解了考生应熟悉或掌握的知识内容,并设置“备考提示”小栏目,可帮助考生理解知识内容,正确把握考点,拓展解题思路;“巩固练习”栏目根据本节知识内容,结合考试要求和考试真题中的高频考点,设置了有针对性的练习题,可帮助考生趁热打铁,巩固本节所学知识;“真题链接”栏目对真题进行剖析,可帮助考生准确把握考点。此外,在每一章末尾还设有本章题型总结和章节复习题,主要包含题型训练和本章知识内容的综合性题目,让考生在实战中运用所学技巧,磨练解题能力。

3. 解析详细精当,强化解题能力

本书采取了讲练结合的方式,在讲解内容时穿插了许多练习题,所有的练习题都配备了详尽、

精当的解析,可帮助考生明确答题误区,找到解题技巧,及时查漏补缺,做到学练结合,从而有步骤、有计划地提高应试能力。

在编写本套复习丛书的过程中,编者广泛征求了在高等院校中长期从事专升本考试研究工作的一线教师的意见,秉承高效、实用的理念打造精品。我们相信,凝聚着众多名师智慧的本套复习丛书定能成为考生通向成功彼岸的金桥,帮助考生到达理想的殿堂!

衷心希望本套复习丛书能为广大考生的复习备考带来实质性的帮助。对于书中的不足之处,敬请各位读者不吝指正。

华腾新思专升本考试研究中心





CONTENTS 目录

第一章	函数、极限与连续	1
第一节	函数	1
第二节	极限	14
第三节	函数的连续性	29
	本章题型总结	37
	复习题	48
第二章	一元函数微分学	54
第一节	导数与微分	54
第二节	微分中值定理与导数的应用	69
	本章题型总结	82
	复习题	95
第三章	一元函数积分学	101
第一节	不定积分	101
第二节	定积分	110
第三节	定积分的应用	120
	考点总结	126
	复习题	144
第四章	向量代数与空间解析几何	150
第一节	向量代数	150
第二节	平面与直线	160
	考点总结	169
	复习题	174
第五章	多元函数微分学	177
第一节	多元函数与多元函数的偏导数	177
第二节	偏导数的应用	189
	考点总结	194
	复习题	201

第六章	二重积分	205
第一节	二重积分的概念与性质	205
第二节	二重积分的计算	208
考点总结		216
复习题		222
第七章	常微分方程	224
第一节	一阶微分方程	224
第二节	二阶线性微分方程	230
考点总结		234
复习题		242



1

第一章

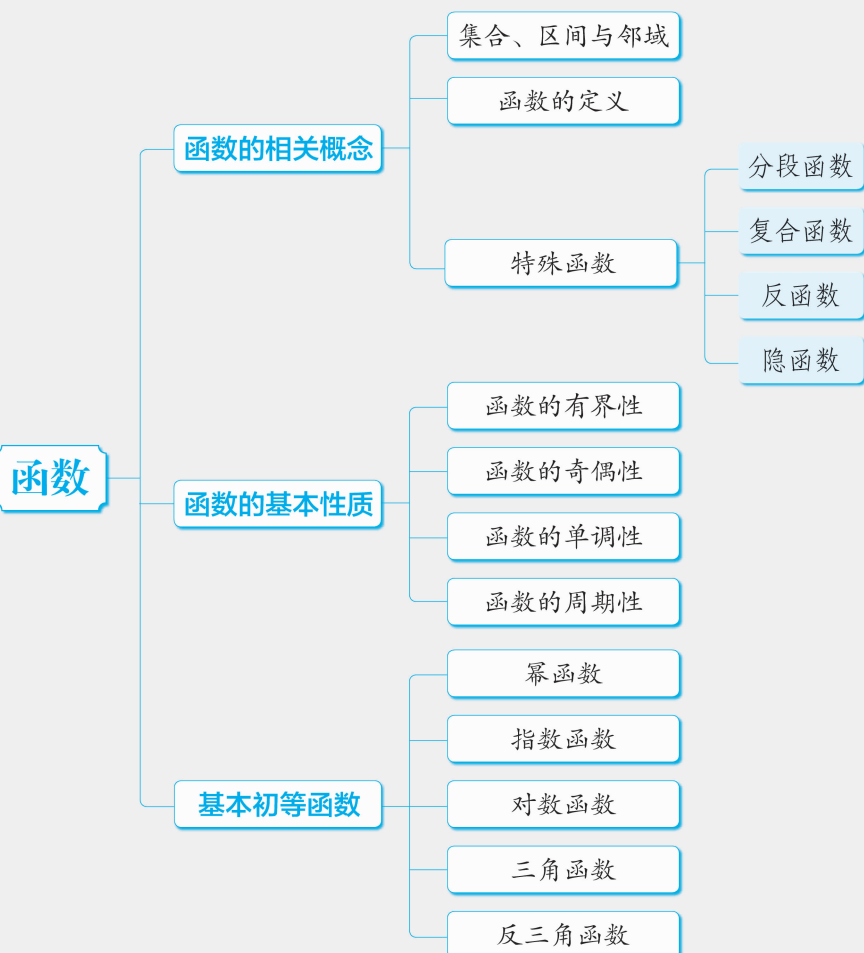
函数、极限与连续



本章知识串讲

第一节 函数

知识脉络



知识精讲

一、函数的相关概念

1. 集合、区间与邻域

1) 集合

一般地,我们把研究对象统称为元素,把一些元素组成的总体叫作集合,简称为集.通常用大写字母 $A, B, C, \dots$ 表示集合,用小写字母 $a, b, c, \dots$ 表示集合中的元素.特别地,把不含任何元素的集合称为空集,记作 $\emptyset$.

给定一个集合,它的元素必须是确定的,即对于给定的集合,一个元素在或不在这个集合中是确定的.如果 a 是集合 A 中的元素,就说 a 属于集合 A ,记作 $a \in A$;如果 a 不是集合 A 中的元素,就说 a 不属于集合 A ,记作 $a \notin A$.此外,给定集合中的元素必须是互不相同的,即集合中的元素具有互异性.



备考提示

数学中一些常用的数集及其记法:

全体非负整数组成的集合称为非负整数集(或自然数集),记作 $\mathbf{N}$;

全体正整数组成的集合称为正整数集,记作 $\mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}_+$;

全体整数组成的集合称为整数集,记作 $\mathbf{Z}$;

全体有理数组成的集合称为有理数集,记作 $\mathbf{Q}$;

全体实数组成的集合称为实数集,记作 $\mathbf{R}$.

给定两个集合 A, B ,如果集合 A 中的元素都是集合 B 中的元素,那么称集合 A 是集合 B 的子集,记作 $A \subset B$ (或 $B \supset A$),读作" A 包含于 B " (或 " B 包含 A ").

设 A, B 是两个集合.由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素组成的集合,称为集合 A 与 B 的并集,记作 $A \cup B$,读作" A 并 B ";由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素组成的集合,称为集合 A 与 B 的交集,记作 $A \cap B$,读作" A 交 B ".

2) 区间

设 a, b 是两个实数,且 $a < b$,规定:

满足不等式 $a \leq x \leq b$ 的实数 x 的集合叫作闭区间,表示为 $[a, b]$;

满足不等式 $a < x < b$ 的实数 x 的集合叫作开区间,表示为 (a, b) ;

满足不等式 $a \leq x < b$ 或 $a < x \leq b$ 的实数 x 的集合叫作半开半闭区间,分别表示为 $[a, b)$, $(a, b]$.

实数集 $\mathbf{R}$ 可以用区间表示为 $(-\infty, +\infty)$,其中" ∞ "读作"无穷大", " $-\infty$ "读作"负无穷大", " $+\infty$ "读作"正无穷大".此外,还可以把满足 $x \geq a, x > a, x \leq b, x < b$ 的实数 x 的集合,用区间分别表示为 $[a, +\infty)$, $(a, +\infty)$, $(-\infty, b]$, $(-\infty, b)$.

3) 邻域

设 a, δ 是两个实数,且 $\delta > 0$,我们把满足 $|x - a| < \delta$ 的实数 x 的集合,即开区间 $(a - \delta, a + \delta)$ 称为点 a 的 δ 邻域,记作 $U(a, \delta)$;把满足 $0 < |x - a| < \delta$ 的实数 x 的集合,也即点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后的集合,称为



点 a 的去心 δ 邻域, 记作 $\dot{U}(a, \delta)$.

注: 实际上, 邻域就表示以点 a 为中心的任何开区间.

2. 函数的定义

定义 1 设 D 是一个实数集. 如果存在一个对应法则 f , 使得对 D 中的每一个数 x , 在 $\mathbf{R}$ 中都有唯一确定的数 y 与之对应, 那么称对应法则 f 为定义在 D 上的一个函数, 记为

$$y=f(x), \quad x \in D.$$

其中 x 称为自变量, y 称为因变量, D 称为函数 f 的定义域.

注: 函数的定义域通常由问题的实际背景确定, 如果只给出解析式 $y=f(x)$, 而没有指明它的定义域, 那么函数的定义域就是指能使这个式子有意义的实数的集合.

例题 1.1.1 求下列函数的定义域.

$$(1) y = \sqrt{x+3}; \quad (2) y = \frac{1}{x+2}; \quad (3) y = \ln(x-1).$$

【解析】 (1) 因为二次根式的被开方数不小于 0, 所以 $x+3 \geq 0$, 解得 $x \geq -3$. 故 $y = \sqrt{x+3}$ 的定义域为 $[-3, +\infty)$.

(2) 因为分式的分母不能为 0, 所以 $x+2 \neq 0$, 即 $x \neq -2$. 故 $y = \frac{1}{x+2}$ 的定义域为 $(-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$.

(3) 因为对数的真数大于 0, 所以 $x-1 > 0$, 解得 $x > 1$. 故 $y = \ln(x-1)$ 的定义域为 $(1, +\infty)$.



备考提示

历年专升本考试第一道选择题考查过求函数的定义域. 备考时, 考生需要熟知基本初等函数的定义域与值域, 并会解一些简单的不等式.

例题 1.1.2 函数 $f(x) = \sqrt{x-3} + \arcsin \frac{1}{x}$ 的定义域是().

- A. $(-\infty, +\infty)$
- B. $[1, 3]$
- C. $(-\infty, 0) \cup (0, 3)$
- D. $[3, +\infty)$



【解析】 使根式 $\sqrt{x-3}$ 有意义的实数 x 的集合是 $\{x | x-3 \geq 0\} = \{x | x \geq 3\}$, 使 $\arcsin \frac{1}{x}$ 有意义的实数 x 的集合是 $\left\{x \mid -1 \leq \frac{1}{x} \leq 1\right\} = \{x | x \geq 1 \text{ 或 } x \leq -1\}$. 因此, 函数 $f(x)$ 的定义域是 $\{x | x \geq 3\} \cap \{x | x \geq 1 \text{ 或 } x \leq -1\} = \{x | x \geq 3\}$, 即 $[3, +\infty)$. 故本题选 D.

函数定义中, 对 D 中的每一个数 x , 按照对应法则, 总有唯一确定的值 y 与之对应, 这个值称为函数在点 x 处的函数值, 记作 $f(x)$. 当自变量 x 遍取 D 的所有数值时, 对应的函数值 $f(x)$ 的全体构成的集合称为函数 f 的值域, 记作 $f(D)$, 即

$$f(D) = \{y | y = f(x), x \in D\}.$$

由函数的定义可以看出,函数的定义域与对应法则是确定函数的两个必不可少的要素.也就是说,如果两个函数的对应法则和定义域都相同,那么这两个函数就是相同的函数.

3. 特殊函数

1) 分段函数

定义 2 在自变量的不同变化范围中,对应法则用不同式子来表示的函数,称为分段函数.

例如,分段函数 $f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0, \end{cases}$ 它的定义域为 $\mathbf{R}$, 当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, 对应的函数值 $f(x) = -x$;

当 $x \in [0, +\infty)$ 时, 对应的函数值 $f(x) = x$.

例题 1.1.3 设函数 $f(x) = \begin{cases} 1 + \log_2(1-x), & x < 1, \\ 2^{x-2}, & x \geq 1, \end{cases}$ 则 $f(-1) + f(\log_2 4) =$ _____.

【解析】 由题意, 得 $f(-1) = 1 + \log_2 2 = 2$, $f(\log_2 4) = f(2) = 2^{2-2} = 1$, 所以 $f(-1) + f(\log_2 4) = 3$.

2) 复合函数

定义 3 设 $y = f(x)$ 和 $u = g(x)$ 是两个函数. 如果 $y = f(x)$ 的定义域包含函数 $u = g(x)$ 的值域, 那么定义在 $u = g(x)$ 定义域上的函数 $y = f(g(x))$ 称为由 $u = g(x)$ 与 $y = f(x)$ 构成的复合函数, u 称为中间变量.

函数 g 与函数 f 构成的复合函数, 即按“先 g 后 f ”的次序复合的函数, 通常记为 $f \circ g$, 即

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

例如, 取 $f(x) = \sin x$, $g(x) = x^2$, 则 $g(x)$ 与 $f(x)$ 构成的复合函数为 $f(g(x)) = \sin x^2$, $f(x)$ 与 $g(x)$ 构成的复合函数为 $g(f(x)) = \sin^2 x$.

注: ①不是任何两个函数都可以构成复合函数. 例如, 函数 $y = \arcsin u$ 与函数 $u = 2 + x^2$ 就不能构成复合函数. 因为函数 $y = \arcsin u$ 的定义域为 $[-1, 1]$, 而 $u = 2 + x^2 \geq 2$, 所以两函数不满足复合函数的条件.

②复合函数可以有多个中间变量, 如 $y = e^u$, $u = \sqrt{v}$, $v = x + 1$ 复合成函数 $y = e^{\sqrt{x+1}}$, 这里 u, v 都是中间变量.

例题 1.1.4 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} 2 - x^2, & |x| \leq 1, \\ 2, & |x| > 1, \end{cases}$ 求 $f(g(x)), g(f(x))$.

【解析】 $f(g(x)) = \begin{cases} 1, & |g(x)| \leq 1, \\ 0, & |g(x)| > 1 \end{cases} = \begin{cases} 1, & |x| = 1, \\ 0, & |x| \neq 1. \end{cases}$

$g(f(x)) = \begin{cases} 2 - [f(x)]^2, & |f(x)| \leq 1, \\ 2, & |f(x)| > 1 \end{cases} = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 2, & |x| > 1. \end{cases}$

例题 1.1.5 下列函数是由哪些较简单的函数复合而成的?

(1) $y = e^{-x}$;

(2) $y = \sin^2(1+2x)$;

(3) $y = \arccos \sqrt{\tan(a^2+x^2)}$.

【解析】 (1) $y = e^{-x}$ 是由 $y = e^u$ 与 $u = -x$ 复合而成的.

(2) $y = \sin^2(1+2x)$ 是由 $y = \sin^2 u$ 与 $u = 1+2x$ 复合而成的.



(3) $y = \arccos \sqrt{\tan(a^2 + x^2)}$ 是由 $y = \arccos u, u = \sqrt{v}, v = \tan w, w = a^2 + x^2$ 复合而成的.

3) 反函数

定义 4 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D , 值域为 $f(D)$. 如果对任一 $y \in f(D)$, 都存在唯一的 $x \in D$, 使得 $x = g(y)$, 即确定了一个以 y 为自变量, x 为因变量的函数, 那么称这个新确定的函数为 $y = f(x)$ 的反函数, 记为 $x = f^{-1}(y)$. 由于习惯上用 x 表示自变量, 用 y 表示因变量, 因此将反函数中的 x 与 y 互换位置, 即记为 $y = f^{-1}(x), x \in f(D)$.

