凤凰传媒
PHOENIX MEDIA

策划编辑：李　松
责任编辑：谷建亚　李莹肖
封面设计：刘文东

GAODENG SHUXUE

高等数学

ISBN 978-7-5537-7126-7
9 787553 771267 01 >
定价：45.00元

高等院校公共基础课精品教材

高等数学

主编　伍文星　吴祥标

江苏凤凰科学技术出版社

高等院校公共基础课精品教材
“互联网＋”立体化教材

高等数学

GAODENG SHUXUE

伍文星　吴祥标　主编

江苏凤凰科学技术出版社
国家一级出版社　全国百佳图书出版单位

高等院校公共基础课精品教材

“互联网+”立体化教材

高等数学

■ 主　编　伍文星　吴祥标

■ 副主编　欧富强　周仁柳

■ 参　编　廖治元　毛德萍　李晰江

孙孝龙　熊明强　梁泽宏

谭显文　刘　建　彭德强

杨秀金

江苏凤凰科学技术出版社

国家一级出版社　全国百佳图书出版单位

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/伍文星,吴祥标主编.—南京:江苏凤凰科学技术出版社,2016.12(2021.1重印)

ISBN 978-7-5537-7126-7

Ⅰ.①高… Ⅱ.①伍… ②吴… Ⅲ.①高等数学—高等职业教育—教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第202308号

高等院校公共基础课精品教材

高等数学

主　　编	伍文星　吴祥标
责任编辑	谷建亚　李莹肖
责任校对	郝慧华
责任监制	曹叶平　周雅婷
出版发行	江苏凤凰科学技术出版社
出版社地址	南京市湖南路1号A楼,邮编:210009
出版社网址	http://www.pspress.cn
经　　销	全国新华书店
印　　刷	三河市骏杰印刷有限公司
开　　本	787 mm×1 092 mm　1/16
印　　张	17
字　　数	414千字
版　　次	2016年12月第1版
印　　次	2021年1月第2次印刷
标准书号	ISBN 978-7-5537-7126-7
定　　价	45.00元

Preface 前 言

高等数学课程是培养学生计算、逻辑推理、抽象思维和空间想象能力以及应用知识能力必不可少的一门课程，是高职高专各专业的一门重要公共基础课，也是进一步学习现代科学知识的必修课。本书是根据作者多年工作经验和教学实践编写而成的。

本书共分十一章，内容包括函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、二重积分、无穷级数和微分方程。

本书的特点是突出重点、深入浅出、紧密结合教学实际；针对不同专业的学生，组织编写各种应用型例题，以增强学生的应用能力；在讲述基本公式、概念、方程和定理的过程中，注意其几何图形直观的阐述；用实例引入抽象概念的讲解，让学生理解起来更加容易；例题的讲解清晰明了，并总结了不同类型题目的命题规律及解题思路；对学生容易混淆的概念，给出了“注意”予以提醒；对重点概念，给出了相关的“思考”，以加深对概念的理解并起到调节课堂氛围的作用。

本书适合作为高职高专理工类、财经类等相关专业学生使用的教材。目的在于培养学生的实际动手能力，使得学生更加适合用人单位的技能要求。建议学时为100～140学时，其中标 * 部分，供教师根据教学的需要及可利用学时数进行选讲。

本书由伍文星、吴祥标主编。在编写过程中，教研室的同事给予了很多帮助和指导，提出了许多宝贵意见，在此表示衷心的感谢！

由于编写时间仓促，编者水平有限，书中定有不当之处，敬请广大读者批评指正。

编　者

Contents 目录

第一章　函　　数

函数描述了客观世界中量与量之间的依赖关系，是高等数学的主要研究对象. 高等数学这门学科，主要研究定义在实数集上的函数，函数的概念及其性质中学已经学过，本章主要复习和巩固函数的一些基础知识.

第一节　函数的概念

为了研究问题的方便，首先来介绍高等数学中经常需要用到的几个基本概念.

一、集合、区间和邻域

(一) 集合

集合概念是数学中的一个最基本的概念，一般可以把**集合**(简称**集**)理解为具有某种特定性质的事物的总体. 例如，某学校全体师生组成的一个集合；某学校某个班级的全体同学组成的一个集合；全体实数组成的一个集合；全体正整数组成的一个集合等. 集合中的每个事物称为集合的**元素**(简称**元**). 习惯上用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合，用小写字母 $a,b,c,\cdots$ 表示集合的元素. 如果元素 a 是集合 A 中的元素，记作 $a\in A$(读作 a 属于 A)；如果元素 a 不是集合 A 中的元素，记作 $a\notin A$(读作 a 不属于 A).

如果一个集合只含有有限个元素，那么称这个集合为有限集；不是有限集的集合称为无限集. 例如，全体英文字母组成的一个集合是有限集，全体整数组成的集合是无限集.

给定一个集合，就是给出这个集合由哪些元素组成，给出集合的方法通常有两种：列举法和描述法.

列举法就是把集合中的所有元素都列举出来写在大括号内. 例如，由 1，2，3，4，5，6，7，8 八个数组成的集合 A 可记作

$$A=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$$

描述法就是把集合中所有元素的公共属性描述出来，记作

$$A=\{x\mid x\text{ 具有性质 }P\}$$

例如，

$$A=\{x\mid 0<x<6\}$$

表示满足不等式 $0<x<6$ 的实数.

$$B=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4\}$$

表示在 xOy 平面上以原点 O 为中心，半径为 2 的圆周及其内部所有点所组成的集合.

习惯上，全体实数组成的集合记作 $\mathbf{R}$，即 $\mathbf{R}=\{x\mid x\text{ 为实数}\}$；全体有理数组成的集合记作 $\mathbf{Q}$，即 $\mathbf{Q}=\{x\mid x\text{ 为有理数}\}$；全体整数组成的集合记作 $\mathbf{Z}$，即 $\mathbf{Z}=\{x\mid x\text{ 为整数}\}$；全体自然数组成的集合记作 $\mathbf{N}$，即 $\mathbf{N}=\{x\mid x\text{ 为自然数}\}$.

设 A,B 是两个集合，如果集合 A 中的元素都是集合 B 中的元素，则称集合 A 是集合 B 的**子集**，记作

$$A \subset B(\text{读作 } A \text{ 包含于 } B) \quad \text{或} \quad B \supset A(\text{读作 } B \text{ 包含 } A)$$

如果集合 B 与集合 A 互为子集，即 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，则称集合 B 与集合 A **相等**，记作

$$A = B$$

例如，集合 $A = \{2,3\}$，集合 $B = \{x \mid x^2 - 5x + 6 = 0\}$，则 $A = B$.

特别地，不包含任何元素的集合称为**空集**，记作 $\varnothing$. 并规定空集是任何集合的子集.

例如，$\{x \mid x^2 + 1 = 0 \text{ 且 } x \in \mathbf{R}\}$ 是空集，因为满足条件 $x^2 + 1 = 0$ 的实数是不存在的.

注意　以后用到的集合主要指数集，即元素都是数的集合. 如果没有特别声明，以后提到的数都是指实数.

集合的基本运算有以下几种：并、交、差.