注: 从函数图像上来看, 两个互为反函数的函数, 它们的图像关于直线 $y = x$ 对称.



备考提示

求函数 $y = f(x)$ 的反函数, 通常是把解析式 $y = f(x)$ 变形为 x 关于 y 的等式 $x = g(y)$, 然后互换 x 与 y 的位置, 得到 $y = g(x)$, 函数 $y = g(x)$ 即为函数 $y = f(x)$ 的反函数.

例题 1.1.6 求函数 $y = \frac{3x-5}{2x+1}$ 的反函数.

【解析】 在 $y = \frac{3x-5}{2x+1}$ 两边同时乘 $2x+1$, 移项整理得

$$x(3-2y) = 5+y,$$

等号两边同时除以 $3-2y$, 得

$$x = \frac{5+y}{3-2y}.$$

故函数 $y = \frac{3x-5}{2x+1}$ 的反函数为 $y = \frac{5+x}{3-2x}$.

例题 1.1.7 求函数 $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ 的反函数.

【解析】 分别以 $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ 的两边为指数, e 为底数, 得

$$e^y = x + \sqrt{x^2+1},$$

移项整理得

$$\sqrt{x^2+1} = e^y - x,$$

等号两边同时平方, 整理得

$$x = \frac{e^y - e^{-y}}{2}.$$

故函数 $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ 的反函数为 $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

4) 隐函数

定义 5 如果变量 x, y 满足方程 $F(x, y) = 0$, 且在一定条件下, 当 x 取某区间内的任一值时, 相应地总有满足这方程的唯一的 y 值存在, 那么就说方程 $F(x, y) = 0$ 在该区间确定了一个隐函数 $y = f(x)$.

例如, 方程 $x^2 + y^2 = 1$ 在 $[-1, 1]$ 上确定了两个隐函数 $y = \sqrt{1-x^2}$ 和 $y = -\sqrt{1-x^2}$.

二、函数的基本性质

1. 函数的有界性

定义 6 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 数集 $X \subset D$. 若存在一个正数 M , 使得对任一 $x \in X$, 恒有

$$|f(x)| \leq M,$$

则称函数 $f(x)$ 在 X 上有界, 或称 $f(x)$ 是 X 上的有界函数. 若不存在这样的正数 M , 则称 $f(x)$ 在 X 上无界.

例如, 函数 $y = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界, 因为对任何实数 x , 恒有 $|\sin x| \leq 1$. 又如, 函数 $y = \frac{1}{x}$ 在区间 $(0, 1)$ 上无界, 在 $[1, +\infty)$ 上有界.

例题 1.1.8 判断下列函数在给定区间上是否有界.

(1) $y = x, x \in (-\infty, +\infty)$;

(2) $y = \frac{1}{x^2 + 1}, x \in (-\infty, +\infty)$;

(3) $y = e^x, x \in (-\infty, 0)$;

(4) $y = \arctan x, x \in (-\infty, +\infty)$.

【解析】 (1) 显然, 函数 $y = x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上无界.

(2) 因为当 $x \in (-\infty, +\infty)$ 时, $\left| \frac{1}{x^2 + 1} \right| \leq \frac{1}{1} = 1$, 所以函数 $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界.

(3) 因为当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $|e^x| < e^0 = 1$, 所以函数 $y = e^x$ 在 $(-\infty, 0)$ 上有界.

(4) 因为当 $x \in (-\infty, +\infty)$ 时, $|\arctan x| < \frac{\pi}{2}$, 所以函数 $y = \arctan x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界.

2. 函数的奇偶性

定义 7 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 且 D 关于原点对称, 即对任一 $x \in D$, 都有一 $-x \in D$. 若

$$f(-x) = f(x)$$

对一切 $x \in D$ 成立, 则称 $f(x)$ 为偶函数; 若

$$f(-x) = -f(x)$$

对一切 $x \in D$ 成立, 则称 $f(x)$ 为奇函数.

从函数图像上看, 偶函数的图像关于 y 轴对称, 奇函数的图像关于原点对称.

例题 1.1.9 判断下列函数的奇偶性.

(1) $f(x) = x^2(1+x^2)$;

(2) $f(x) = x(x+1)(x-1)$.

【解析】 (1) 因为函数 $f(x) = x^2(1+x^2)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 且

$$f(-x) = (-x)^2[1+(-x)^2] = x^2(1+x^2) = f(x),$$

所以 $f(x) = x^2(1+x^2)$ 是偶函数.

(2) 因为函数 $f(x) = x(x+1)(x-1)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 且

$$f(-x) = (-x)[(-x)+1][(-x)-1] = -x(x+1)(x-1) = -f(x),$$

所以 $f(x) = x(x+1)(x-1)$ 是奇函数.





小贴士

在判断函数的奇偶性时,一定要先判断函数的定义域是否关于原点对称,再判断 $f(x)$ 与 $f(-x)$ 的关系.

3. 函数的单调性

定义 8 设函数 $f(x)$ 定义域为 D , 区间 $I \subset D$. 若对于 I 上任意两点 x_1, x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有

$$f(x_1) < f(x_2),$$

则称 $f(x)$ 在 I 上是单调增加的; 若对于区间 I 上任意两点 x_1, x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有

$$f(x_1) > f(x_2),$$

则称 $f(x)$ 在 I 上是单调减少的.

例题 1.1.10 判断下列函数的单调性.

$$(1) f(x) = \frac{1}{1-x}, x \in (-\infty, 1);$$

$$(2) f(x) = x^2 - 2x, x \in (1, +\infty).$$

【解析】 (1) 任取 $x_1, x_2 \in (-\infty, 1)$, 且 $x_1 < x_2$, 则

$$1 - x_1 > 1 - x_2 > 0,$$

从而

$$\frac{1}{1-x_1} < \frac{1}{1-x_2},$$

即得

$$f(x_1) < f(x_2).$$

故 $f(x) = \frac{1}{1-x}$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调增加.

(2) 任取 $x_1, x_2 \in (1, +\infty)$, 且 $x_1 < x_2$, 则

$$x_1 + x_2 > 2, x_2 - x_1 > 0,$$

从而

$$f(x_2) - f(x_1) = x_2^2 - x_1^2 - 2(x_2 - x_1) = (x_2 + x_1 - 2)(x_2 - x_1) > 0,$$

即得

$$f(x_1) < f(x_2).$$

故 $f(x) = x^2 - 2x$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调增加.



小贴士

作差与作商是判断函数单调性常用的方法, 需要注意的是, 作商判断单调性时, 要考虑函数值的正负.

4. 函数的周期性

定义 9 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D . 若存在一个正数 T , 使得对任一 $x \in D$, 有 $(x+T) \in D$, 且

$$f(x+T) = f(x)$$

恒成立,则称 $f(x)$ 为周期函数,同时称 T 为 $f(x)$ 的一个周期. 如果函数 $f(x)$ 的所有周期中,存在一个最小的周期 T_0 ,那么称 T_0 为 $f(x)$ 的最小正周期.

注:并非所有的周期函数都有最小正周期. 例如,对于狄利克雷函数 $D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 是有理数,} \\ 0, & x \text{ 是无理数,} \end{cases}$ 任何正有理数都是它的周期,由于不存在最小的正有理数,因此它没有最小正周期.

例题 1.1.11 判断下列函数的周期性,如果是周期函数,写出它们的最小正周期.

(1) $f(x) = \tan 2x$;

(2) $f(x) = x \tan x$;

(3) $f(x) = |\sin 2x|$.

【解析】 (1) 函数 $f(x) = \tan 2x$ 是周期函数,它的最小正周期是 $\frac{\pi}{2}$.

(2) 函数 $f(x) = x \tan x$ 不是周期函数.

(3) 函数 $f(x) = |\sin 2x|$ 是周期函数,它的最小正周期是 $\frac{\pi}{2}$.



小贴士

如果函数 $f(x)$ 的周期是 T ,那么函数 $f(\omega x)$ ($\omega > 0$) 的周期是 $\frac{T}{\omega}$.

三、基本初等函数

1. 幂函数

形如 $y = x^a$ (a 为常数) 的函数称为幂函数. $a = 1, 2, 3, \frac{1}{2}, -1$ 时,幂函数 $y = x^a$ 的图像如图 1.1.1 所示.

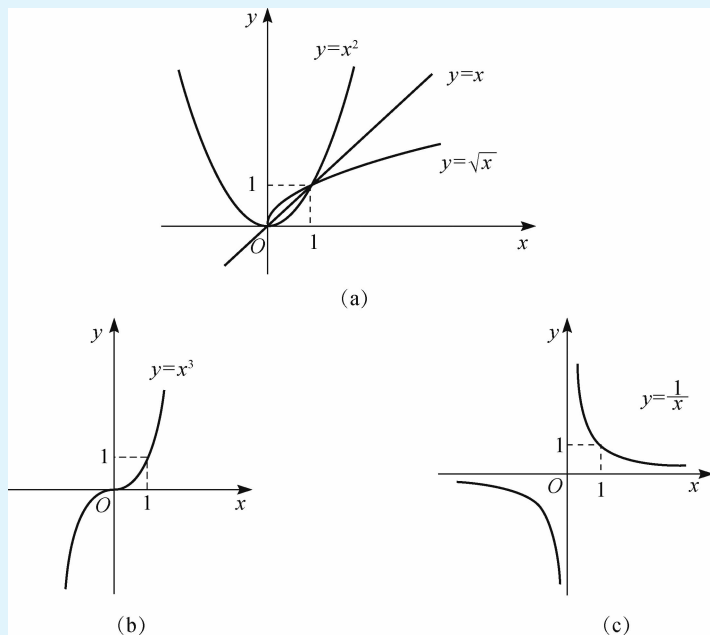


图 1.1.1



幂函数 $y=x^a$ 的图像恒过点 $(1,1)$. 当 $a>0$ 时, 幂函数 $y=x^a$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调增加; 当 $a<0$ 时, 幂函数 $y=x^a$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调减少.



备考提示

指数幂及其运算性质:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}; a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}; a^m a^n = a^{m+n}; (a^m)^n = a^{mn}; (ab)^m = a^m b^m.$$

其中 $a>0, b>0, m \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{R}$.

2. 指数函数

形如 $y=a^x (a>0, a \neq 1)$ 的函数称为指数函数. 指数函数的定义域为 $\mathbf{R}$, 值域为 $(0, +\infty)$, 它的图像如图 1.1.2 所示.

指数函数 $y=a^x$ 的图像恒过点 $(0,1)$. 当 $a>1$ 时, 指数函数 $y=a^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调增加; 当 $0<a<1$ 时, 指数函数 $y=a^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调减少.

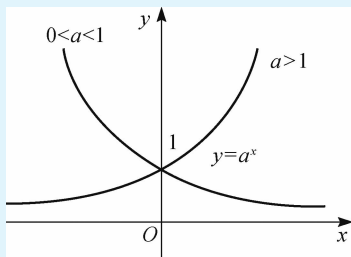


图 1.1.2

3. 对数函数

形如 $y=\log_a x (a>0, a \neq 1)$ 的函数称为对数函数. 对数函数的定义域为 $(0, +\infty)$, 值域为 $\mathbf{R}$, 它的图像如图 1.1.3 所示.

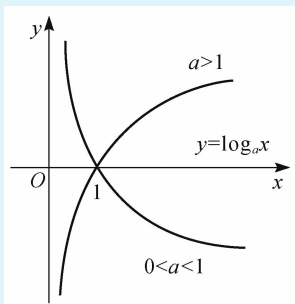


图 1.1.3

特别地, 以 10 为底的对数函数称为常用对数函数, 简记为 $y=\lg x$; 以 $e (e=2.718\ 28\cdots)$ 是一个无理数) 为底的对数函数称为自然对数函数, 简记为 $y=\ln x$.

对数函数 $y=\log_a x$ 的图像恒过点 $(1,0)$. 当 $a>1$ 时, 对数函数 $y=\log_a x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调增加; 当 $0<a<1$ 时, 对数函数 $y=\log_a x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调减少.

注:对于确定的实数 $a(a>0, a\neq 1)$, 指数函数 $y=a^x$ 与对数函数 $y=\log_a x$ 互为反函数, 它们的图像关于直线 $y=x$ 对称.



备考提示

对数的运算性质:

$$\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N; \quad \log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N;$$

$$\log_a M^n = n \log_a M; \quad \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \text{ (换底公式).}$$

其中 $a>0$, 且 $a\neq 1$; $b>0$; $c>0$, 且 $c\neq 1$; $M>0, N>0$; $n\in\mathbf{R}$.

4. 三角函数

正弦函数 $y=\sin x$ 、余弦函数 $y=\cos x$ 、正切函数 $y=\tan x$ 、余切函数 $y=\cot x$ 统称为三角函数, 它们的图像如图 1.1.4 所示.

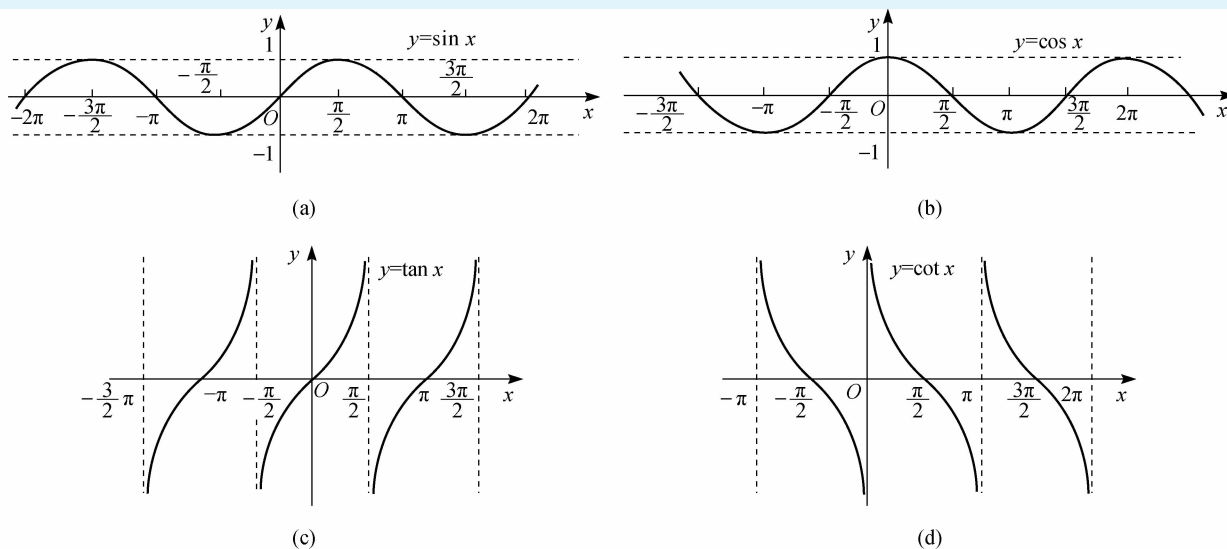


图 1.1.4

正弦函数 $y=\sin x$ 和余弦函数 $y=\cos x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 值域为 $[-1, 1]$; 正切函数 $y=\tan x$ 的定义域为 $\{x \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$, 值域为 $\mathbf{R}$; 余切函数 $y=\cot x$ 的定义域为 $\{x \mid x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$, 值域为 $\mathbf{R}$.



备考提示

三角函数的常用公式:

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha; \quad \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1;$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta; \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta;$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha; \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha.$$



5. 反三角函数

正弦函数 $y = \sin x$ 在区间 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上的反函数, 称为反正弦函数, 记作 $y = \arcsin x$, 其定义域为 $[-1, 1]$, 值域为 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, 图像如图 1.1.5(a) 所示.

余弦函数 $y = \cos x$ 在区间 $[0, \pi]$ 上的反函数, 称为反余弦函数, 记作 $y = \arccos x$, 其定义域为 $[-1, 1]$, 值域为 $[0, \pi]$, 图像如图 1.1.5(b) 所示.

正切函数 $y = \tan x$ 在区间 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上的反函数, 称为反正切函数, 记作 $y = \arctan x$, 其定义域为 $\mathbf{R}$, 值域为 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, 图像如图 1.1.5(c) 所示.

余切函数 $y = \cot x$ 在区间 $(0, \pi)$ 上的反函数, 称为反余切函数, 记作 $y = \operatorname{arccot} x$, 其定义域为 $\mathbf{R}$, 值域为 $(0, \pi)$, 图像如图 1.1.5(d) 所示.

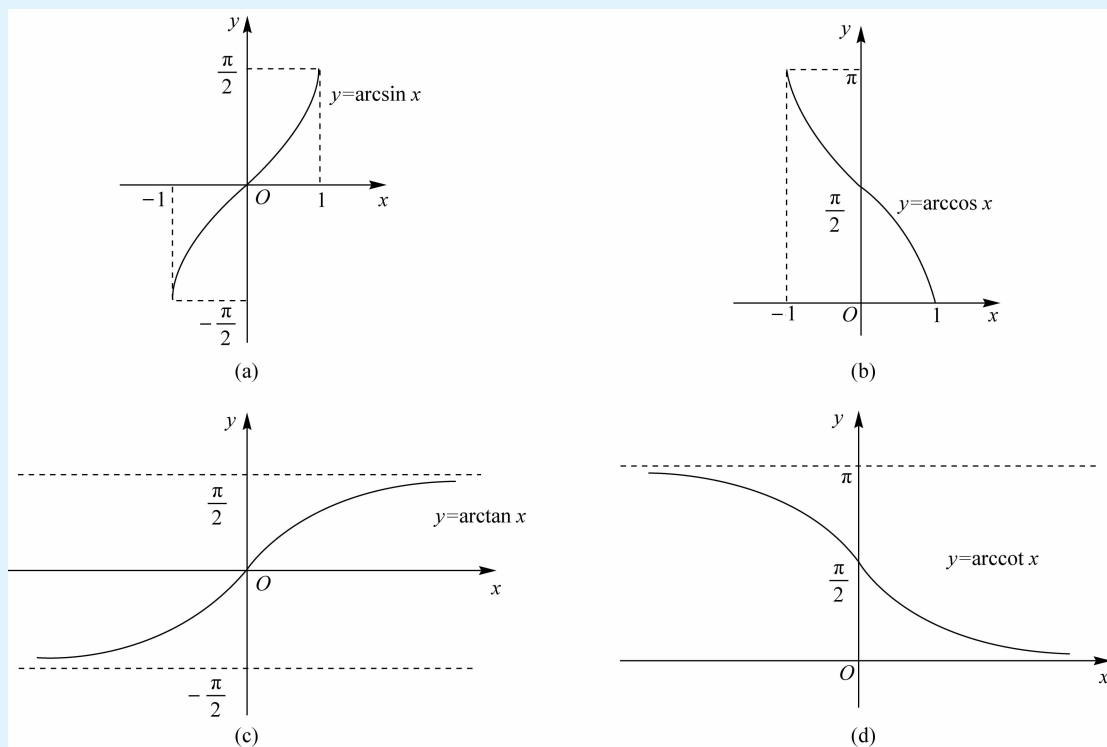


图 1.1.5

定义 10 由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合所构成的函数, 称为初等函数.

巩固练习

1. 函数 $f(x) = \sin \frac{1}{\sqrt{x}}$ 的定义域为().

A. $(-\infty, 0)$

B. $(-\infty, 0]$

C. $(0, +\infty)$ D. $[0, +\infty)$ 2. 函数 $f(x) = \sqrt{3-x} + \ln(x-2)$ 的定义域为().A. $(2, 3]$ B. $[3, +\infty)$ C. $(-\infty, 2)$ D. $[2, 3)$ 3. 函数 $f(x) = \arcsin \frac{x+1}{2} + \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ 的定义域为().A. $[-3, -1]$ B. $(-3, -1]$ C. $[-3, -1)$ D. $(-3, -1)$ 4. 函数 $y = \arcsin |x-2| + \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}$ 的定义域为().A. $(1, 3]$ B. $[1, 3)$ C. $(0, 3)$ D. $[1, 3]$ 5. 函数 $f(x) = \frac{x-1}{\ln x} + \sqrt{16-x^2}$ 的定义域为().A. $(0, 1)$ B. $(0, 1) \cup (1, 4)$ C. $(0, 4)$ D. $(0, 1) \cup (1, 4]$ 6. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1, \\ x + \frac{6}{x} - 6, & x > 1, \end{cases}$ 则 $f(f(-3)) = ()$.A. $\frac{11}{3}$

B. 9

C. $\frac{2}{3}$

D. 6

7. 设函数 $y = 2 + \ln(x+3)$, 则此函数的反函数是().A. $y = e^{2x+3} - 3$ B. $y = e^{x-2} - 3$ C. $x = \ln(y-2) - 3$ D. $y = \ln(x-2) - 3$ 8. 函数 $y = \sqrt{x-2} + 1 (x \geq 2)$ 的反函数是().A. $y = 2 - (x-1)^2 (x \geq 2)$ B. $y = 2 + (x-1)^2 (x \geq 2)$ C. $y = 2 - (x-1)^2 (x \geq 1)$ D. $y = 2 + (x-1)^2 (x \geq 1)$ 9. 函数 $f(x) = \frac{1}{1+x}$ 在其定义域内是().

A. 有界函数

B. 无界函数

C. 奇函数

D. 偶函数

10. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数. 若 $f(x)$ 的最小正周期为 4, 且 $f(1) > 0, f(3) = \frac{m-3}{m+1}$, 则 m

的取值范围是().

A. $-3 < m < 1$ B. $m > 1$ 或 $m < -3$ C. $-1 < m < 3$ D. $m > 3$ 或 $m < -1$



真题链接

1. (2023 · 天津) 已知 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 3]$, 则 $f(x-1)$ 的定义域为().

- A. $[0, 3]$ B. $[-1, 2]$
C. $[1, 4]$ D. $[-1, 3]$

【答案】 C

【解析】 因为 $0 \leq x-1 \leq 3$, 解得 $x \in [1, 4]$, 所以选 C.

2. (2022 · 天津) 下列各组函数中, $f(x)$ 和 $g(x)$ 为相同函数的是().

- A. $f(x) = (\sqrt{x})^2, g(x) = \sqrt{x^2}$ B. $f(x) = \sqrt[3]{x^3}, g(x) = x$
C. $f(x) = x+1, g(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ D. $f(x) = \ln x^2, g(x) = 2\ln x$

【答案】 B

【解析】 A 选项中, $f(x)$ 的定义域为 $x \geq 0$, $g(x)$ 的定义域为任意实数; B 选项中, $f(x) = \sqrt[3]{x^3} = x = g(x)$; C 选项中, $f(x)$ 的定义域为任意实数, $g(x)$ 的定义域为 $x \neq 1$; D 选项中, $f(x)$ 的定义域为 $x \neq 0$, $g(x)$ 的定义域为 $x > 0$, 所以选 B.

3. (2021 · 天津) 函数 $f(x) = \sqrt{4-x^2} + \ln(x-1)$ 的定义域为().

- A. $[1, 2]$ B. $(1, 2]$ C. $(-2, 1)$ D. $[-2, 1)$

【答案】 B

【解析】 函数的定义域为 $-2 \leq x \leq 2$ 并且 $x > 1$, 即 $(1, 2]$, 所以选 B.

4. (2020 · 天津) 下面各组函数中, $f(x)$ 与 $g(x)$ 为同一个函数的是().

- A. $f(x) = |x|, g(x) = \sqrt{(-x)^2}$ B. $f(x) = \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x}, g(x) = x \cdot \frac{1}{x}$
C. $f(x) = x-1, g(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$ D. $f(x) = \ln x - \ln(x+1), g(x) = \ln \frac{x}{x+1}$

【答案】 A

【解析】 A 选项中, $g(x) = \sqrt{(-x)^2} = |x| = f(x)$; B 选项中, $f(x)$ 的定义域为任意实数, $g(x)$ 的定义域为 $x \neq 0$; C 选项中, $f(x)$ 的定义域为任意实数, $g(x)$ 的定义域为 $x \neq -1$; D 选项中, $f(x)$ 的定义域为 $x > 0$, $g(x)$ 的定义域为 $x < -1$ 或 $x > 0$, 所以选 A.

5. (2019 · 天津) 下面各组函数中, $f(x)$ 与 $g(x)$ 为同一个函数的是().

- A. $f(x) = 1, g(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$ B. $f(x) = x, g(x) = (\sqrt{x})^2$
C. $f(x) = \ln \sqrt{x}, g(x) = \frac{1}{2} \ln |x|$ D. $f(x) = \sqrt{x} \sqrt{x+1}, g(x) = \sqrt{x(x+1)}$

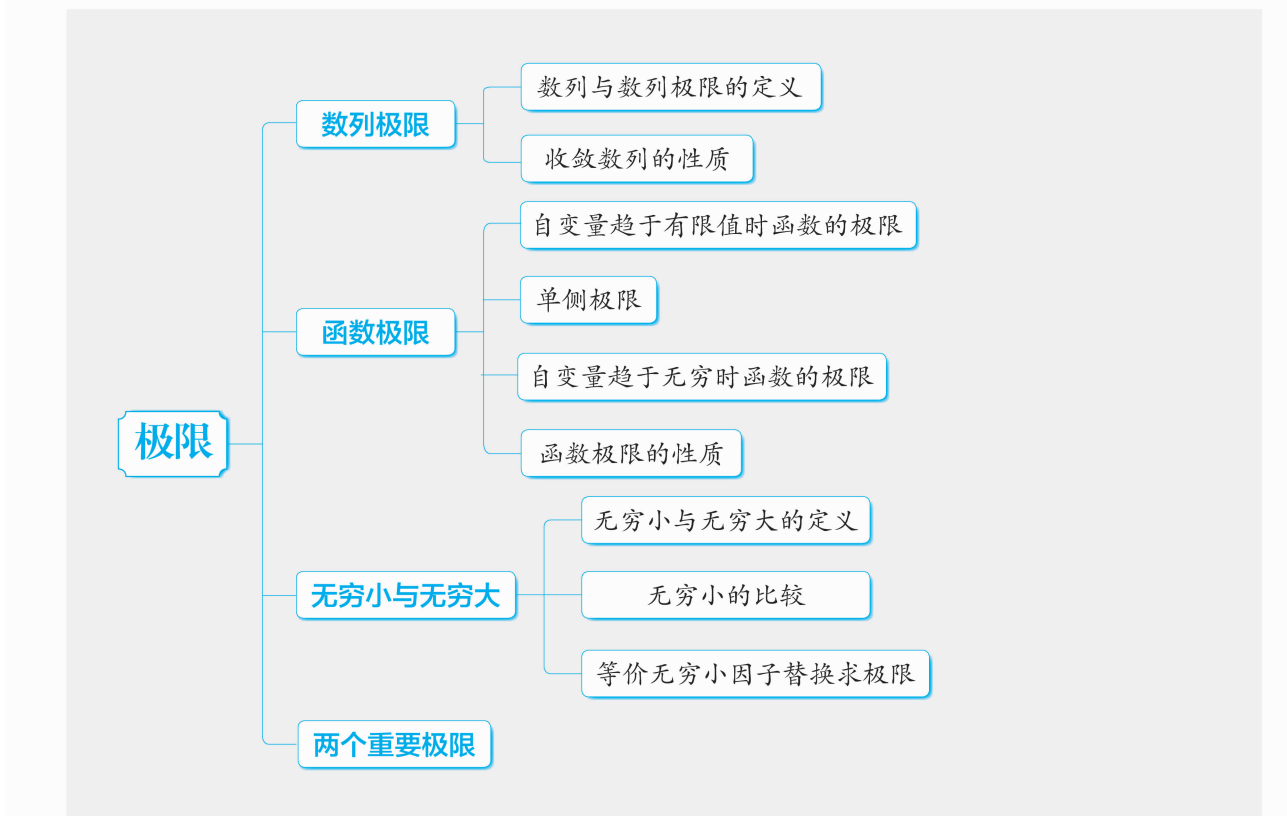
【答案】 A

【解析】 A 选项中, $g(x) = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$, 所以 A 正确; B 选项中, $g(x) = (\sqrt{x})^2$ 的定义域为 $x \geq 0$, 与 $f(x)$ 的定义域不同; C 选项中, $f(x)$ 的定义域为 $x > 0$, $g(x)$ 的定义域为 $x \neq 0$; D 选项中, $f(x)$ 的定义域为 $x \geq -1$, $g(x)$ 的定义域为 $x \leq -1$ 或 $x \geq 0$, 所以选 A.



第二节 极 限

知识脉络



知识精讲

一、数列极限

1. 数列与数列极限的定义

按照一定顺序排列的一列数

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$$

称为数列, 简记为 $\{x_n\}$, 其中 x_n 称为通项. 例如:

$$1, 2, 3, \cdots, n, \cdots$$

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$$

$$2, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \cdots, \frac{n+(-1)^{n-1}}{n}, \cdots$$



它们的通项分别是 $n, \frac{1}{n}, \frac{n+(-1)^{n-1}}{n}$.

注: 数列可以看成是定义在正整数集上的函数 $x_n = f(n)$, 数列的通项就是这个函数的表达式. 需要注意的是, 并不是所有的数列都能写出它的通项.

定义 1 给定一个数列 $\{x_n\}$, 如果当 n 无限增大时 (即 $n \rightarrow \infty$ 时), x_n 能无限接近于某个确定的实数 a , 那么称数列 $\{x_n\}$ 是收敛的, 并称 a 为数列 $\{x_n\}$ 的极限 (或者说数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a), 记作

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \text{ 或者 } x_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty).$$

如果不存在实数 a , 使得数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a , 那么称 $\{x_n\}$ 是发散的, 习惯上也称 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 不存在.

例如, 数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, 当 n 无限增大时, $\frac{1}{n}$ 无限减小并接近于 0, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$. 又如, 数列 $\left\{\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}\right\}$, 当 n 增大时, $\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}$ 无限接近于 1, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+(-1)^{n-1}}{n} = 1$.

收敛数列的特性是“随着 n 的无限增大, x_n 能无限地接近某一常数 a ”, 这就是说, 当 n 充分大时, 数列的通项 x_n 与常数 a 之差的绝对值可以任意小. 下述定义 2 是数列极限的精确定义.

定义 2 设 $\{x_n\}$ 为一数列, 如果存在常数 a , 对于任意给定的正数 ε (不论它多么小), 总存在正整数 N , 使得当 $n > N$ 时, 不等式

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

都成立, 那么常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

数列极限研究的是当 n 足够大时数列的变化趋势, 因此数列的极限与数列的有限项无关, 改变或者删去数列的有限项不会改变数列的极限.

例题 1.2.1 计算下列极限.