设 A,B 是两个集合，由所有属于 A 或者属于 B 的元素组成的集合，称为 A 与 B 的**并集**（简称**并**），记作 $A \cup B$，即

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$$

由所有既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合，称为 A 与 B 的**交集**（简称**交**），记作 $A \cap B$，即

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$$

由所有属于 A 而不属于 B 的元素组成的集合，称为 A 与 B 的**差集**（简称**差**），记作 $A \backslash B$，即

$$A \backslash B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$$

特别地，若集合 B 包含于集合 A（即 $B \subset A$），则称 $A \backslash B$ 为 B 关于 A 的**余集**，或称为**补集**，记作 $\complement_A B$. 通常我们所讨论的问题是在一个大集合 I 中进行，所研究的其他集合 A 都是 I 的子集，此时称 $I \backslash A$ 为 A 的余集，记作 $\complement_I A$ 或 A^C.

例如，在实数集 $\mathbf{R}$ 中，集合 $A = \{x \mid -3 \leqslant x \leqslant 5\}$ 的余集为

$$A^C = \{x \mid x < -3 \text{ 或 } x > 5\}$$

集合的并、交、差运算满足下面的基本法则.

设 A,B,C 为三个任意集合，则下列法则成立：

(1) 交换律　$A \cup B = B \cup A$，　$A \cap B = B \cap A$

(2) 结合律　$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

(3) 分配律　$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

$(A \backslash B) \cap C = (A \cap C) \backslash (B \cap C)$

(4) 幂等律　$A \cup A = A$，　$A \cap A = A$

(5) 吸收律　$A \cup \varnothing = A$，　$A \cap \varnothing = \varnothing$

$A \cup B = B$，　$A \cap B = A$，其中 $A \subset B$

$A \cup (A \cap B) = A$，　$A \cap (A \cup B) = A$

(6) 对偶律　$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

以上法则都可以利用集合的定义来验证.

在许多问题中还经常用到乘积集合的概念. 设 A,B 是任意两个非空集合，在集合 A 中任

意取一个元素 x，在集合 B 中任意取一个元素 y，把有序对 (x,y) 作为新的元素，它们的全体组成的集合称为集合 A 与集合 B 的直积，记作 $A\times B$，即

$$A\times B=\{(x,y)\mid x\in A\ ,y\in B\}$$

例如，设 $A=\{x\mid a<x<b\}$，$B=\{y\mid c<y<d\}$，则

$$A\times B=\{(x,y)\mid a<x<b,c<y<d\}$$

它表示 xOy 平面上以 (a,c)，(b,c)，(b,d)，(a,d) 为顶点的矩形内部的所有点构成的集合，而 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\{(x,y)\mid x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$ 就表示整个坐标平面，记作 $\mathbf{R}^2$.

（二）区间

在很多情况下，集合可以用区间来表示. 设 a 和 b 都是实数，且 $a<b$，集合 $\{x\mid a<x<b\}$ 称为**开区间**，记作 (a,b)，即

$$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$$

它在数轴上表示点 a 与点 b 之间的线段，但不包括端点 a 及端点 b，如图 1－1 所示.

集合 $\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为**闭区间**，记作 $[a,b]$，即

$$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$$

它在数轴上表示点 a 与点 b 之间的线段，包括两个端点，如图 1－2 所示.

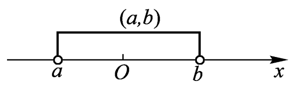


图　1－1

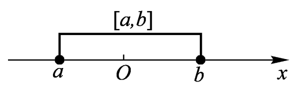


图　1－2

还有其他类似的区间：

集合 $\{x\mid a<x\leqslant b\}$ 记作 $(a,b]$，称为左开右闭区间，如图 1－3 所示.

集合 $\{x\mid a\leqslant x<b\}$ 记作 $[a,b)$，称为左闭右开区间，如图 1－4 所示.

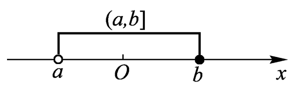


图　1－3

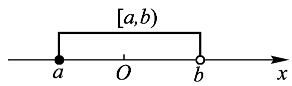


图　1－4

上述两个区间 $(a,b]$ 和 $[a,b)$ 统称为半开区间.

以上这些区间都称为有限区间，数 $b-a$ 称为这些区间的长度. 从数轴上看，这些有限区间是长度为有限的线段.

此外还有所谓无限区间，引进记号 $+\infty$（读作正无穷大）及 $-\infty$（读作负无穷大），则无限区间表示如下：

$(a,+\infty)=\{x\mid x>a\}$，如图 1-5 所示. $[a,+\infty)=\{x\mid x\geqslant a\}$，如图 1-6 所示.

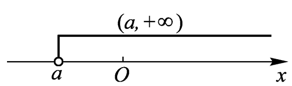


图　1－5

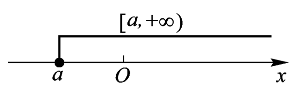


图　1－6

$(-\infty,b)=\{x\mid x<b\}$，如图 1-7 所示. $(-\infty,b]=\{x\mid x\leqslant b\}$，如图 1-8 所示.

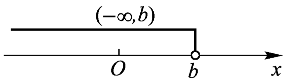


图 1-7

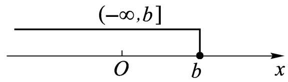


图 1-8

全体实数的集合 $\mathbf{R}=(-\infty,+\infty)=\{x \mid x$ 为任意实数$\}$，它也是无限区间.

注意 以后在不需要辨明所讨论区间是否包含端点，以及是有限区间还是无限区间的问题时，就简单地称它为“区间”，且常用 I 来表示.

(三) 邻域

设 a 与 δ 是两个实数且 $\delta>0$，则称数集

$$\{x \mid |x-a|<\delta\}$$

或

$$\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}$$

为点 a 的 δ **邻域**，记作 $U(a,\delta)$，并称点 a 为该邻域的中心，δ 为该邻域的半径. 如图 1-9 所示.

因为 $|x-a|$ 表示点 x 与点 a 间的距离，所以 $U(a,\delta)$ 表示与点 a 距离小于 δ 的一切点 x 的全体. 实际上，邻域就表示以点 a 为中心的任何开区间.

点 a 的 δ 邻域去掉中心点 a 后的集合，称为点 a 的去心 δ 邻域，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$，并且

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$$

其中 $0<|x-a|$ 就表示 $x\neq a$.

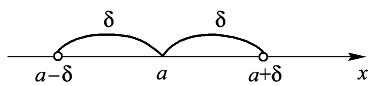


图 1-9

例如，点 0 的 $\frac{1}{5}$ 邻域为 $\{x \mid |x|<\frac{1}{5}\}$；点 2 的 $\frac{1}{2}$ 去心邻域为 $\{x \mid 0<|x-2|<\frac{1}{2}\}$.

设 a 与 δ 是两个实数且 $\delta>0$，则称数集

$$\{x \mid a<x<a+\delta\}$$

与

$$\{x \mid a-\delta<x<a\}$$

分别为点 a 的右 δ 邻域与点 a 的左 δ 邻域，分别记作 $U_+(a,\delta)$，$U_-(a,\delta)$.