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right); \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

【解析】 (1) 当 n 无限增大时, $1 + \frac{1}{n}$ 无限接近于 1, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$.

(2) 当 n 无限增大时, $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ 无限接近于 0, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$.

例题 1.2.2 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 (a > 1)$.

【解析】 令 $h_n = |\sqrt[n]{a} - 1| = \sqrt[n]{a} - 1$, 则

$$(1 + h_n)^n = a.$$

利用二项式定理, 上式可化为

$$1 + nh_n + \frac{n(n-1)}{2}(h_n)^2 + \cdots + (h_n)^n = a,$$

于是

$$nh_n < a,$$

从而

$$0 < h_n < \frac{a}{n}.$$

对任意给定的正数 ε , 要使 $|\sqrt[n]{a}-1|=h_n<\varepsilon$, 只需令 $\frac{a}{n}<\varepsilon$. 现在取 $N=\left[\frac{a}{\varepsilon}\right]\left(\left[\frac{a}{\varepsilon}\right]\right.$ 表示 $\frac{a}{\varepsilon}$ 向下取整), 则当 $n>N$ 时, 就有 $|\sqrt[n]{a}-1|<\varepsilon$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a}=1$.

2. 收敛数列的性质

定理 1 (数列极限的唯一性) 如果数列 $\{x_n\}$ 收敛, 那么它的极限唯一.

定理 2 (收敛数列的有界性) 如果数列 $\{x_n\}$ 收敛, 那么它是有界的, 即存在正常数 M , 对一切正整数 n , 有 $|x_n|<M$.

定理 3 (收敛数列的保号性) 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n=a$, 且 $a>0$ (或 $a<0$), 那么存在正整数 N , 当 $n>N$ 时, 有 $x_n>0$ (或 $x_n<0$).

推论 1 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n=a$, 且存在正整数 N , 当 $n>N$ 时, 有 $x_n \geq 0$ (或 $x_n \leq 0$), 那么 $a \geq 0$ (或 $a \leq 0$).

定理 4 (数列极限的四则运算) 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n=a, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n=b$, 则

$$\textcircled{1} \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b; \textcircled{2} \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = a \cdot b; \textcircled{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b} (b \neq 0).$$

推论 2 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n=a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} cx_n=ca (c \in \mathbf{R}), \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)^n=a^n (n \in \mathbf{N}^*)$.

注: 定理 4 可以推广至有限多个收敛数列的情形. 利用定理 4 和推论 2 可以计算一些稍复杂的数列的极限.

例题 1.2.3 计算下列极限.

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2+n+1}{2n^2+5n+2};$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n}).$$

【解析】 (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2+n+1}{2n^2+5n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (3+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})}{\lim_{n \rightarrow \infty} (2+\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2})} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 3 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^2}} = \frac{3}{2}.$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}. \text{ 显然, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0, \text{ 所以 } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=0.$$



备考提示

定理 4 和推论 2 的应用前提是单个数列的极限存在, 如果单个数列的极限不存在, 那么就要寻找其他方法计算极限. 通常, 如果分子分母都是关于 n 的多项式, 那么可以同时除以分子和分母的最高次幂项. 此外, 对于无穷项相加的情形不能直接使用定理 4.

例题 1.2.4 计算下列极限.

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} (1+q+q^2+\cdots+q^n), \text{ 其中 } |q|<1;$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} \right].$$

【解析】 (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (1+q+q^2+\cdots+q^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q} \lim_{n \rightarrow \infty} (1-q^{n+1}) = \frac{1}{1-q}.$



(2) 由于 $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$, 因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 1.$$

定理 5 (夹逼准则) 设数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 都以 a 为极限, 数列 $\{z_n\}$ 满足: 存在正整数 N_0 , 当 $n > N_0$ 时, 有

$$x_n \leq z_n \leq y_n,$$

则数列 $\{z_n\}$ 收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$.

例题 1.2.5 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right)$.

【解析】 因为

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}},$$

而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1,$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) = 1.$$

例题 1.2.6 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

【解析】 令 $\sqrt[n]{n} = 1 + h_n$ ($h_n > 0$), 则当 $n > 3$ 时,

$$\begin{aligned} n &= (1 + h_n)^n = 1 + nh_n + \frac{n(n-1)}{2}(h_n)^2 + \cdots + (h_n)^n \\ &\geq \frac{n(n-1)}{2}(h_n)^2, \end{aligned}$$

于是

$$0 < h_n < \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}},$$

从而

$$1 \leq \sqrt[n]{n} = 1 + h_n \leq 1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}}.$$

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$, 因此由夹逼准则知, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

定义 3 如果数列 $\{x_n\}$ 满足条件

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_n \leq x_{n+1} \leq \cdots,$$

就称数列 $\{x_n\}$ 是单调增加的; 如果数列 $\{x_n\}$ 满足条件

$$x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \cdots \geq x_n \geq x_{n+1} \geq \cdots,$$

就称数列 $\{x_n\}$ 是单调减少的. 单调增加和单调减少的数列统称为单调数列.

定理 6(单调有界定理) 单调有界数列必有极限.

例题 1.2.7 设 $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{n^n}$. 证明: 数列 $\{x_n\}$ 收敛.

【解析】 显然, 数列 $\{x_n\}$ 是单调增加的, 且

$$\begin{aligned} x_n &= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{n^n} \\ &\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2^n})}{1 - \frac{1}{2}} \leq \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

因此, 由单调有界定理, 数列 $\{x_n\}$ 收敛.

例题 1.2.8 证明: 数列 $\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \cdots$ 收敛.

【解析】 设数列的第 n 项为 x_n , 则

$$x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}.$$

因为

$$x_1 = \sqrt{2} < 2,$$

所以

$$x_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}} < 2.$$

以此类推, $0 < x_n < 2$, 于是

$$x_{n+1} = \sqrt{2+x_n} > x_n,$$

即数列 $\{x_n\}$ 是单调递增且有界的数列. 由单调有界定理, 数列 $\{x_n\}$ 收敛.

二、函数极限

1. 自变量趋于有限值时函数的极限

定义 4 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义. 如果当 x 无限接近 x_0 时 (即 $x \rightarrow x_0$ 时), 对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于某个确定的实数 A , 那么称当 x 趋于 x_0 时, 函数 $f(x)$ 以 A 为极限 (或者说函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的极限存在, 其极限为 A), 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \text{ 或者 } f(x) \rightarrow A (x \rightarrow x_0).$$

上述定义中, 只要求 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义, 所以 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 与函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的取值没有关系, $f(x_0)$ 是否改变, 甚至是否存在都不影响 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$. 下述定义 5 是自变量趋于有限值时函数的极限的精确定义.

定义 5 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义. 如果存在常数 A , 对任意给定的正数 ε (不论它多么小), 总存在正数 δ , 使得当 x 满足不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 对应的函数值都满足不等式

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

那么常数 A 是函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的极限, 即 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

例题 1.2.9 计算下列极限.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} (x+2); \quad (2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1}.$$

【解析】 (1) 当 x 趋于 1 时, $x+2$ 无限接近于 3, 所以 $\lim_{x \rightarrow 1} (x+2) = 3$.

(2) 当 x 趋于 1 时, $\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = x+1$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2$.

2. 单侧极限

在 x 趋于 x_0 时函数 $f(x)$ 的极限的定义中, x 既从 x_0 的左侧也从 x_0 的右侧趋于 x_0 . 如果当 x 仅从 x_0 的左侧趋于 x_0 (记作 $x \rightarrow x_0^-$) 时, $f(x)$ 趋于某个确定的实数 A , 那么就说函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的左极限存在, 并称 A 为 $f(x)$ 在点 x_0 处的左极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A \text{ 或 } f(x_0^-) = A.$$

如果当 x 仅从 x_0 的右侧趋于 x_0 (记作 $x \rightarrow x_0^+$) 时, $f(x)$ 趋于某个确定的实数 A , 那么就说函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的右极限存在, 并称 A 为 $f(x)$ 在点 x_0 处的右极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A \text{ 或 } f(x_0^+) = A.$$

定理 7 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的极限存在的充要条件是, 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的左、右极限都存在并且相等.

例题 1.2.10 判断下列函数在 $x=1$ 处的极限是否存在, 如果存在, 请写出极限值.

$$(1) f(x) = \begin{cases} 3x-1, & x \leq 1, \\ x+1, & x > 1; \end{cases}$$

$$(2) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \leq 1, \\ x^2-2, & x > 1. \end{cases}$$

【解析】 (1) 因为 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (3x-1) = 2$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+1) = 2$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$, 从而 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$.

(2) 因为 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2-2) = -1$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, 从而 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 不存在.

例题 1.2.11

设函数 $f(x) = \begin{cases} x, & -1 < x < 0, \\ 1, & x = 0, \\ -x, & 0 < x < 1, \\ x-1, & x \geq 1. \end{cases}$ 下列陈述中, 正确的是().

A. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 不存在

B. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

C. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$

D. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$

【解析】 因为 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$, 从而 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$. 因为 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-x) = -1$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) = 0$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, 从而 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 不存在. 故本题选 B.



3. 自变量趋于无穷时函数的极限

定义 6 设函数 $f(x)$ 在 $|x|$ 大于某一正数时有定义. 如果当 $|x|$ 无限增大时(即 $x \rightarrow \infty$ 时), 对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于某个确定的实数 A , 那么称当 $x \rightarrow \infty$ 时, 函数 $f(x)$ 以 A 为极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \text{ 或者 } f(x) \rightarrow A (x \rightarrow \infty).$$

特别地, 如果 x 取正值且无限增大时, 对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于某个确定的实数 A , 那么称当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 函数 $f(x)$ 以 A 为极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \text{ 或者 } f(x) \rightarrow A (x \rightarrow +\infty).$$

如果 x 取负值且 $|x|$ 无限增大时, 对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于某个确定的实数 A , 那么称当 $x \rightarrow -\infty$ 时, 函数 $f(x)$ 以 A 为极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A \text{ 或者 } f(x) \rightarrow A (x \rightarrow -\infty).$$

需要注意的是, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ 包含了 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ 和 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$. 因此, 如果 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ 中至少有一个不存在, 或 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ 都存在, 但不相等, 那么 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 不存在.

注: 由于数列是特殊的函数, 因此给定一个函数 $f(x)$, 若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在, 则数列 $\{f(n)\}$ 的极限也存在, 并

且 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. 需要注意, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)$ 存在不一定能推出 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 也存在, 如 $f(x) =$

$$\begin{cases} 1, & x \in \mathbf{N}, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

例题 1.2.12 判断极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x$ 是否存在.

【解析】 由反正切函数的图像可知, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$, 所以 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x \neq \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x$, 从而 $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x$ 不存在.

例题 1.2.13 判断极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x$ 是否存在.

【解析】 由指数函数 $y = e^x$ 的图像可知, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x$ 不存在, 所以 $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x$ 不存在.

4. 函数极限的性质

这里以自变量趋于有限值时函数的极限为代表, 说明函数极限的性质, 至于其他形式的函数极限的性质, 只要相应地做一些修改即可得到.

定理 8(函数极限的唯一性) 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 那么该极限值唯一.

定理 9(函数极限的局部有界性) 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 那么存在常数 $\delta > 0$ 和 $M > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x)| \leq M$.

定理 10(函数极限的局部保号性) 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 且 $A > 0$ (或 $A < 0$), 那么存在常数 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $f(x) > 0$ (或 $f(x) < 0$).

推论 3 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 且存在常数 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $f(x) \geq 0$ (或 $f(x) \leq 0$), 那么 $A \geq 0$ (或 $A \leq 0$).



小贴士

函数在一点处(或无穷远处)的极限存在是指函数在这一点附近(或无穷远处)满足函数极限存在的定义,所以定理 9,定理 10 都是局部性质(定理中的 $0 < |x - x_0| < \delta$ 就是将自变量限制在 x_0 附近).但是在更大的区间上有界性和保号性可能不成立,如函数 $f(x) = x$,它在任意点处的极限都存在,所以它满足局部有界性和局部保号性,但在 $\mathbf{R}$ 上 $f(x)$ 无界且变号.

定理 11(函数极限的四则运算) 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, 则

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B;$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B;$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} (B \neq 0).$$

推论 4 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} cf(x) = cA (c \in \mathbf{R}), \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^n = A^n (n \in \mathbf{N}^*)$.

例题 1.2.14 计算下列极限.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 3x); \quad (2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + x + 1}{x^3 + 2x^2 - 1}; \quad (3) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4}.$$

【解析】 (1) $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 3x) = \lim_{x \rightarrow 2} x^2 + \lim_{x \rightarrow 2} 3x = 4 + 6 = 10$.

$$(2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + x + 1}{x^3 + 2x^2 - 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 + x + 1)}{\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 + 2x^2 - 1)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} 2x^2 + \lim_{x \rightarrow 1} x + \lim_{x \rightarrow 1} 1}{\lim_{x \rightarrow 1} x^3 + \lim_{x \rightarrow 1} 2x^2 - \lim_{x \rightarrow 1} 1} = \frac{2 + 1 + 1}{1 + 2 - 1} = 2.$$

(3) 需要注意,当 $x \rightarrow 4$ 时,分母 $x - 4$ 的极限为 0,不能直接使用极限的运算,这里可以先将分子和分母约去公因式 $x - 4$,再计算函数的极限.

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x - 4)(x + 4)}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} (x + 4) = \lim_{x \rightarrow 4} x + \lim_{x \rightarrow 4} 4 = 8.$$

三、无穷小与无穷大

1. 无穷小与无穷大的定义

定义 7 如果当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时,函数 $f(x)$ 的极限为零,那么称 $f(x)$ 为当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的无穷小.特别地,以零为极限的数列 $\{x_n\}$ 是当 $n \rightarrow \infty$ 时的无穷小.



备考提示

(1) 无穷小并不是一个“非常小的数”(如 10^{-100}),而是一个极限为零的变量,它的绝对值可以小于任一给定的数的绝对值.常数 $\{0\}$ 是一个特殊的无穷小.

(2) 由无穷小的定义和函数极限的四则运算可知,无穷小与有界量的乘积仍为无穷小,有限个无穷小的和仍为无穷小.

定义 8 如果当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时,函数 $f(x)$ 的绝对值 $|f(x)|$ 可以大于预先指定的任何正数 M ,那么称函数 $f(x)$ 为当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的无穷大,记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \text{ (或 } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \text{)}.$$

定理 12 在 x 的同一变化过程中, 无穷大的倒数为无穷小; 不恒为零的无穷小的倒数为无穷大.

例题 1.2.15 判断下列变量是无穷小还是无穷大.

(1) $3^x - 1$, 当 $x \rightarrow 0^+$ 时;

(2) $\frac{\arctan x}{x}$, 当 $x \rightarrow \infty$ 时;

(3) $e^{\frac{1}{x}}$, 当 $x \rightarrow 0^+$ 时;

(4) $e^{\frac{1}{x}}$, 当 $x \rightarrow 0^-$ 时.

【解析】 (1) 因为 $\lim_{x \rightarrow 0^+} (3^x - 1) = 0$, 所以当 $x \rightarrow 0^+$ 时, $3^x - 1$ 是无穷小.

(2) 当 $x \rightarrow \infty$ 时, $\frac{1}{x}$ 是无穷小, $\arctan x$ 是有界量, 因为无穷小与有界量的乘积仍为无穷小, 所以此时 $\frac{\arctan x}{x}$ 是无穷小.

(3) 令 $t = \frac{1}{x}$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^t = +\infty$, 所以当 $x \rightarrow 0^+$ 时, $e^{\frac{1}{x}}$ 是无穷大.

(4) 令 $t = -x$, 则当 $x \rightarrow 0^-$ 时, $t \rightarrow 0^+$, 因为当 $t \rightarrow 0^+$ 时, $e^{\frac{1}{t}}$ 是无穷大, 所以此时 $e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{-t}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{t}}}$ 是无穷小.

2. 无穷小的比较

设 $f(x), g(x)$ 都是 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的无穷小, 且 $g(x) \neq 0$.

(1) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ (或 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$), 则称 $f(x)$ 是比 $g(x)$ 高阶的无穷小, 记作 $f(x) = o(g(x))$;

(2) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ (或 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$), 则称 $f(x)$ 是比 $g(x)$ 低阶的无穷小, 记作 $g(x) = o(f(x))$;

(3) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = c (c \neq 0)$ (或 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = c (c \neq 0)$), 则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是同阶无穷小, 特别地, 若

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, 则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是等价无穷小, 记作 $f(x) \sim g(x)$.



备考提示

常用的 $x \rightarrow 0$ 时的等价无穷小:

$$\sin x \sim x,$$

$$\tan x \sim x,$$

$$\arcsin x \sim x,$$

$$\arctan x \sim x,$$

$$e^x - 1 \sim x,$$

$$\ln(1+x) \sim x,$$

$$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2,$$

$$a^x - 1 \sim x \ln a,$$

$$(1+x)^a - 1 \sim ax (a \neq 0).$$

利用变量替换可以将上述等价无穷小中的 x 换成任一趋于 0 的变量, 如 $\sin x^3 \sim x^3, (1+2x)^a - 1 \sim 2ax$.

例题 1.2.16 当 $x \rightarrow 1$ 时, 与 $(1-x)$ 等价的是().

A. $\frac{1}{2}(1-x^3)$

B. $\frac{1}{2}(1-\sqrt{x})$

C. $\frac{1}{2}(1-x^2)$

D. $\frac{1}{2}(1+\sqrt{x})$



【解析】 因为 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{2}(1-x^3)}{1-x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x)(1+x+x^2)}{1-x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 1} (1+x+x^2) = \frac{3}{2} \neq 1$, 所以 $\frac{1}{2}(1-x^3)$ 是

$(1-x)$ 的同阶无穷小, 但不是等价无穷小; 因为 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{2}(1-\sqrt{x})}{1-x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt{x}}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1+\sqrt{x}} = \frac{1}{4}$,

所以 $\frac{1}{2}(1-\sqrt{x})$ 是 $(1-x)$ 的同阶无穷小, 但不是等价无穷小; 因为 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{2}(1-x^2)}{1-x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1+x)(1-x)}{1-x} =$

$\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 1} (1+x) = 1$, 所以 $\frac{1}{2}(1-x^2)$ 与 $(1-x)$ 是 $x \rightarrow 1$ 时的等价无穷小; 因为 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{2}(1+\sqrt{x}) = 1 \neq 0$, 所以 $\frac{1}{2}(1+$

$\sqrt{x})$ 不是无穷小.

综上, 本题选 C.

例题 1.2.17 下列说法中错误的是().

A. 有限个无穷小的和仍为无穷小

B. 当 $x \rightarrow 1$ 时, $1-x^3$ 是 $1-x$ 的同阶无穷小

C. 若 α, β, γ 是同一极限过程的无穷小, 且 $\alpha \sim \beta, \beta \sim \gamma$, 则 $\alpha \sim \gamma$

D. 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1-x} = 1$, 由此断言, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\cos x$ 与 $1-x$ 是等价无穷小

【解析】 根据极限的四则运算, 有限个无穷小的和仍为无穷小, A 项说法正确; 因为 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^3}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x)(1+x+x^2)}{1-x} = 3$, 所以当 $x \rightarrow 1$ 时, $1-x^3$ 是 $1-x$ 的同阶无穷小, B 项说法正确; 因为 $\alpha \sim \beta, \beta \sim \gamma$, 所以 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha}{\beta} = 1, \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta}{\gamma} = 1$, 从而 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha}{\gamma} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha}{\beta} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta}{\gamma} = 1$, 即 $\alpha \sim \gamma$, C 项说法正确; 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\cos x$ 与 $1-x$ 都不是无穷小, D 项说法错误. 故本题选 D.

例题 1.2.18 当 $x \rightarrow 0$ 时, $(1+x^2)^k - 1$ 与 $1 - \cos x$ 为等价无穷小, 则 k 的值为().

A. 1

B. $-\frac{1}{2}$

C. $\frac{1}{2}$

D. -1

【解析】 当 $x \rightarrow 0$ 时, $(1+x^2)^k - 1 \sim kx^2, 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$, 因为 $(1+x^2)^k - 1$ 与 $1 - \cos x$ 为等价无穷小, 所以 $k = \frac{1}{2}$. 故本题选 C.

3. 等价无穷小因子替换求极限

设当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时 $f(x) \sim h(x)$, 根据等价无穷小的定义及极限的乘法运算, 有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{h(x)}{f(x)} \right] = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h(x)}{g(x)}.$$

因此, 在包含无穷小的乘除式中可以直接将做乘法因子或除法因子的无穷小用与其等价的无穷小替换.

例题 1.2.19 计算下列极限.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\ln(1+x)}; \quad (3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{1 - e^x}.$$

【解析】(1) 因为当 $x \rightarrow 0$ 时, $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$.

(2) 因为当 $x \rightarrow 0$ 时, $\tan 2x \sim 2x$, $\ln(1+x) \sim x$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x} = 2$.

(3) 因为当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{1}{2}x$, $e^x - 1 \sim x$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{1 - e^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{-2x} = -\frac{1}{2}$.



备考提示

等价无穷小因子替换的原理是极限的乘法运算, 所以替换的是作为乘、除因子的无穷小, 对于作为加、减因子的无穷小, 不能随意替换. 如极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$, 如果直接用 x 替换 $\sin x$, 就会得到

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x}{x^3} = 0$, 但实际上这个结果是错误的.

例题 1.2.20 当 $x \rightarrow 0$ 时, 与 x 等价的无穷小是().

- A. $\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ B. $2\sin x$ C. $\ln(1+x)$ D. $\ln(1+x^2)$

【解析】当 $x \rightarrow 0$ 时, $\frac{\sin x}{\sqrt{x}} \sim \frac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}$, 所以 $\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ 是 x 的低阶无穷小; 当 $x \rightarrow 0$ 时, $2\sin x \sim 2x$, 所以 $2\sin x$ 是 x 的同阶无穷小, 但不是等价无穷小; 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\ln(1+x) \sim x$, 所以 $\ln(1+x)$ 是 x 的等价无穷小; 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\ln(1+x^2) \sim x^2$, 所以 $\ln(1+x^2)$ 是 x 的高阶无穷小. 故本题选 C.

四、两个重要极限

两个重要极限是 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 和 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$, 这两个极限需要考生熟记. 与两个重要极限相关的题目, 通常利用变量替换法进行求解.

例题 1.2.21 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin 2x}{x}$ 的值为().

- A. 0 B. 1
C. 2 D. ∞

【解析】当 $x \rightarrow \infty$ 时, $\sin 2x$ 是有界量, 所以 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin 2x}{x} = 0$. 故本题选 A.

例题 1.2.22 计算下列极限.

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$; (2) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x}$; (3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$.

【解析】(1) 令 $t = 3x$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, $t \rightarrow 0$, 从而 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = 3 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 3$.

(2) 令 $t = \frac{1}{x}$, 则当 $x \rightarrow \infty$ 时, $t \rightarrow 0$, 从而 $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$.

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2}$, 令 $t = \frac{x}{2}$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2\sin^2 t}{4t^2} = \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 =$



$$\frac{1}{2} \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \right)^2 = \frac{1}{2}.$$



备考提示

关于两个重要极限一定要注意自变量的变化趋势, 特别注意的是 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e, \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = 1.$$

例题 1.2.23 计算下列极限.

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2x} \right)^x; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{1}{x}}; \quad (3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^x.$$

【解析】(1) 令 $t = -2x$, 则当 $x \rightarrow \infty$ 时, $t \rightarrow \infty$, 从而

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2x} \right)^x = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t} \right)^{-\frac{t}{2}} = \left[\lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t} \right)^t \right]^{-\frac{1}{2}} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

$$(2) \text{ 令 } t = \frac{1}{2x}, \text{ 则当 } x \rightarrow 0 \text{ 时, } t \rightarrow \infty, \text{ 从而 } \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t} \right)^{2t} = \left[\lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t} \right)^t \right]^2 = e^2.$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x+1} \right)^x, \text{ 令 } t = -\frac{x+1}{2}, \text{ 则当 } x \rightarrow \infty \text{ 时, } t \rightarrow \infty, \text{ 从而}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x+1} \right)^x = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t} \right)^{-2t-1} = \left[\lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t} \right)^t \right]^{-2} \cdot \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t} \right)^{-1} = e^{-2} \cdot 1 = e^{-2}.$$



备考提示

对类似于 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x$ 的“ 1^∞ ”型极限 $\lim_{x \rightarrow \square} (1+u)^v$ ($x \rightarrow \square$ 时, $u \rightarrow 0, v \rightarrow \infty$), 除上述变量替换法

外还有一个简单的计算公式 $\lim_{x \rightarrow \square} (1+u)^v = e^{\lim_{x \rightarrow \square} uv}$. 例如, $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2x} \right)^x = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(-\frac{1}{2x} \right) \cdot x \right]} = e^{-\frac{1}{2}}.$



巩固练习

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = ().$$

A. -1

B. 0

C. 1

D. 2

$$2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x\sqrt{x} - x}{x-1} = ().$$

A. -1

B. 0

C. 1

D. $\frac{1}{2}$

3. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 与 $\tan x$ 等价的无穷小是().

A. $x^2 - x$

B. $1 - \cos x$

C. $x^2 + \sin x$

D. $\sqrt{1+x} - 1$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{x \cos x} = (\quad)$.

A. 0

B. 1

C. 3

D. ∞

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \frac{x}{2}}{x^2} = (\quad)$.

A. $-\frac{1}{8}$ B. $-\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{8}$ D. e^2

6. 下列说法正确的是().

A. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = 1$

B. $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 1$

C. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 1$

D. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 1$

7. 下列等式正确的是().

A. $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin x = 1$

B. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{3x^2 - x - 1} = 1$

C. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

D. $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}} = \infty$

8. 下列结论正确的是().

A. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{2x} = e$

B. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{-x} = e$

C. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{1-x} = e$

D. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{-2x} = e$

9. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{x}{2}\right)^{\frac{3}{x}} = (\quad)$.

A. $e^{-\frac{3}{2}}$ B. $e^{\frac{3}{2}}$ C. e^{-6} D. e^6 

真题链接

1. (2023 · 天津) 当 $x \rightarrow 0$ 时, 下列选项和 $\tan 2x$ 为等价无穷小的是().

A. x B. $2x$ C. x^2 D. $2x^2$

【答案】 B

【解析】 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\tan x \sim x$, 则 $\tan 2x \sim 2x$, 所以选 B.

2. (2023 · 天津) 极限 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - x - 2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{1}{3}$

【解析】 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)(x-2)}{(x+1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-1}{x+1} = \frac{1}{3}$.

3. (2022 · 天津) 当 $x \rightarrow 0$ 时, 与 $2x$ 等价的无穷小量是().

A. $\cos 2x - 1$ B. $\ln(1 - 2x)$ C. $x \sin 2x$ D. $e^{2x} - 1$ 

【答案】 D

【解析】 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\cos 2x - 1 \sim -\frac{1}{2}(2x)^2 = -2x^2$, $\ln(1-2x) \sim -2x$, $x \sin 2x \sim x \cdot 2x = 2x^2$, $e^{2x} - 1 \sim 2x$, 所以选 D.

4. (2022 · 天津) 极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+1}{2x^2+3} =$ _____.

【答案】 $\frac{1}{2}$

【解析】 方法一: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+1}{2x^2+3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$.

方法二: $\frac{x^2+1}{2x^2+3} = \frac{1+\frac{1}{x^2}}{2+\frac{3}{x^2}}$ (分子分母同除以 x^2), 当 $x \rightarrow \infty$, $\frac{1}{x^2} \rightarrow 0$, $\frac{3}{x^2} \rightarrow 0$, $\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1}{2x^2+3} = \frac{1}{2}$.

5. (2021 · 天津) 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x}$ 的值为()

A. $\frac{1}{2}$

B. 2

C. 1

D. 0

【答案】 A

【解析】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$, 所以选 A.

6. (2021 · 天津) 极限 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x^2+2x-3} =$ _____.

【答案】 $\frac{1}{2}$

【解析】 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x^2+2x-3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x+3)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x+3} = \frac{1}{2}$.

7. (2020 · 天津) 当 $x \rightarrow 0$ 时, 与 $\sin^2 x$ 等价的无穷小量是().

A. x

B. $2x$

C. $\frac{1}{2}x^2$

D. x^2

【答案】 D

【解析】 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin x \sim x$, 则 $\sin^2 x \sim x^2$, 所以选 D.

8. (2020 · 天津) 极限 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x^2-2x-3} =$ _____.

【答案】 $\frac{3}{2}$

【解析】 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x^2-2x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+3)(x-3)}{(x+1)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+3}{x+1} = \frac{3}{2}$.

9. (2019 · 天津) 当 $x \rightarrow 0$ 时, 以下不是无穷小量的是().

A. $\sin x$

B. $\cos x$

C. $\ln(1+x)$

D. $e^x - 1$

【答案】 B

【解析】 $\sin x \sim x (x \rightarrow 0)$, $\ln(1+x) \sim x (x \rightarrow 0)$, $e^x - 1 \sim x (x \rightarrow 0)$, 所以当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin x$, $\ln(1+x)$, $e^x - 1$ 均为无穷小量, 而 $\cos 0 = 1$, 当 $x \rightarrow 0$ 时 $\cos x$ 不是无穷小量, 所以选 B.

10. (2019 · 天津) 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{xe^x}$ 的值是_____.