例如，点 0 的右 $\frac{1}{5}$ 邻域为 $\{x \mid 0<x<\frac{1}{5}\}$，点 0 的左 $\frac{1}{5}$ 邻域为 $\{x \mid -\frac{1}{5}<x<0\}$.

思考 某个班级的所有高个子学生能用一个集合来表示吗？为什么？

二、函数的基本概念

在对自然现象与社会现象的观察与研究过程中，人们会碰到许多用来表示不同事物的量，通常可将它们分为两类：一类是在某个问题的研究过程中保持不变的量，称之为常量；一类是在某个问题的研究过程中会出现变化，即可以取不同的值的量，称之为变量.

例如，学校的体育馆的面积是保持不变的，是常量，而每天来体育馆打球的人数是不同的，因而是变量.

又如，将一密闭的容器中的气体进行加热，在加热过程中，容器中的气体的体积、分子数保持不变，是常量；而气体的温度、容器内的气压在不断变化，是变量.

在研究实际问题的过程中，常常发现有几个变量同时变化，它们并不是孤立的，它们不仅是相互联系的，而且还是遵循一定变化规律联系的，下面先举例说明两个变量的情形.

例 1 正方体的体积 V 与其边长 x 之间的关系由公式 $V=x^3$，这里 V 和 x 都是变量，当边

长 x 变化时,其体积 V 也随之作相应的变化.

例 2　在自由落体运动中,设物体下落的时间为 t,下落的距离为 s,如果取开始下落的时刻 $t=0$,那么 s 和 t 之间的依赖关系由公式

$$s=\frac{1}{2}gt^2 \quad (g \text{ 为重力加速度})$$

表示,若物体到达地面的时刻 $t=T$,则在时间区间 $[0,T]$ 上任取一个数值时,由上面的公式都可以确定出 s 的对应值.

例 3　设某产品的固定成本为 100 万元,每生产 100 件成本就增加 4 万元,已知该商品市场前景看好,即产品可以全部销售出去,又知其需求量函数为 $q=200-2p$(其中 p 表示销售单价). 显然,总成本为

$$C(q)=100+4q$$

总收益为

$$R(q)=pq=\frac{1}{2}(200-q)q=100q-\frac{1}{2}q^2$$

因此,总利润为

$$L(q)=R(q)-C(q)=100q-\frac{1}{2}q^2-(100+4q)=-\frac{1}{2}q^2+96q-100$$

即总利润是随需求量的变化而变化的.

上面三个例子的实际意义虽然不同,但却有共同之处,每个例子所描述的变化过程都有两个变量,当其中一个变量在一定变化范围内取定一个数值时,按照某一确定的法则,另一个变量有唯一确定的数值与之对应. 两个变量之间的这种对应关系,在数学上就是函数的概念.

定义　设 D 为一个给定的实数集,对于每个 $x\in D$,按照某种对应法则 f,总存在唯一确定的实数值 y 与之对应,则称 f 为定义在 D 上的一个**函数**,习惯上也称 y 是 x 的函数,并记作

$$y=f(x),\quad x\in D$$

其中 x 称为**自变量**,y 称为**因变量**,实数集 D 称为这个函数 f 的**定义域**.

函数定义中,对于每个 $x\in D$,按照某种对应法则 f,总存在唯一确定的实数值 y 与之对应,这个实数值 y 称为函数 f 在 x 处的函数值,记作 $f(x)$,即 $y=f(x)$. 当 x 遍取实数集 D 的每个数值时,对应的函数值的全体组成的数集

$$W=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$$

称为函数 f 的**值域**.

值得注意的是记号 f 和 $f(x)$ 的含义是有区别的,f 表示自变量 x 和因变量 y 之间的对应法则,而 $f(x)$ 表示与自变量 x 对应的函数值.

如果 $x_0\in D$,则称函数 f 在点 x_0 处有定义或有意义;如果 $x_0\notin D$,则称函数 f 在点 x_0 处无定义或无意义. 当 $x=x_0$ 时,函数 f 的值为 y_0,记为 $y_0=f(x_0)$. 如果函数在某个区间 I 上每一点都有定义,就说这个函数在该区间 I 上有定义.

如果 y 是 x 的函数,有时也可记为 $y=g(x)$,$y=F(x)$,$y=\varphi(x)$ 或 $y=y(x)$ 等. 当讨论到几个不同的函数时,为了区别起见,需要用不同的记号来表示它们.

由于函数的定义域和对应法则被确定后,其值域就随之而定,因此定义域和对应法则就成了函数的两个要素. 如果两个函数的定义域和对应法则都相同,则称这两个函数相同,否则就不同.

例 4 函数 $y=x^3$ 与 $y=t^3$，它们的定义域为实数集 $\mathbf{R}$，且其对应法则都是“自变量的三次方”，因此，虽然表示变量的字母不同，但它们仍然是两个相同的函数. 可是对于函数 $y=\dfrac{1}{x+2}$ 与 $y=\dfrac{x}{x^2+2x}$，由于它们的定义域不同，所以它们是两个不同的函数. 对于函数 $y=x$ 与 $y=\sqrt{x^2}$ 有相同的定义域，但当 $x<0$ 时，两个函数的对应法则不同，所以它们也是两个不同的函数.

在研究函数时必须注意它的定义域. 在实际问题中，函数的定义域是根据问题的实际意义来确定的. 如例 1 中定义域为 $D=(0,+\infty)$，例 2 中定义域为 $D=[0,T]$，例 3 中定义域为$D=[0,200)$.

在数学中，有时不考虑函数的实际意义，而抽象地研究用算式表达的函数，这时约定函数的定义域就是使得这个式子的运算有意义的所有实数值. 这种定义域又称为函数的自然定义域.

通常情况下，求函数定义域时要注意以下几点：

(1) 分式中分母不能为零；

(2) 偶次根式中，被开方式的值非负；

(3) 对数式中的真数大于零，底数大于零且不等于 1.

例 5 求函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{9-x}}$ 的定义域 .

解 要使 $f(x)$ 有意义，必须使 $9-x>0$，即 $x<9$. 所以函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{9-x}}$ 的定义域为$\{x\mid x<9\}$.

例 6 求函数 $y=\lg\dfrac{x}{x-2}$ 的定义域.

解 要使函数 $f(x)$ 有意义，只有$\dfrac{x}{x-2}>0$，即 $x>2$ 或 $x<0$. 所以函数 $y=\lg\dfrac{x}{x-2}$ 的定义域为$(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$.

一般情况下，表示函数的方法主要有三种：表格法、图形法、解析法(公式法).

用图形法表示函数是基于函数图形的概念，即坐标平面上的点集

$$\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$$

称为函数 $y=f(x),x\in D$ 的图形.

在用解析法表示函数时，有些函数在整个定义域范围内，可以用一个数学式子表示，但有些函数在其定义域的不同部分用不同数学式子才能表示，这类函数我们称之为分段函数. 值得注意的是，分段函数的定义域是几个不相交的子定义域的并集. 求分段函数值时，应该把自变量的值代入相应的取值范围的式子中进行计算.

例如，函数 $y=\begin{cases}-x+1, & 0\leqslant x<1\\ -x-1, & -1\leqslant x<0\end{cases}$ 是一个分段函数，其定义域为$\{x\mid -1\leqslant x<1\}$.

当 $x=\dfrac{1}{2}$ 时， $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{1}{2}$；

当 $x=-\dfrac{1}{2}$ 时， $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\left(-\dfrac{1}{2}\right)-1=-\dfrac{1}{2}$.

下面举几个函数的例子.

例 7　函数 $y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$ 称为绝对值函数,它的定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$[0,+\infty)$,它的图形如图 1-10 所示.

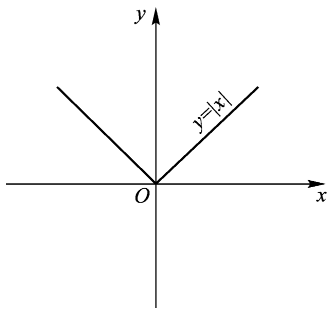


图　1-10

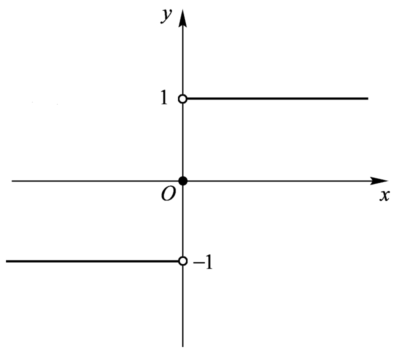


图　1-11

例 8　函数 $y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$ 称为符号函数,它的定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$\{-1,0,1\}$,它的图形如图 1-11 所示.

例 9　函数 $y=f(x)=[x]=n, n\leqslant x<n+1$,其中 n 为整数,记号$[x]$表示不超过 x 的最大整数. 例如,$\left[\dfrac{3}{5}\right]=0$,$[\sqrt{3}\,]=1$,$[\pi]=3$,$[-1]=-1$,$[-4.6]=-5$.

显然,函数 $y=[x]$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为全体整数,它的图形如图 1-12 所示,这图形称为阶梯曲线. 在 x 为整数值处,图形发生跳跃,跃度为 1,这函数称为取整函数.

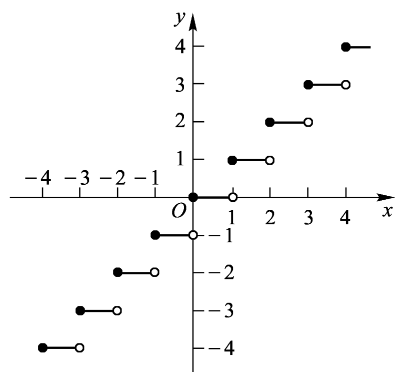


图　1-12

思考　函数 $y=\sqrt{x^2}$ 与 $y=x$ 是同一个函数吗?应该从哪几个方面判断两个不同的解析式所表示的函数是否为同一函数?

习题 1-1

1. 设 A,B 分别为下列两个给定的集合,试求 $A\cup B, A\cap B, A\backslash B, B\backslash A$.

(1)$A=\{1,3,5,7,8\}, B=\{2,4,6,8\}$;

(2)$A=(-\infty,-5)\cup(5,+\infty), B=[-10,3)$;

(3)$A=\left\{0,1,\dfrac{1}{2},\cdots,\dfrac{1}{n},\cdots\right\}, B=\left\{1,\dfrac{1}{2},\cdots,\dfrac{1}{n},\cdots\right\}$.

2. 设 $A=\{x\mid x^2+x-6<0\}, B=\{x\mid x^2-2x-3\leqslant 0\}$,试求 $A\cap B$.

3. 求下列各函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{x^2-1}$；　(2) $y=\arcsin(\frac{x-3}{2})$；　(3) $y=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$；

(4) $y=\tan(x+1)$；　(5) $y=\ln(x+1)$；　(6) $y=\arcsin(\ln x)$.

4. 下列各题中，函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同？为什么？

(1) $f(x)=2\ln x, g(x)=\ln x^2$；　(2) $f(x)=\frac{x^2-9}{x+3}, g(x)=x-3$；

(3) $f(x)=\sqrt{x^2}, g(x)=x$；　(4) $f(x)=\sin^2 x+\cos^2 x, g(x)=1$；

(5) $f(x)=x, g(x)=\arcsin(\sin x)$；　(6) $f(x)=1, g(x)=\sec^2 x-\tan^2 x$.

5. 求下列各函数值：

(1) 设 $f(x)=x^3-1$，求 $f(0), f(-x)$；

(2) 设 $f(x)=\begin{cases} x, & x>0 \\ 1, & x=0, \\ -x, & x<0 \end{cases}$ 求 $f(0), f(-1), f(1)$；

(3) 设 $g(x)=\begin{cases} |\sin x|, & |x|<\frac{\pi}{3} \\ 0, & |x|\geqslant\frac{\pi}{3} \end{cases}$，求 $g(\frac{\pi}{6}), g(\frac{\pi}{4}), g(-\frac{\pi}{4}), g(-2)$.

第二节　函数的几种特性

研究函数性质的目的是为了了解函数所具有的特性，以便掌握它的变化规律. 本节主要讨论与函数的几何图形有关的单调性、有界性、奇偶性和周期性.

一、函数的单调性

定义 1　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$，如果对于任意 $x_1, x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)<f(x_2)$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调增加**的，如图 1-13 所示.

如果对于任意 $x_1, x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)>f(x_2)$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调减少**的，如图 1-14 所示. 单调增加的函数和单调减少的函数统称为单调函数，若 $f(x)$ 在区间 I 上是单调函数，则称 I 是该函数的**单调区间**. 若沿着 x 轴的正方向看，单调增加函数的图形是一条上升的曲线，单调减少函数的图形是一条下降的曲线.

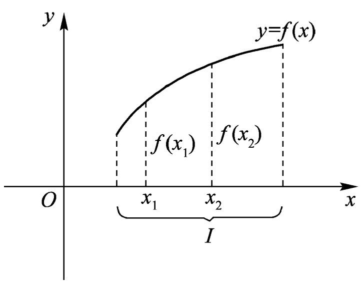


图　1-13

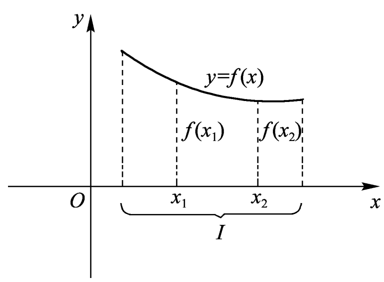


图　1-14

例 1　函数 $f(x)=x^2$ 在 $[0,+\infty)$ 上为单调增加函数，函数 $f(x)=x^2$ 在 $(-\infty,0]$ 上为单调减少函数，但是，函数 $f(x)=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内却不是单调函数，如图 1－15 所示.