【答案】 2

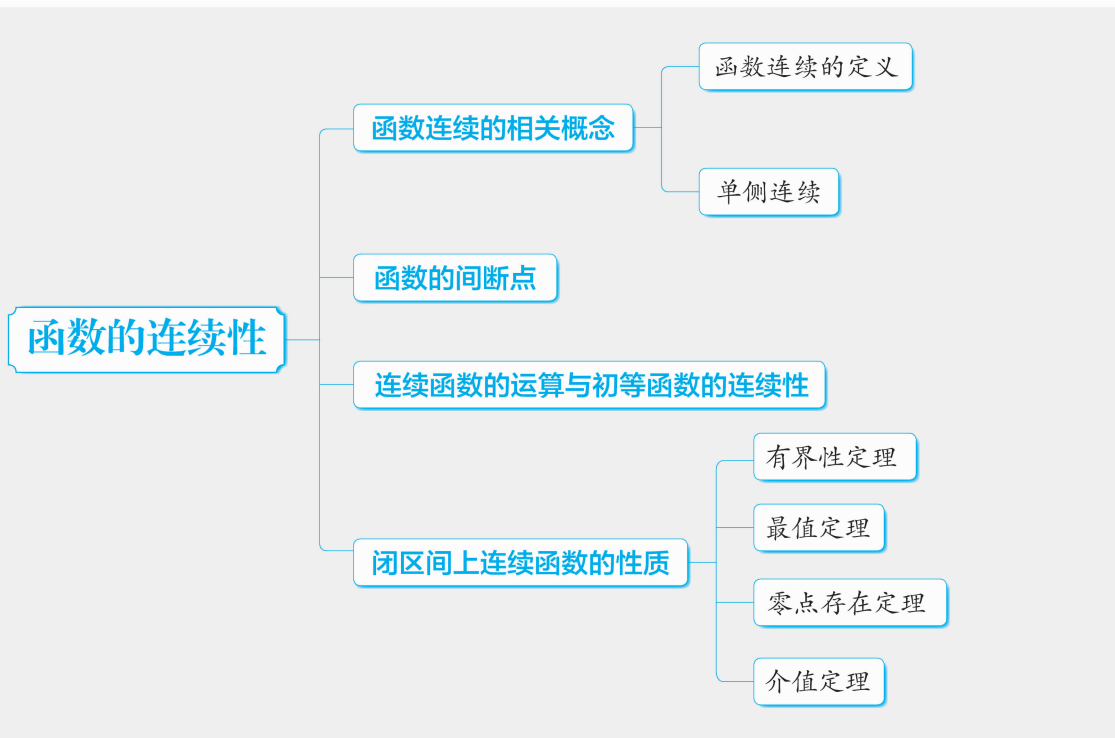
【解析】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{xe^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{xe^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{e^x} = 2.$



第三节 函数的连续性



知识脉络



知识精讲

一、函数连续的相关概念

1. 函数连续的定义

定义 1 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 附近和点 x_0 处有定义. 如果

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0),$$

那么称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续, 否则称 $f(x)$ 在点 x_0 处间断.

通俗地讲, 函数在一点连续, 就是函数在该点处的极限存在, 且极限值等于该点处的函数值.

例题 1.3.1 已知 $f(x) = \begin{cases} (1+2x)^{\frac{1}{x}}, & x \neq 0, \\ k, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 则 $k = (\quad)$.

A. e

B. $e^{\frac{1}{2}}$

C. e^2

D. 1

【解析】 因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$, 即得 $k = \lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} (2x \cdot \frac{1}{x})} = e^2$. 故本

题选 C.

例題 1.3.2 已知 $f(x) = \begin{cases} \frac{\tan x}{2x}, & -\frac{\pi}{2} < x < 0, \\ a, & x = 0, \\ \frac{1 - \cos x}{bx^2}, & x > 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 则 a 与 b 的值为().

A. $a = \frac{1}{2}, b = 1$

B. $a = -\frac{1}{2}, b = -1$

C. $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$

D. $a = 0, b = 1$



【解析】 因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$, 从而 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$. 又 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\tan x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{bx^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{2bx^2} = \frac{1}{2b}$, $f(0) = a$, 所以 $\frac{1}{2} = \frac{1}{2b} = a$, 于是 $a = \frac{1}{2}, b = 1$. 故本题选 A.

2. 单侧连续

定义 2 如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 左侧有定义, 且

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0),$$

那么称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处左连续; 如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 的右侧有定义, 且

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0),$$

那么称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处右连续.

注: 在区间上每一点都连续的函数, 叫作该区间上的连续函数, 或者说函数在该区间上连续. 如果区间包括端点, 那么函数在左端点连续是指在该点右连续, 在右端点连续是指在该点左连续.

定理 1 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续的充要条件是, $f(x)$ 在点 x_0 处左、右连续.

例題 1.3.3 设 $f(x) = [x]$ ($[x]$ 为不超过 x 的最大整数, 如 $[2.1] = 2, [-1.5] = -2$), 下列结论中不正确的是().

A. $f(x)$ 在 $x=2$ 处右连续B. $f(x)$ 在 $x=2.5$ 处连续C. $f(x)$ 在 $x=-4$ 处不连续D. $f(x)$ 在 $x=-1$ 处左连续

【解析】 因为 $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2 = f(2)$, 所以 $f(x)$ 在 $x=2$ 处右连续, A 项正确; 因为 $\lim_{x \rightarrow 2.5} f(x) = 2 = f(2.5)$, 所以 $f(x)$ 在 $x=2.5$ 处连续, B 项正确; $\lim_{x \rightarrow -4^-} f(x) = -5 \neq f(-4)$, 所以 $f(x)$ 在 $x=-4$ 处不连续, C 项正确; 因为 $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -2 \neq f(-1)$, 所以 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处不是左连续, D 项错误. 故本题选 D.

例題 1.3.4 若函数 $f(x) = \begin{cases} a + bx^2, & x \leq 0, \\ \frac{\sin bx}{x}, & x > 0 \end{cases}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 则 a 和 b 的关系是().

A. $a = b$

B. $a > b$

C. $a < b$

D. 无法确定

【解析】 因为 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 从而 $f(x)$ 在 $x=0$ 处右连续, 即



有 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$. 又 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin bx}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{bx}{x} = b, f(0) = a$, 所以 $a = b$. 故本题选 A.

二、函数的间断点

由连续的定义知, 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不满足 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 则点 x_0 是 $f(x)$ 的间断点. 利用 $f(x)$ 在点 x_0 处的左、右极限, 可以将间断点分为如下两类:

(1) 当 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 都存在时, 则称 x_0 为 $f(x)$ 的第一类间断点. 此时, 若 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq f(x_0)$, 则称间断点为可去间断点, 否则称其为跳跃间断点.

(2) 当 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 至少有一个不存在时, 则称 x_0 为 $f(x)$ 的第二类间断点.

例题 1.3.5 若点 $x=0$ 是 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+\cos x}, & x < 0, \\ 1, & x = 0, \\ \frac{\sqrt{a}-\sqrt{a-x}}{x}, & x > 0 \end{cases}$ 的可去间断点, 则 $a = (\quad)$.

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{4}$

C. 0

D. 1

【解析】 因为点 $x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, 又 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{a}-\sqrt{a-x}}{x} = \sqrt{a} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1-\sqrt{1-\frac{x}{a}}}{x} = \sqrt{a} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{x}{a}}{x} = \frac{\sqrt{a}}{2a}$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{2}$, 所以 $\frac{\sqrt{a}}{2a} = \frac{1}{2}$, 解得 $a = 1$. 故本题选 D.

例题 1.3.6 讨论下列函数在 $x=0$ 处的连续性.

(1) $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$; (2) $f(x) = \frac{e^{-\frac{1}{x}} - 1}{e^{-\frac{1}{x}} + 1}$; (3) $f(x) = 2^{\frac{1}{x}}$.

【解析】 (1) 因为当 $x=0$ 时, $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ 没有意义, 所以 $x=0$ 是 $f(x)$ 的间断点. 又 $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$, 从而 $x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点.

(2) 因为当 $x \rightarrow 0^+$ 时, $e^{-\frac{1}{x}} \rightarrow 0$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}} - 1}{e^{-\frac{1}{x}} + 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^{-\frac{1}{x}} - 1)}{\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^{-\frac{1}{x}} + 1)} = -1$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{-\frac{1}{x}} - 1}{e^{-\frac{1}{x}} + 1} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{1}{x}}} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0^-} (1 - e^{\frac{1}{x}})}{\lim_{x \rightarrow 0^-} (1 + e^{\frac{1}{x}})} = 1$, 于是 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, $x=0$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点.

(3) 因为当 $x=0$ 时, $f(x) = 2^{\frac{1}{x}}$ 没有意义, 所以 $x=0$ 是 $f(x)$ 的间断点. 又 $\lim_{x \rightarrow 0^+} 2^{\frac{1}{x}} = \infty$, 所以 $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点.



备考提示

一般来说,考试题目中,函数可能的间断点是使函数没有意义的点和分段函数的分段点.判断间断点的类型时,应先确定函数在该点处的左、右极限是否存在,如果至少有一个不存在,那么间断点是第二类间断点;如果都存在,那么判断左、右极限是否相等,相等为可去间断点,不等为跳跃间断点.

例题 1.3.7 写出下列函数的间断点,并判断间断点的类型.

$$(1) f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2};$$

$$(2) f(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{x+1}{x^2-1}.$$

【解析】 (1) 当 $x^2 - 3x + 2 = 0$, 即 $x=1$ 或 $x=2$ 时, $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ 没有意义, 所以 $x=1$ 和 $x=2$ 是 $f(x)$ 的间断点.

因为 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x^2-3x+2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x-2} = -2$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -2$, 从而 $x=1$ 是 $f(x)$ 的可去间断点;

因为 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-1}{x^2-3x+2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{x-2} = \infty$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ 都不存在, 从而 $x=2$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点.

(2) 当 $x=0$ 或 $x=1$ 或 $x=-1$ 时, $f(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{x+1}{x^2-1}$ 没有意义, 所以 $x=0$, $x=1$ 和 $x=-1$ 是 $f(x)$ 的间断点.

因为 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{x+1}{x^2-1} \right) = -\infty$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ 不存在, 从而 $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点;

因为 $\lim_{x \rightarrow 1} \left(e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{x+1}{x^2-1} \right) = \infty$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ 都不存在, 从而 $x=1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点;

因为 $\lim_{x \rightarrow -1} \left(e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{x+1}{x^2-1} \right) = \lim_{x \rightarrow -1} \left[e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{x+1}{(x+1)(x-1)} \right] = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x-1} = -\frac{1}{2e}$, 所以 $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\frac{1}{2e}$, 从而 $x=-1$ 是 $f(x)$ 的可去间断点.

三、连续函数的运算与初等函数的连续性

定理 2(连续函数的和、差、积、商的连续性) 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在点 x_0 处连续, 则函数 $f(x) \pm g(x)$ 、 $f(x) \cdot g(x)$ 、 $\frac{f(x)}{g(x)}$ ($g(x_0) \neq 0$) 仍在点 x_0 处连续.

定理 3(复合函数的连续性) 设函数 $g(x)$ 在点 x_0 处连续, 函数 $f(u)$ 在点 $u_0 = g(x_0)$ 处连续, 则复合函数 $f(g(x))$ 在点 x_0 处连续.

定理 4(反函数的连续性) 设函数 $f(x)$ 是区间 I 上单调增加(或单调减少)的连续函数, 则其反函数



$y=f^{-1}(x)$ 在对应的区间 $f(I)$ 上单调增加(或单调减少)且连续.

定理 5(初等函数的连续性) 初等函数在其定义域内是连续的.

注:根据定理 5 和连续函数的定义,求初等函数在其定义域内某点的极限,只需求初等函数在该点的函数值.

例题 1.3.8 求 $\lim_{x \rightarrow 1} \sin(\ln x)$.

【解析】 因为 $y=\sin(\ln x)$ 是初等函数,且定义域为 $(0,+\infty)$,所以 $\lim_{x \rightarrow 1} \sin(\ln x)=\sin(\ln 1)=\sin 0=0$.

例题 1.3.9 求 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+\ln(2-x)}{4\arctan x}$.

【解析】 因为 $y=\frac{x^2+\ln(2-x)}{4\arctan x}$ 是初等函数,且 $x=1$ 是其定义域内一点,所以 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+\ln(2-x)}{4\arctan x} = \frac{1^2+\ln(2-1)}{4\arctan 1} = \frac{1}{\pi}$.

四、闭区间上连续函数的性质

定理 6(有界性定理) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界.

定理 7(最值定理) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有最大值和最小值,即存在 $x_1, x_2 \in [a, b]$,使得对任一 $x \in [a,b]$,都有 $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$.

注:如果函数是在开区间或半开半闭区间上连续,那么函数在该区间上不一定有界,也不一定有最大值或最小值.如函数 $f(x)=\tan x$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上连续,但它在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上是无界的,且既无最大值也无最小值.

定理 8(零点存在定理) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,且 $f(a)f(b)<0$,则至少存在一点 $x_0 \in (a,b)$,使得 $f(x_0)=0$.

定理 9(介值定理) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $f(a) \neq f(b)$,若 μ 是介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任意实数,则至少存在一点 $x_0 \in (a,b)$,使得 $f(x_0)=\mu$.

例题 1.3.10 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续,则下列说法不正确的是().

- A. $f(x)$ 在 (a,b) 内每个点处连续
- B. $f(x)$ 在 $x=a$ 处右连续
- C. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可能没有最大值
- D. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有最大值和最小值

【解析】 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续,则对 (a,b) 内任意一点 x_0 , $f(x)$ 在 x_0 处连续,此外, $f(x)$ 在点 $x=a$ 处右连续,在点 $x=b$ 处左连续, A, B 两项正确. $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,则由最值定理知, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有最大值和最小值, C 项错误, D 项正确. 故本题选 C.

例题 1.3.11 函数 $f(x)=2^x+x-2$ 的零点所在区间是().

- A. $(-\infty, -1)$
- B. $(-1, 0)$

C. (0,1)

D. (1,2)

【解析】 因为 $f(x) = 2^x + x - 2$ 是连续函数, 且 $f(-1) = -\frac{5}{2} < 0$, $f(0) = -1 < 0$, $f(1) = 1 > 0$, $f(2) = 4 > 0$, 所以由零点存在定理知, $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上至少有一个零点, 又 $f(x) = 2^x + x - 2$ 是单调增加的, 所以 $f(x)$ 只有一个零点在区间 $(0,1)$ 上. 故本题选 C.

例题 1.3.12 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且对 $[a,b]$ 上任意一点 x_0 , $f(x_0) \in [a,b]$. 证明: 存在一点 $c \in [a,b]$, 使得 $f(c) = c$.

【解析】 令 $F(x) = f(x) - x$, 因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 所以 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上也连续.

因为对 $[a,b]$ 上任意一点 x_0 , $f(x_0) \in [a,b]$, 所以 $F(a) = f(a) - a \geq 0$, $F(b) = f(b) - b \leq 0$.

若 $F(a) = 0$ 或 $F(b) = 0$, 则令 $c = a$ 或 $c = b$, 即得 $f(c) = c$;

若 $F(a) > 0$ 或 $F(b) < 0$, 则由零点存在定理知, 存在一点 $c \in [a,b]$, 使得 $F(c) = f(c) - c = 0$, 即 $f(c) = c$.



巩固练习

1. 下列说法正确的是().

- A. 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续, 则 $f(x)$ 在点 x_0 必有极限
- B. 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 有极限, 则 $f(x)$ 在点 x_0 必连续
- C. 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续, 则 $f(x)$ 在点 x_0 不一定有极限
- D. 以上说法都不正确

2. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin bx}{x}, & x \neq 0, \\ a, & x = 0 \end{cases}$ (a, b 是常数) 为连续函数, 则 $a = ()$.

- A. 1
- B. 0
- C. b
- D. $-b$

3. 若函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin ax}{x}, & x > 0, \\ 2, & x = 0, \\ \frac{1}{bx} \ln(1-3x), & x < 0 \end{cases}$ 为连续函数, 则 a, b 满足().

- A. $a=2, b$ 为任何实数
- B. $a+b = \frac{1}{2}$
- C. $a=2, b = -\frac{3}{2}$
- D. $a=b=1$

4. 设函数 $f(x) = \begin{cases} a + e^x, & x \leq 0, \\ (1+2x)^{\frac{1}{x}}, & x > 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 则常数 $a = ()$.

- A. $\sqrt{e}-1$
- B. e
- C. $e-1$
- D. e^2-1



5. 函数 $y = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 6x + 8}$ 的第二类间断点为().

A. $x = -4$

B. $x = 4$

C. $x = 2$

D. $x = -2$

6. $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x} = (\quad)$.

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

7. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{2\,019}{x} \sin x + x \sin \frac{2\,020}{x}, & x < 0, \\ a - 1, & x = 0, \\ (1-x)^{\frac{b}{x}}, & x > 0 \end{cases}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 则 $a + b = (\quad)$.