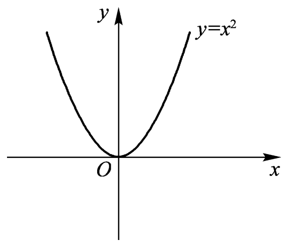


图　1－15

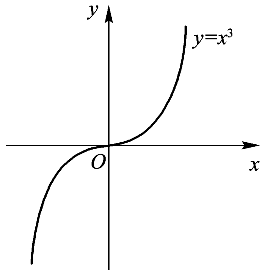


图　1－16

例 2　函数 $f(x)=x^3$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调增加的，如图 1－16 所示.

例 3　用定义证明函数 $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$ 在 $(0,+\infty)$ 内是单调增加的.

证　对任意 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，

$$f(x_2)-f(x_1)=\frac{x_2}{1+x_2}-\frac{x_1}{1+x_1}=\left(1-\frac{1}{1+x_2}\right)-\left(1-\frac{1}{1+x_1}\right)=$$

$$\frac{1}{1+x_1}-\frac{1}{1+x_2}=\frac{(1+x_2)-(1+x_1)}{(1+x_1)(1+x_2)}=$$

$$\frac{x_2-x_1}{(1+x_1)(1+x_2)}>0$$

即 $f(x_2)>f(x_1)$，故函数 $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$ 在 $(0,+\infty)$ 内是单调增加的.

思考　指出正弦函数 $y=\sin x, x\in[0,2\pi]$ 的单调区间. 在定义域 $[0,2\pi]$ 内，$y=\sin x$ 是单调函数吗?

二、函数的有界性

定义 2　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D.

(1) 如果存在一个常数 m，使得对于任意 $x\in D$，恒有

$$f(x)\geqslant m$$

则称函数 $f(x)$ 在 D 上有下界且 m 就是 $f(x)$ 的一个**下界**；

(2) 如果存在一个常数 M，使得对于任意 $x\in D$，恒有

$$f(x)\leqslant M$$

则称函数 $f(x)$ 在 D 上有上界且 M 就是 $f(x)$ 的一个**上界**；

(3) 如果存在两个常数 m 与 M，使得对于任意 $x\in D$，恒有

$$m\leqslant f(x)\leqslant M$$

则称函数 $f(x)$ 在 D 上**有界**.

这个定义表明，函数 $f(x)$ 在 D 上有界的充分必要条件是函数 $f(x)$ 在 D 上即有上界又有下界.

如果记 $\max\{|m|,|M|\}=K$，那么可得到一个等价定义：如果存在一个常数 $K>0$，使得

对于任意 $x\in D$,恒有 $|f(x)|\leqslant K$,则称函数 $f(x)$ 在 D 上有界. 如果这样的 K 不存在,就称函数 $f(x)$ 在 D 上无界. 换句话说,如果对于任何正数 K,总存在一个 $x_1\in D$,使得 $|f(x_1)|>K$,则函数 $f(x)$ 在 D 上**无界**.

例 4 $y=\cos x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上就是有界函数. 因为对于任意 $x\in(-\infty,+\infty)$,恒有 $|\cos x|\leqslant 1$.

例 5 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(1,5)$ 内是有界的,但函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 内就无界. 因为对于任意正数 M,总能找到一个数 $x_1=\dfrac{1}{M+1}\in(0,1)$,使得

$$f(x_1)=\frac{1}{x_1}=M+1>M$$

从而 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 内无界.

值得注意的是,单调性和有界性是关于函数在所讨论区间上的概念,不能离开区间来谈函数的单调性和有界性.

思考 如果函数在某区间上有界,那么界是唯一的吗?5 是余弦函数 $y=\cos x$ 的上界吗?

三、函数的奇偶性

随堂测试

定义 3 设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称,如果对于任意 $x\in D$,恒有

$$f(-x)=f(x)$$

成立,则称 $f(x)$ 为**偶函数**. 如果对于任意 $x\in D$,恒有

$$f(-x)=-f(x)$$

成立,则称 $f(x)$ 为**奇函数**.

偶函数的图形关于 y 轴是对称的,如图 1-17 所示;**奇函数的图形关于原点是对称的**,如图 1-18 所示.

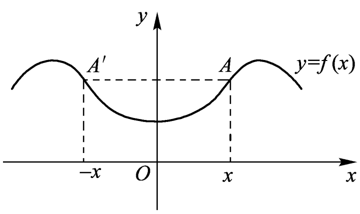


图 1-17

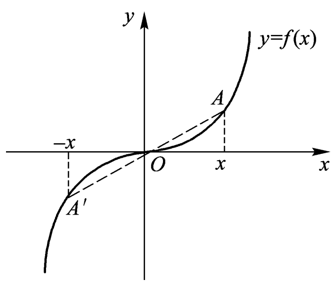


图 1-18

例 6 函数 $f(x)=\cos x, g(x)=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 都是偶函数,因为 $\cos(-x)=\cos x$, $(-x)^2=x^2$.

例 7 函数 $f(x)=\sin x, g(x)=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 都是奇函数,因为 $\sin(-x)=-\sin x$, $(-x)^3=-x^3$.

注意 不能说函数 $f(x)$ 不是奇函数就一定是偶函数,或者说不是偶函数就一定是奇函数.

例 8　函数 $f(x)=x+1$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上既不是奇函数，也不是偶函数. 因为 $f(-1)=0$，$f(1)=2$，既无 $f(-1)=-f(1)$，也无 $f(-1)=f(1)$.

例 9　函数 $f(x)=\sin x+\cos x$，$g(x)=x^2+x^3$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上既不是奇函数也不是偶函数. 因为

$$f(-x)=\sin(-x)+\cos(-x)=-\sin x+\cos x\neq -f(x)=-\sin x-\cos x$$
$$g(-x)=(-x)^2+(-x)^3=x^2-x^3\neq -g(x)=-x^2-x^3$$

例 10　证明函数 $f(x)=\lg(x+\sqrt{1+x^2})$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是奇函数.

证　因为 $f(-x)=\lg(-x+\sqrt{1+(-x)^2})=\lg\dfrac{(\sqrt{1+x^2}-x)(\sqrt{1+x^2}+x)}{\sqrt{1+x^2}+x}=$

$$\lg\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}=-\lg(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x)$$

所以，函数 $f(x)=\lg(x+\sqrt{1+x^2})$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是奇函数.

注意　判断函数的奇偶性，除用定义判断外，还可以利用奇函数和偶函数之间的运算性质来判别. 例如，两个奇函数的代数和仍为奇函数；两个偶函数的代数和仍是偶函数，奇函数与偶函数的乘积是奇函数，两个奇函数的乘积或两个偶函数的乘积是偶函数等.

例 11　证明定义在关于原点对称的区间上任何函数 $f(x)$ 都可以表示为一个奇函数与一个偶函数的和.

证　令 $\varphi(x)=\dfrac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$，$\psi(x)=\dfrac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$. 因为

$$\varphi(-x)=\frac{1}{2}\{f(-x)+f[-(-x)]\}=\frac{1}{2}[f(-x)+f(x)]=\varphi(x)$$
$$\psi(-x)=\frac{1}{2}\{f(-x)-f[-(-x)]\}=\frac{1}{2}[f(-x)-f(x)]=-\psi(x)$$

所以 $\varphi(x)$ 是偶函数，$\psi(x)$ 是奇函数；而

$$f(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]+\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]=\varphi(x)+\psi(x)$$

故函数 $f(x)$ 都可以表示为一个奇函数与一个偶函数的和.