A. $2\,021 + \ln 2\,020$

B. $2\,021 - \ln 2\,020$

C. $2\,020 + \ln 2\,019$

D. $2\,020 - \ln 2\,019$

8. 设 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x}{1+x^{2n}}$, 则函数 $f(x)$ ().

A. 存在间断点 $x = 0$

B. 存在间断点 $x = 1$

C. 存在间断点 $x = -1$

D. 不存在间断点

9. 讨论函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}} x$ 的连续性, 若有间断点, 判断其类型.

真题链接

1. (2023 · 天津) 已知 $f(x) = \begin{cases} a + \frac{\sin bx}{x}, & x < 0, \\ 3, & x = 0, \\ \frac{8x}{e^{a^2x} - 1} + b, & x > 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续, 求常数 a 和 b 的值.

【解析】 已知 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处是连续的, 且 $f(0) = 3$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) = 3$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{8x}{e^{a^2x} - 1} + b = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{8x}{a^2x} + b = \frac{8}{a^2} + b$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} a + \frac{\sin bx}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} a + \frac{bx}{x} = a + b$, 故 $\frac{8}{a^2} + b = a + b = 3$, 联立解得 $a = 2, b = 1$.

2. (2022 · 天津) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} a + \sin 2x, & x < 0, \\ 1, & x = 0, \\ \frac{1 - \cos x}{bx^2}, & x > 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 求常数 a, b 的值.

【解析】 $\because f(0) = 1,$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} a + \sin 2x = a,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{bx^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2}x^2}{bx^2} = \frac{1}{2b}.$$

且函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$, 即 $\frac{1}{2b} = a = 1$, 所以 $a = 1, b = \frac{1}{2}$.

3. (2021 · 天津) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} a - x, & x < 0, \\ 3, & x = 0, \\ \frac{\ln(1+x)}{x} + b, & x > 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 求常数 a, b 的值.

【解析】 因为 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (a - x) = a$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{\ln(1+x)}{x} + b \right] = 1 + b$, 且函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$.

即 $a = 1 + b = 3$, 所以 $a = 3, b = 2$.

4. (2020 · 天津) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2 - \cos x, & x < 0, \\ \frac{a}{2}, & x = 0, \\ \frac{e^{bx} - 1}{x}, & x > 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 求常数 a, b 的值.

【解析】 因为 $\lim_{x \rightarrow 0^-} (2 - \cos x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{bx} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{bx}{x} = b$.

因为函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$, 即 $1 = b = \frac{a}{2}$.

解得 $a = 2, b = 1$.

5. (2019 · 天津) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + a}{2}, & x < 0, \\ 2, & x = 0, \\ \frac{\sin bx}{x}, & x > 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 求常数 a, b 的值.

【解析】 因为 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + a}{2} = \frac{a}{2}$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin bx}{x} = b$, 且函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 所

以 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$, 即 $\frac{a}{2} = b = 2$.

所以 $a = 4, b = 2$.



本章题型总结

一、函数

题型一 相同函数的判断



方法突破

判断两个函数是否相同,要看函数的定义域、对应法则是否均相同.其中对应法则不能仅仅从解析式上考虑,还要分析其对应法则的本质.

例 1 与 $y=x$ 表示相同函数的是().

A. $y=\sqrt{x^2}$

B. $y=\frac{x^2}{x}$

C. $y=\begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

D. $y=\begin{cases} x, & x \geq 0, \\ x, & x < 0 \end{cases}$

【答案】 D

【解析】 因为 $y=\sqrt{x^2}=|x|$ 与 $y=x$ 对应法则不同,排除 A; $y=\frac{x^2}{x}=x$ ($x \neq 0$) 与 $y=x$ 的定义域不同,排除 B; $y=\begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ 的实质是 $y=|x|$, 与 $y=x$ 的对应法则不同,排除 C; $y=\begin{cases} x, & x \geq 0, \\ x, & x < 0 \end{cases}$ 与 $y=x$ 的定义域、对应法则均相同,故选 D.

题型二 求函数的定义域

1. 初等函数的定义域



方法突破

求函数的定义域时,应注意以下几个方面:

- (1) 函数式是整式时,定义域为 $\mathbf{R}$.
- (2) 函数式含分式时,分母不等于零.
- (3) 函数式含偶次根式时,被开方数大于等于零.
- (4) 函数式含对数式时,真数大于零,底数大于零且不等于 1.
- (5) 函数式含零指数式时,底数不等于零,如 $y=(x-1)^0$, 则 $x-1 \neq 0$, 即 $x \neq 1$.
- (6) 函数中含三角函数和反三角函数时,如 $y=\sin x$ 或 $\cos x$, 定义域为 $(-\infty, +\infty)$; $y=\tan x$, 则 $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$; $y=\cot x$, 则 $x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}$; $y=\arcsin x$ 或 $\arccos x$, 定义域为 $[-1, 1]$; $y=\arctan x$ 或 $y=\operatorname{arccot} x$, 定义域为 $(-\infty, +\infty)$.
- (7) 分段函数的定义域是各分段区域内自变量取值范围的并集.
- (8) 若所给函数是几个函数的四则混合式,则取各部分定义域的交集.

例 2 (1) 函数 $f(x) = \sqrt{x-1} + \frac{1}{2-x}$ 的定义域是().

- A. $[1, 2) \cup (2, +\infty)$ B. $[-1, +\infty)$
C. $(1, 2) \cup (2, +\infty)$ D. $(2, +\infty)$

(2) 函数 $f(x) = \sqrt{2-x} + \arcsin(x+2)$ 的定义域是_____.

(1) **【答案】** A

【解析】 要使 $\sqrt{x-1}$ 有意义, 则 $x-1 \geq 0$, 解得 $x \geq 1$;

要使 $\frac{1}{2-x}$ 有意义, 则 $2-x \neq 0$, 解得 $x \neq 2$.

故函数的定义域为 $[1, 2) \cup (2, +\infty)$.

(2) **【答案】** $[-3, -1]$

【解析】 要使 $\sqrt{2-x}$ 有意义, 则 $2-x \geq 0$, 解得 $x \leq 2$;

要使 $\arcsin(x+2)$ 有意义, 则 $-1 \leq x+2 \leq 1$, 解得 $-3 \leq x \leq -1$.

故函数的定义域为 $[-3, -1]$.

2. 抽象函数的定义域



方法突破

(1) 若已知函数 $f(x)$ 的定义域是 $[a, b]$, 求 $f[g(x)]$ 的定义域的具体做法: 由 $f(x)$ 中的 $a \leq x \leq b$, 得 $a \leq g(x) \leq b$, 此时 x 的取值范围即为 $f[g(x)]$ 的定义域.

(2) 若已知函数 $f[g(x)]$ 的定义域是 $[a, b]$, 求 $f(x)$ 的定义域的具体做法: 由 $f[g(x)]$ 中的 $a \leq x \leq b$, 求出 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 的值域, 即为 $f(x)$ 的定义域.

例 3 (1) 若函数 $f(x)$ 的定义域是 $[0, 1]$, 则函数 $f(4x^2)$ 的定义域是_____.

(2) 若函数 $f(x+1)$ 的定义域是 $[-1, 1]$, 则函数 $f(x)$ 的定义域是().

- A. $[0, 2]$ B. $[-1, 1]$
C. $[-2, 0]$ D. $[-2, 2]$

(1) **【答案】** $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

【解析】 令 $0 \leq 4x^2 \leq 1$, 解得 $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$.

(2) **【答案】** A

【解析】 设 $u = x+1$, 则 $-1+1 \leq u \leq 1+1 \Rightarrow 0 \leq u \leq 2$. 所以函数 $f(u) = f(x)$ 的定义域是 $[0, 2]$.



题型三 求函数的解析式和函数值

1. 已知函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的解析式, 求复合函数 $f[g(x)]$ 的解析式



**方法突破**

直接把 $g(x)$ 看作 $f(x)$ 中 x 的自变量,即得到函数 $f[g(x)]$ 的表达式.

例 4 已知 $f(x)=x^2-1$, 则 $f(x+1)=$ _____.

【答案】 x^2+2x

【解析】 $f(x+1)=(x+1)^2-1=x^2+2x$.

2. 已知复合函数 $f[g(x)]$ 和内函数 $g(x)$ 的解析式,求外函数 $f(x)$ 的解析式

**方法突破**

(1)换元法:已知复合函数 $f[g(x)]$ 和内函数 $g(x)$ 的解析式,求外函数 $f(x)$ 的解析式,通常令 $g(x)=t$,由此能解出 $x=(t)$,将 $x=(t)$ 代入 $f[g(x)]$ 中,求得 $f(t)$ 的解析式,再用 x 替换 t ,便得到 $f(x)$ 的解析式.

(2)凑配法:首先将复合函数 $f[g(x)]$ 的表达式通过恒等变形,写成以 $g(x)$ 为自变量的表达式,然后将 $g(x)$ 用自变量 x 替换,即得 $f(x)$ 的解析式.

例 5 已知 $f(x+1)=x^2-2x$,求 $f(x)$ 的解析式.

【解析】 令 $t=x+1$,则 $x=t-1$,

原式可化为

$$f(t)=(t-1)^2-2(t-1)=t^2-2t+1-(2t-2)=t^2-4t+3,$$

综上所述, $f(x)=x^2-4x+3$.

例 6 已知 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$,求 $f(x)$ 的解析式.

【解析】 因为 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$, 所以 $f(x)=x^2-2$.

3. 求函数值

**方法突破**

求当 $x=x_0$ 时,复合函数 $f[g(x)]$ 的函数值时,先求出 $g(x_0)$ 的值,再把所求的结果代入 $f(x)$ 计算即可.

例 7 已知函数 $f(x)=(x-1)^2+2$,则 $f[f(2)]=$ _____.

【答案】 6

【解析】 $f(2)=(2-1)^2+2=3, f[f(2)]=f(3)=(3-1)^2+2=6$.

题型四 函数性质的应用

1. 奇偶性和周期性(主要考查三角函数)



方法突破

(1)判断函数奇偶性的方法:

①定义法:若 $f(-x) = -f(x)$ 或 $f(-x) + f(x) = 0$, 则 $f(x)$ 为奇函数;

若 $f(-x) = f(x)$ 或 $f(-x) - f(x) = 0$, 则 $f(x)$ 为偶函数.

②图像法:若函数 $f(x)$ 的图像关于原点成中心对称图形, 则 $f(x)$ 为奇函数;若函数 $f(x)$ 的图像关于 y 轴成轴对称图形, 则 $f(x)$ 为偶函数.

(2)三角函数的周期:

$y = A\sin(\omega x + b)$, 周期 $T = \frac{2\pi}{|\omega|}$, 有界且 $-|A| \leq y \leq |A|$;

$y = A\cos(\omega x + b)$, 周期 $T = \frac{2\pi}{|\omega|}$, 有界且 $-|A| \leq y \leq |A|$;

$y = A\tan(\omega x + b)$, 周期 $T = \frac{\pi}{|\omega|}$, 无界.

例 8 (1)下列函数中, 周期是 $\frac{\pi}{2}$ 的偶函数是().

A. $y = \sin 4x$ B. $y = \cos 4x$ C. $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ D. $y = \cos 2x$

(2)函数 $f(x) = \sin xe^{x^2}$ 的图形关于_____对称.

(1)【答案】 B

【解析】 A 选项是奇函数; B 选项是偶函数且周期为 $\frac{\pi}{2}$; C 选项是非奇非偶函数; D 选项是偶函数且周期为 π .

(2)【答案】 原点

【解析】 因为 $f(-x) = \sin(-x)e^{(-x)^2} = -\sin xe^{x^2} = -f(x)$, 所以 $f(x)$ 为奇函数, 图形关于原点对称.

2. 正弦型函数的单调区间



方法突破

正弦型函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$, $x \in \mathbf{R}$ (其中 $A > 0, \omega > 0, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$),

增区间求法: $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq \omega x + \varphi \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$;

减区间求法: $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq \omega x + \varphi \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.



例 9 函数 $y=3\sin \frac{x}{2}$ 的递增区间是().

A. $[2k\pi, 2k\pi+\pi](k\in\mathbf{Z})$

B. $[2k\pi-\pi, 2k\pi+\pi](k\in\mathbf{Z})$

C. $[4k\pi-\pi, 4k\pi+\pi](k\in\mathbf{Z})$

D. $[4k\pi, 4k\pi+\pi](k\in\mathbf{Z})$

【答案】 C

【解析】 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leq\frac{1}{2}x\leq 2k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}$, 即 $4k\pi-\pi\leq x\leq 4k\pi+\pi, k\in\mathbf{Z}$.

题型五 求反函数



方法突破

求函数反函数的步骤:

(1) 由 $y=f(x)$, 解出 $x=f^{-1}(y)$, 即用 y 表示 x ;

(2) 将 x, y 的位置互换, 得到 $y=f^{-1}(x)$;

(3) 注明反函数的定义域, 即原函数的值域.

例 10 函数 $y=3^{x+1}$ 的反函数为_____.

【答案】 $y=\log_3 x-1$

【解析】 由 $y=3^{x+1}$ 得 $x=\log_3 y-1$, 自变量用 x 表示, 因变量用 y 表示, 得 $y=\log_3 x-1$.

二、极限

题型一 极限的计算



方法突破

求极限的解题思路:

(1) 当 $f(x)$ 在所在点处连续时, 函数值等于极限值.

(2) 当 $f(x)$ 为“分式 $\pm$ 分式”或“ $\frac{\text{分式}}{\text{分式}}$ ” $\left(\frac{0}{0}\right)$ 型时, 先通分、约分.

(3) 当 $f(x)$ 为“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型时, 利用抓大头思想, 分子分母同除以最高次幂求极限.

一般地, 设 $a_n \neq 0, b_m \neq 0, m, n$ 为非负整数, 分子分母同除以 x 的最高次幂有如下规律:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_0} = \begin{cases} 0, & m > n, \\ \infty, & m < n, \\ \frac{a_n}{b_n}, & m = n. \end{cases}$$

(4) 当 $f(x)$ 含有根式时, 先分子、分母有理化.

(5) 当 $f(x)$ 为两个重要极限时, 转化成重要极限套公式.

(6) 当 $f(x)$ 为“ $\frac{0}{0}$ ”型时, 可采用等价无穷小替换.

(7) 当 $f(x)$ 为幂指数形式时, 一般用指对恒等式变换, 再判断指数项类型求极限.

(8) 当 $f(x)$ 为分段函数形式时, 依据极限存在的充要条件判断.

1. 初等函数在所求点处连续, 直接代入数值求极限

例 1 求极限 $\lim_{x \rightarrow 1} (2x-1)$.

【解析】 $\lim_{x \rightarrow 1} (2x-1) = 2 \times 1 - 1 = 1$.

2. 约去不能代入的零因子求极限

例 2 求极限 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4-1}{x-1}$.

【解析】 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1)(x^2+1) = 4$.

3. 分子分母同除以最高次幂求极限(抓大头)

例 3 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3-x^2}{3x^3+1}$.

【解析】 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3-x^2}{3x^3+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-\frac{1}{x}}{3+\frac{1}{x^3}} = \frac{1}{3}$.

4. 分子(母)有理化求极限

例 4 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+3} - \sqrt{x^2+1})$.

【解析】 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+3} - \sqrt{x^2+1}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+3} - \sqrt{x^2+1})(\sqrt{x^2+3} + \sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+3} + \sqrt{x^2+1}}$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x^2+3} + \sqrt{x^2+1}} = 0$.