思考　奇、偶函数的图形各有什么特点？怎样判断一个函数的奇偶性？

四、函数的周期性

定义 4　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在一个正数 T，使得对于任何 $x\in D$，都有

$$f(x\pm T)=f(x)\text{ 且 }(x\pm T)\in D$$

则称函数 $f(x)$ 为**周期函数**，其中 T 称为函数 $f(x)$ 的**周期**. 通常情况下，我们说的周期是指最小正周期，但并非每个周期函数都存在最小正周期.

例 12　函数 $\sin x$，$\cos x$ 是周期函数，最小正周期都是 2π；函数 $\tan x$，$\cot x$ 是周期函数，最小正周期是 π；函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi_0)$ 与 $y=A\cos(\omega x+\varphi_0)$ 是周期函数，最小正周期是 $\dfrac{2\pi}{\omega}$. 但是，函数 $f(x)=C$（C 为常数），存在 $T>0$，使得 $f(x\pm T)=f(x)$，但这样的周期 T 无最小正值.

通常情况下，判断一个函数是否是周期函数的步骤如下：

(1) 将函数分解成已知其周期的函数（比如三角函数等）的代数和，再求这些周期函数的周期的最小公倍数.

例如，函数 $y=2\sin^2 x$，因为 $2\sin^2 x=1-\cos 2x$，且 $\cos 2x$ 是以 π 为周期的函数，所以 $y=2\sin^2 x$ 是以 π 为周期的函数.

(2) 列出方程 $f(x+T)-f(x)=0$，以 T 为未知量解此方程.

若解出的 T 是与 x 无关的正数，则 $f(x)$ 是周期函数；反之，如果利用一些已知的运算法则推出矛盾的结果，就可断定函数是非周期函数.

例 13 判断函数 $y=\sin x^2$ 是否为周期函数.

解 假定它是周期函数，且存在正周期 T，则

$$\sin(x+T)^2=\sin x^2$$

令 $x=0$，得

$$\sin T^2=0$$

解方程，得

$$T^2=k\pi$$

即

$$T=\sqrt{k\pi}$$

其中 $k\in\mathbf{N}$. 再令 $x=\sqrt{2}T$，得

$$\sin[(\sqrt{2}+1)^2 k\pi]=0$$

即

$$(\sqrt{2}+1)^2 k\pi=l\pi \quad (l\in\mathbf{N})$$

则

$$(\sqrt{2}+1)^2=\frac{l}{k} \quad (l,k\in\mathbf{N})$$

由于 $\frac{l}{k}$ 为有理数，而 $(\sqrt{2}+1)^2$ 不是有理数，从而得出矛盾. 所以函数 $y=\sin x^2$ 不是周期函数.

例 14 讨论函数 $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$ 的初等性质.

解 函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$. 对于任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，

$$|f(x)|=\left|\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}\right|\leqslant\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}=1$$

$$f(-x)=\frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^x}=-f(x)$$

对于任意 $x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，则

$$f(x_2)-f(x_1)=\frac{\mathrm{e}^{x_2}-\mathrm{e}^{-x_2}}{\mathrm{e}^{x_2}+\mathrm{e}^{-x_2}}-\frac{\mathrm{e}^{x_1}-\mathrm{e}^{-x_1}}{\mathrm{e}^{x_1}+\mathrm{e}^{-x_1}}=\frac{2(\mathrm{e}^{x_2-x_1}-\mathrm{e}^{x_1-x_2})}{(\mathrm{e}^{x_2}+\mathrm{e}^{-x_2})(\mathrm{e}^{x_1}+\mathrm{e}^{-x_1})}>0$$

即

$$f(x_2)>f(x_1)$$

要使得 $f(x+T)=f(x)$，即

$$\frac{\mathrm{e}^{x+T}-\mathrm{e}^{-x+T}}{\mathrm{e}^{x+T}+\mathrm{e}^{-x+T}}=\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$$

易知，只有 $T=0$，故函数 $f(x)$ 不是周期函数，但函数在 $(-\infty,+\infty)$ 上是有界的、单调增加的奇函数.

思考 函数 $y=C$（C 为常数）是周期函数吗？它有最小正周期吗？为什么？

习题 1-2

1. 讨论下列函数在指定区间上的单调性：

(1) $y=\lg x$ 在 $(0,+\infty)$ 内； (2) $y=\sin x$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内；

(3) $y = 2x$ 在 $(0,1)$ 内；

(4) $y = -4x + 2$ 在定义域内；

(5) $y = \dfrac{1}{x}$ 在 $(1, +\infty)$ 内；

(6) $y = x + \ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 内.

2. 判断下列函数是否有界：

(1) $f(x) = \dfrac{2}{1+x^2}$；

(2) $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

3. 下列函数哪些是奇函数，哪些是偶函数，哪些是非奇非偶函数？

(1) $f(x) = \dfrac{2^x - 2^{-x}}{2}$；

(2) $f(x) = \dfrac{3^x + 3^{-x}}{2}$；

(3) $f(x) = x^3 + 1$；

(4) $f(x) = \lg(x + \sqrt{x^2+1})$；

(5) $f(x) = 2x^4 + x - 1$；

(6) $f(x) = \sin x - \cos x + 1$.

4. 下列各函数中哪些是周期函数？对于周期函数，指出其周期.

(1) $y = \cos(x-3)$；

(2) $y = \cos 4x$；

(3) $y = 1 + \sin \pi x$；

(4) $y = x\cos x + 2$.

5. 设函数 $f(x)$ 在数集 X 上有意义，试证：函数 $f(x)$ 在 X 上有界的充分必要条件是它在 X 上既有上界又有下界.

第三节　反函数与复合函数

为了进一步研究函数的概念，以方便今后研究函数的性态，本节介绍反函数和复合函数的概念.

一、反函数

在函数定义中，规定了对于每一个 x，都有唯一的 y 与之对应，这样定义的函数又叫做单值函数，如果有两个或更多的数值 y 与之对应，就称 y 是 x 的多值函数. 本书主要讨论单值函数.

在函数中，自变量与因变量的地位是相对的，任意一个变量都可根据需要作为自变量. 例如，在函数 $y = x+5$ 中，x 是自变量，y 是因变量，根据这个式子，可以解出 $x = y-5$，这里 y 是自变量，x 是因变量. 上面两个式子反映了同一个过程中两个变量之间地位的相对性，称它们互为反函数.

下面给出反函数的具体定义：

定义 1　设函数 $y = f(x)$，其定义域为 D，值域为 M，如果对于任意 $y \in M$，由函数关系式 $y = f(x)$ 恰好**唯一**确定出一个 $x \in D$ 与之对应，那么认为 x 是 y 的函数，记作 $x = g(y)$，我们称上述的 $y = f(x)$ 与 $x = g(y)$ 互为**反函数**，习惯上将 $x = g(y)$ 记作

$$x = f^{-1}(y)$$

习惯上常用 x 表示自变量，y 表示因变量，故常把 $y = f(x)$ 的反函数写作

$$y = f^{-1}(x)$$

由反函数的定义知，在定义区间上**单调**的函数必有反函数.

例 1 函数 $y=\sin x, x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，则 $x=f^{-1}(y)=\arcsin y, y\in[-1,1]$，故 $y=\sin x, x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 的反函数是 $y=\arcsin x, x\in[-1,1]$.

若把函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形画在同一平面直角坐标系内，那么这两个图形关于 $y=x$ 对称.

例 2 函数 $y=x^3$ 和函数 $y=x^{\frac{1}{3}}$ 的图形如图 1-19 所示.

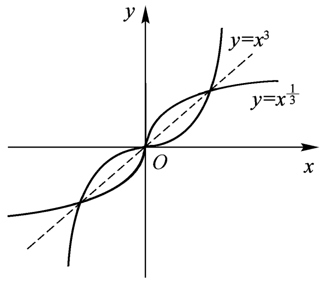


图 1-19

一般地，要求 $y=f(x)$ 的反函数，只需先从 $y=f(x)$ 中解出 x 的表达式，当该表达式也是一个函数时，再将其中的字母 x，y 进行交换即可.

例 3 求函数 $y=\ln(x+\sqrt{x^2-1}), x\in[1,+\infty)$ 的反函数.

解 由 $y=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$，解得

$$e^y=x+\sqrt{x^2-1}$$

及

$$e^{-y}=x-\sqrt{x^2-1}$$

故

$$e^y+e^{-y}=2x$$

于是

$$x=\frac{e^y+e^{-y}}{2}$$

故所求反函数为 $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}, x\geqslant 0$.

判断函数的反函数是否存在，可以用以下定理.

定理 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，值域为 W. 若 $f(x)$ 在 D 上是单调增加或单调减少的，则在 W 上 $f(x)$ 的**反函数** $f^{-1}(x)$ **存在**，且 $f^{-1}(x)$ 在 W 上也是**单调增加**或**单调减少**的.

值得注意的是，由于对于 y 的某些值，满足 $y=f(x)$ 的 x 有时不止一个，所以并非任何函数在其定义域内都存在反函数. 但是，当我们对 x 的取值范围加以限制时，也有可能存在反函数. 例如，函数 $y=x^2$ 在$(-\infty,+\infty)$内不存在反函数，但在$(-\infty,0)$及$[0,+\infty)$内却分别存在反函数 $y=-\sqrt{x}, 0<x<+\infty$ 及 $y=\sqrt{x}, 0\leqslant x<+\infty$.

对于分段函数求其反函数，只需分别求出与各子定义域相对应的函数表达式的反函数及其自变量的取值范围即可.

例 4 设函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{3}, & -2<x<1\\ x^2, & 1\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$，求其反函数 $f^{-1}(x)$.

解 设 $y=f(x)$，则由反函数的定义，得

$$x=\begin{cases}3y, & -2<3y<1\\ \sqrt{y}, & 1\leqslant\sqrt{y}\leqslant 2\end{cases}=\begin{cases}3y, & -\frac{2}{3}<y<\frac{1}{3}\\ \sqrt{y}, & 1\leqslant y\leqslant 4\end{cases}$$

将 x,y 互换，得所求反函数为

$$f^{-1}(x)=y=\begin{cases}3x, & -\frac{2}{3}<x<\frac{1}{3}\\ \sqrt{x}, & 1\leqslant x\leqslant 4\end{cases}$$

思考　函数 $y=x^2, x\in(-\infty,+\infty)$ 有反函数吗? $y=x^2, x\in(-\infty,0]$ 有反函数吗? 为什么?

二、复合函数

在很多实际问题中，两个变量的联系有时不是直接的. 例如，在函数 $y=\tan 3x$ 中，这个函数值不是由自变量 x 来确定的，而是通过 $3x$ 来确定的. 如果用 u 表示 $3x$，那么函数 $y=\tan 3x$ 就可表示成 $y=\tan u, u=3x$. 这说明了 y 与 x 的函数关系是通过变量 u 来确定的.

具有上述关系的函数，可以给出下面的定义：

定义 2　如果 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，就称 y 是 x 的**复合函数**，记作

$$y=f[\varphi(x)]$$

其中 u 称为**中间变量**.

函数的复合中要注意的是，函数 $u=\varphi(x)$ 的值域应该在函数 $y=f(u)$ 的定义域内，这样函数才能复合，否则复合就没有意义.

例 5　$y=e^{\cos x}$ 是由 $y=e^u$ 和 $u=\cos x$ 复合而成，$y=(1+\lg x)^3$ 是由 $y=u^3$ 和 $u=1+\lg x$ 复合而成的，但函数 $y=\arcsin u$ 和 $u=3+x^2$ 不能构成复合函数，因为对于任意的 x，$u=3+x^2$ 的值不在函数 $y=\arcsin u$ 的定义域 $[-1,1]$ 内，从而复合出的函数 $y=\arcsin(3+x^2)$ 是没有意义的.

函数的复合也可以是多个函数的情形. 例如，$y=\lg u, u=v^2, v=x+1$，则复合函数是 $y=\lg(x+1)^2$，其中 u,v 是中间变量.

利用复合函数的概念，可以把一个较复杂的函数分解成若干个简单函数. 下面举例分析复合函数的复合过程，正确熟练地掌握这个方法，将会给以后的学习带来很多方便.

例 6　写出下列复合函数的复合过程.

(1) $y=a^{a^x}$；　　(2) $y=\cos^2 x^2$；

(3) $y=\ln\sqrt[5]{\dfrac{e^{2x}}{e^{2x}-1}}$；　　(4) $y=\lg(3+\sqrt{x^3-1})$.

解　(1) $y=a^u, u=a^x$；

(2) $y=u^2, u=\cos w, w=x^2$；

(3) $y=\ln u, u=\sqrt[5]{v}, v=\dfrac{w}{w-1}, w=e^t, t=2x$；

(4) $y=\lg u, u=3+w, w=\sqrt{v}, v=t-1, t=x^3$.

例 7　设函数 $f(x)=\begin{cases} x, & x>1 \\ \dfrac{1}{x}, & 0<x\leqslant 1 \end{cases}$，$g(x)=e^x$，求复合函数 $f[g(x)]$ 与 $g[f(x)]$.

解　因为 $f(x), g(x)$ 符合复合条件，所以

$$f[g(x)]=\begin{cases} e^x, & x>0 \\ e^{-x}, & x\leqslant 0 \end{cases}$$

$$g[f(x)]=\begin{cases} e^x, & x>1 \\ e^{\frac{1}{x}}, & 0<x\leqslant 1 \end{cases}$$

值得注意的是，求分段函数的复合函数时，特别要注意不同范围内的自变量、中间变量及函数之间的依赖关系.

思考 两个函数能够复合的前提条件是什么？

习题 1－3

1. 求下列函数的反函数：

(1) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$；　　(2) $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}\quad(ad-bc\neq 0)$；

(3) $y=1+\ln(x+2)$.

2. 下列函数是由哪些简单函数复合而成的：

(1) $y=\sqrt{1-\sin x}$；　　(2) $y=\sin x^2$；　　(3) $y=\mathrm{e}^{\cos^2 x}$；

(4) $y=(1+\lg x)^3$；　　(5) $y=\sin(2+\ln x)$；　　(6) $y=\dfrac{\tan^2 x}{2}$.