例 5 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$.

【解析】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{x+1-1} = \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x+1}+1) = 2$.

5. 应用两个重要极限的公式求极限

两个重要极限是 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 和 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.

例 6 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{3} \sin \frac{1}{x}$.

【解析】 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{3} \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \cdot \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \frac{1}{3}$.

例 7 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$.

【解析】 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x-1}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{x-1}{2}}\right)^{\frac{x-1}{2}} \left(1 + \frac{2}{x-1}\right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 = e^2$.

6. 用等价无穷小替换求极限

用等价无穷小替换求极限可以称为求极限最简便的方法. 常见的等价无穷小有:

当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin x \sim x$, $\tan x \sim x$, $\arcsin x \sim x$, $\arctan x \sim x$, $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$, $\ln(1+x) \sim x$, $e^x - 1 \sim x$,

$\sqrt[n]{x+1} - 1 \sim \frac{x}{n}$.

例 8 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1+x)}{1 - \cos x}$.

【解析】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1+x)}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot x}{\frac{1}{2}x^2} = 2$.

7. 用对数恒等式 $a^b = e^{b \ln a}$ 求极限

例 9 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sin \frac{2}{x} + 1\right)^{2x}$.

【解析】 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sin \frac{2}{x} + 1\right)^{2x} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x \ln \left(\sin \frac{2}{x} + 1\right)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x \cdot \sin \frac{2}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x \cdot \frac{2}{x}} = e^4$.

8. 分段函数在分段点处的极限

例 10 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & x > 1, \\ 2, & x \leq 1, \end{cases}$ 试求 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

【解析】 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+1) = 2$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$, 即 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$,
故 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$.

题型二 极限式中参数的确定



方法突破

在求解极限式中的参数问题时,在所求极限存在的前提下,可利用极限的四则运算法则、等价无穷小替换和重要极限等方法求解.

例 11 已知极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x} = 3$, 则 k 的值为().

A. 1

B. 3

C. -1

D. $\frac{1}{3}$

【答案】 B

【解析】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{kx} \cdot k = k = 3$.

例 12 已知极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{2x} = e^2$, 则 $a =$ _____.

【答案】 1

【解析】 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{a} \cdot \frac{a}{x} \cdot 2x} = e^{2a} = e^2$, 故 $a = 1$.

例 13 设 a, b 为常数, 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(bx + \frac{ax^2}{x+1}\right) = 2$, 则 $a+b =$ _____.

【答案】 0

【解析】 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(bx + \frac{ax^2}{x+1}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(a+b)x^2 + bx}{x+1} = 2$, 故 $a+b=0$.

题型三 无穷小的比较



方法突破

当 $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x) \rightarrow 0, g(x) \rightarrow 0$, 则:

(1) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ 时, $f(x)$ 是 $g(x)$ 的高阶无穷小.

(2) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ 时, $f(x)$ 是 $g(x)$ 的等价无穷小.

(3) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = k$ (k 是常数, 且 $k \neq 1$) 时, $f(x)$ 与 $g(x)$ 是同阶非等价无穷小.

(4) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ 时, $f(x)$ 是 $g(x)$ 的低阶无穷小.

例 14 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\ln(1+x^2)$ 是 $1-\cos x$ 的().

A. 低阶无穷小

B. 高阶无穷小

C. 同阶但不等价无穷小

D. 等价无穷小

【答案】 C

【解析】 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\ln(1+x^2) \sim x^2, 1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{1-\cos x} = \frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2} = 2$, 故选 C.

例 15 当 $x \rightarrow 1$ 时, 将下列各量与无穷小量 $x-1$ 进行比较.

(1) x^3-3x+2 ; (2) $\lg x$; (3) $(x-1)\sin \frac{1}{x-1}$.

【解析】 (1) 因为 $\lim_{x \rightarrow 1} (x^3-3x+2) = 0$, 所以 $x \rightarrow 1$ 时, x^3-3x+2 是无穷小量, 又因为

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-3x+2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)} = 0,$$

所以 x^3-3x+2 是关于 $x-1$ 的高阶无穷小量.

(2) 因为 $\lim_{x \rightarrow 1} \lg x = 0$, 所以当 $x \rightarrow 1$ 时, $\lg x$ 是无穷小量, 又

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\lg x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln[1+(x-1)]}{(x-1) \cdot \ln 10} = \frac{1}{\ln 10},$$



所以 $\lg x$ 是关于 $x-1$ 的同阶无穷小量.

(3) 由 $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \sin \frac{1}{x-1} = 0$ 知, 当 $x \rightarrow 1$ 时, $(x-1) \sin \frac{1}{x-1}$ 是无穷小量, 但是

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) \cdot \sin \frac{1}{x-1}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \sin \frac{1}{x-1}$ 不存在. 所以, $(x-1) \sin \frac{1}{x-1}$ 与 $x-1$ 不能比较.

三、连续

题型一 函数的连续性



方法突破

讨论分段函数在分断点处的连续性时, 我们需要知道判断函数在某点连续的三个条件: ① $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处有定义; ② $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在; ③ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. 在讨论②时, 常常通过讨论点 x_0 处的左极限和右极限, 按极限存在的充要条件讨论极限的存在性.

例 1 若函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = (\quad)$.

A. 0

B. $f(0)$

C. ∞

D. 不存在

【答案】 B

【解析】 由连续性的定义可知, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$.

例 2 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x^2}, & x \neq 0, \\ a, & x = 0, \end{cases}$ 若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{1}{2}$

【解析】 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$, 如果 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} = f(0) = a$.

题型二 函数的间断点及其类型的判断



方法突破

1. 间断点的判断

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的某去心邻域内有定义. 在此前提下, 如果函数 $f(x)$ 有下列三种情形之一:

(1) 在点 $x=x_0$ 处没有定义;

(2) 虽在点 $x=x_0$ 处有定义, 但 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在;

(3) 虽在点 $x=x_0$ 处有定义, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 但 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$,

则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续, 而点 x_0 称为函数 $f(x)$ 的不连续点或间断点.

2. 间断点类型的判断

x_0 是 $f(x)$ 的间断点, 若 $f(x)$ 在点 x_0 处的左右极限都存在, 则称 x_0 为第一类间断点.

$f(x)$ 在 x_0 点处的左右极限至少有一个不存在, 则 x_0 是 $f(x)$ 的第二类间断点.

第一类间断点中: $\begin{cases} \text{可去间断点: 左右极限相等;} \\ \text{跳跃间断点: 左右极限不相等.} \end{cases}$

第二类间断点: 无穷间断点, 振荡间断点等.

例 3 设 $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ x+1, & x > 1, \end{cases}$ 讨论 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的连续性.

【解析】 函数 $f(x)$ 的图像如图 1.1.6 所示.

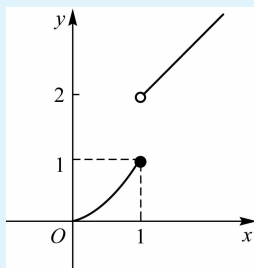


图 1.1.6

因为 $f(1)=1$, 而 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+1) = 2$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1$, 得 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 不存在, 所以 $x=1$ 是间断点.

由于左右极限存在但不相等, 因此它是第一类间断点, 且为跳跃间断点.

例 4 设 $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$, 则 $x=2$ 是 $f(x)$ 的().

- A. 可去间断点 B. 跳跃间断点
C. 无穷间断点 D. 连续点

【答案】 A

【解析】 因为 $f(x)$ 在 $x=2$ 处无定义, 所以 $x=2$ 是 $f(x)$ 的间断点. 又 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 4$, 故 $x=2$ 是 $f(x)$ 的可去间断点.

例 5 $x=1$ 为函数 $y = \frac{x^4-1}{x^3-1}$ 的_____间断点.

【答案】 可去

【解析】 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4-1}{x^3-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{4}{3}$, 故 $x=1$ 是函数的可去间断点.

题型三 证明方程根的存在性



方法突破

方程的根的存在性的判定步骤:

- (1) 构造一个闭区间 $[a, b]$, 且函数 $f(x)$ 在该闭区间上连续;
- (2) 计算 $f(a), f(b)$, 说明 $f(a) \cdot f(b) < 0$;
- (3) 由零点定理可得方程 $f(x) = 0$ 在 (a, b) 内至少有一个实根.

例 6 证明方程 $x^3 - 4x^2 + 1 = 0$ 在 $(0, 1)$ 内至少有一个实数根.

【证明】 设 $f(x) = x^3 - 4x^2 + 1$, 因为 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 所以, 它在 $[0, 1]$ 上连续, 且 $f(0) = 1 > 0$, $f(1) = -2 < 0$, 由零点定理知, 至少存在一点 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f(\xi) = 0$, 即方程 $x^3 - 4x^2 + 1 = 0$ 在区间 $(0, 1)$ 内至少有一个实数根.



复习题

一、选择题

1. 函数 $f(x) = \sqrt{2^x - 1} + \arctan \frac{1}{x-1}$ 的定义域为().

- A. $[0, 1)$ B. $(1, +\infty)$
C. $[0, 1) \cup (1, +\infty)$ D. $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

2. 已知函数 $f(x+1)$ 的定义域为 $[2, 5]$, 则函数 $y = \frac{f(3x)}{\sqrt{\log_2(4-x^2)}}$ 的定义域为().

- A. $[1, +\infty)$ B. $[1, \sqrt{3})$
C. $(1, +\infty)$ D. $[\frac{1}{3}, \sqrt{3})$

3. 下列命题中为真命题的是().

① 函数 $y = \frac{1}{2} \ln \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$ 与 $y = \ln \tan \frac{x}{2}$ 是同一函数;

② 若函数 $y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 的图像关于直线 $y = x$ 对称, 则函数 $y = f(2x)$ 与 $y = \frac{1}{2}g(x)$ 的图像也关于直线 $y = x$ 对称;

③ 若奇函数 $f(x)$ 对定义域内任意 x 都有 $f(x) = f(2-x)$, 则 $f(x)$ 为周期函数.

- A. ①② B. ①③
C. ②③ D. ②

4. 下列函数中既是偶函数又在 $(0, +\infty)$ 上单调递减的是().

- A. $f(x) = e^x - 1$ B. $f(x) = x + \frac{1}{x}$
C. $f(x) = \frac{1}{x^4}$ D. $f(x) = \lg |x|$

5. 设函数 $y = 2 + \ln(x+3)$, 则此函数的反函数是().

- A. $y = e^{2x+3} - 3$ B. $y = e^{x-2} - 3$
C. $x = \ln(y-2) - 3$ D. $y = \ln(x-2) - 3$

6. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \log_a x, & 0 < x < 1, \\ (4a-1)x + 2a, & x \geq 1, \end{cases}$ 满足对任意 $x_1 \neq x_2$, 都有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$ 成立, 则实

数 a 的取值范围是().

- A. $(0, \frac{1}{6})$ B. $(0, \frac{1}{6}]$
C. $(0, \frac{1}{4})$ D. $(1, +\infty)$

7. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8^x}{8^x - 5^x} = ()$.

- A. 1 B. $\frac{5}{8}$



C. $\frac{8}{5}$

D. 0

8. 函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处有意义是极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在的().

A. 充分条件

B. 必要条件

C. 充分必要条件

D. 无关条件

9. 函数 $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & 0 < x \leq 1, \\ 2-x, & 1 < x \leq 3 \end{cases}$ 在()时极限为 1.

A. $x \rightarrow \frac{1}{2}$

B. $x \rightarrow 1$

C. $x \rightarrow \frac{3}{2}$

D. $x \rightarrow 2$

10. 设 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$, 则下列正确的是().

A. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \infty$

B. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \infty$

C. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = 0$

D. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x) + g(x)} = 0$

11. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 下列变量中与 x 是等价无穷小的是().

A. $\sin^{\frac{1}{2}} x$

B. $\ln(1+x)$

C. $\cos x$

D. $2x^2 - x$

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ 的值是().

A. 0

B. $\frac{1}{2}$

C. 1

D. 2

13. 下列式子中正确的是().

A. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 1$

B. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \sin x = 1$

C. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} = 1$

D. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} = 1$

14. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2 \sin x)^{\frac{2}{\sin x}} = ()$.

A. e

B. e^2

C. e^4

D. 1

15. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} a + \ln x, & x \geq 1, \\ 2ax - 1, & x < 1 \end{cases}$ 在 $x=1$ 处连续, 则 $a = ()$.

A. 1

B. -1

C. 0

D. 3

16. 函数 $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x > 0, \\ a + x^2, & x \leq 0, \end{cases}$ 要使 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 则 $a = ()$.

A. 1

B. 0

C. 任意实数

D. 不存在

17. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(a)f(b) < 0$ 是方程 $f(x) = 0$ 在 (a, b) 上至少有一根的().

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

18. 关于函数 $f(x)$, 下列说法错误的是().A. 若 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 是无穷小量, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ B. 若函数在 $x=0$ 处存在极限, 则函数在 $x=0$ 处连续C. 若 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续D. 若 $f(x) = \frac{5}{x-3}$, 则 $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \infty$ 19. 函数 $f(x) = \frac{x-4}{x^2-3x-4}$ 间断点的个数为().

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

20. $x=0$ 是函数 $f(x) = \frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ 的().

A. 连续点

B. 可去间断点

C. 跳跃间断点

D. 第二类间断点

二、填空题

1. 函数 $f(x) = \arcsin \frac{x-1}{3} - \frac{1}{\sqrt{16-x^2}}$ 的定义域为_____.2. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 且当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = \log_2(x+1) + m + 1$, 则 $f(-3) =$ _____.3. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 且在 $[0, +\infty)$ 上是增函数, $f\left(\frac{1}{3}\right) = 0$, 则不等式 $f(\log_{\frac{1}{8}} x) > 0$ 的解集为_____.4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x} =$ _____.5. 已知极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x - \sqrt{ax^2 - x + 1})$ 存在, 则 a 的值为_____.6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - x}{\sin 3x + x} =$ _____.7. $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2 - x \sin 2x + 4} =$ _____.8. 若函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 3x}{x}, & x < 0, \\ k, & x = 0, \\ 3x^2 + x + 3, & x > 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 则 $k =$ _____.9. 设 $f(x)$ 处处连续, 且 $f(2) = 3$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{x} f\left(\frac{e^{2x}-1}{x}\right) =$ _____.10. 设函数 $f(x) = \frac{x^2-1}{|x|(x-1)}$, 则 $f(x)$ 的第一类间断点为_____.

三、解答题

1. 求函数 $y = \sqrt{x-2} + 1$ 的反函数.

2. 判断函数 $f(x) = \frac{2x}{x-1}$ 在区间 $(0, 1)$ 上的单调性.

3. 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x+6} \right)^{\frac{x-1}{2}}$.

4. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{(e^x-1)\sin x}$.

5. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1-\cos \pi x}{x^2-4x+4}$.

6. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2+n-1} + \frac{1}{n^2+n-2} + \cdots + \frac{1}{n^2+n-n} \right)$.



7. 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\frac{f(x)}{x}}-1}{x^2} = A (A \neq 0)$, 试确定常数 a, b , 使 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 与 ax^b 等价.

8. 设 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x}{1+x^{2n}}$, 求 $f(x)$ 的间断点并分类.

9. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $c, d \in (a, b)$, $t_1 > 0, t_2 > 0$. 证明: 在 $[a, b]$ 内存在点 ξ , 使得 $(t_1 + t_2)f(\xi) = t_1f(c) + t_2f(d)$.