3. 设 $f(x+1)=x^2-3x+2$，求 $f(x)$ 及 $f(\sin x)$.

4. 设 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$，求 $f[f(x)]$.

5. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1\\ 0, & |x|=1,\\ -1, & |x|>1\end{cases}$ $g(x)=\mathrm{e}^x$，求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$，并作出这两个函数的图像.

第四节　初等函数

在初等数学中已经学习过下面几类函数：

(1) 幂函数：$y=x^{\alpha}$（$\alpha\in\mathbf{R}$ 是常数）；

(2) 指数函数：$y=a^x$（$a>0$，且 $a\neq 1$）；

(3) 对数函数：$y=\log_a x$（$a>0$，且 $a\neq 1$）；

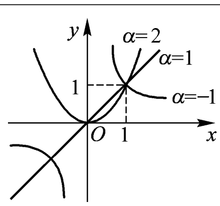
(4) 三角函数：$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$ 等；

(5) 反三角函数：$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$ 等.

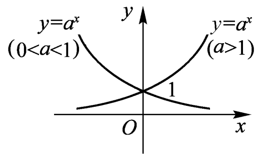
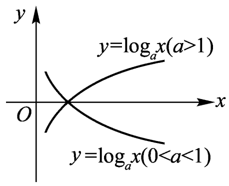
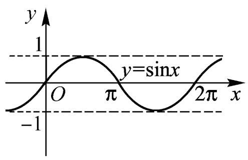
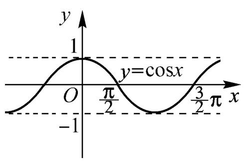
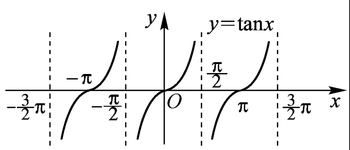
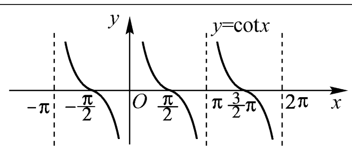
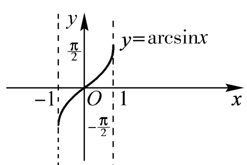
以上五类函数统称为基本初等函数.

为了今后学习和查阅方便，现将一些常用的基本初等函数的定义域、值域、图形和特性列于表 1－1 中.

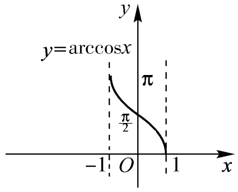
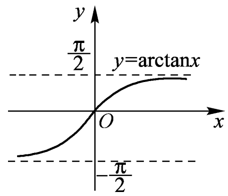
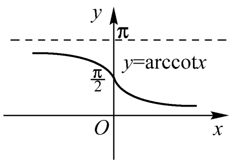
表　1－1

函数	图像	定义域和值域	主要性质
幂函数 $y=x^{\alpha}$（α 为实常数）		定义域：随 α 的不同而不同，但不论 α 取何值，x^{α} 在 $(0,+\infty)$ 内总有定义； 值域：随 α 不同而不同	若 $\alpha>0$，x^{α} 在 $[0,+\infty)$ 内单调增加； 若 $\alpha<0$，x^{α} 在 $(0,+\infty)$ 内单调减少

续 表

函数	图像	定义域和值域	主要性质
指数函数 $y=a^x$ $(a>0$ 且 $a\neq 1)$		$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$	$a^0=1$；若 $a>1$，a^x 单调增加；若 $0<a<1$，a^x 单调减少；直线 $y=0$ 为函数图像的水平渐近线
对数函数 $y=\log_a x$ $(a>0$ 且 $a\neq 1)$		$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$	$\log_a 1=0$；若 $a>1$，$\log_a x$ 单调增加；若 $0<a<1$，$\log_a x$ 单调减少；直线 $x=0$ 为函数图像的垂直渐近线
正弦函数 $y=\sin x$		$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$	以 2π 为周期的函数；在 $\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调增加；在 $\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3}{2}\pi\right]$ 上单调减少，其中 $k\in\mathbf{Z}$；奇函数
余弦函数 $y=\cos x$		$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$	以 2π 为周期的函数，在 $[(2k-1)\pi,2k\pi]$ 上单调增加，在 $[2k\pi,(2k+1)\pi]$ 上单调减少，其中 $k\in\mathbf{Z}$；偶函数
正切函数 $y=\tan x$		$x\neq(2n+1)\frac{\pi}{2}$ $(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ $y\in(-\infty,+\infty)$	以 π 为周期函数，在 $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right)(k\in\mathbf{Z})$ 内单调增加；奇函数；直线 $x=(2n+1)\frac{\pi}{2}$ 为函数图像的垂直渐进线 $(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$
余切函数 $y=\cot x$		$x\neq n\pi$ $(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ $y\in(-\infty,+\infty)$	以 π 为周期的函数，在 $(k\pi,(k+1)\pi)k\in\mathbf{Z}$ 内单调减少，奇函数；直线 $x=n\pi$ 为函数图像的垂直渐近线 $(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$
反正弦函数 $y=\arcsin x$		$x\in[-1,1]$ $y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$	单调增加，奇函数

续表

函数	图像	定义域和值域	主要性质
反余弦函数 $y=\arccos x$		$x\in[-1,1]$ $y\in[0,\pi]$	单调减少,非奇非偶函数
反正切函数 $y=\arctan x$		$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$	单调增加;直线 $y=-\dfrac{\pi}{2}$ 与 $y=\dfrac{\pi}{2}$ 为函数图像的水平渐近线;奇函数
反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$		$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,\pi)$	单调减少;直线 $y=0$ 及 $y=\pi$ 为函数图像的水平渐近线;非奇非偶函数

由常数和基本初等函数经过有限次四则运算及有限次复合步骤得到的用一个解析式子表示的函数,称为初等函数.

例如,$y=\sin^3(2x+1)$,$y=5\log_2(x^2+4x+7)$,$y=\arcsin a^{\frac{x}{3}}+x\sqrt[3]{3x+2}$ 等都是初等函数. 而分段函数

$$f(x)=\begin{cases}-x+1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -x-1, & x<0\end{cases}$$

是由几个式子表示的函数,因而不是初等函数. 但是,由于分段函数在其子定义域内通常都是初等函数,所以仍可通过初等函数来研究它们.

在工程技术中经常要用到一类初等函数是双曲函数,它们是由指数函数 $y=\mathrm{e}^x$ 与 $y=\mathrm{e}^{-x}$ 生成的初等函数,它们的定义和符号如下:

双曲正弦函数 $\operatorname{sh}x=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$,其图形如图 1-20 所示;

双曲余弦函数 $\operatorname{ch}x=\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$,其图形如图 1-21 所示;

双曲正切函数 $\operatorname{th}x=\dfrac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$,其图形如图 1-22 所示;

双曲余切函数 $\operatorname{cth}x=\dfrac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}x}=\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}$,其图形如图 1-23 所示.

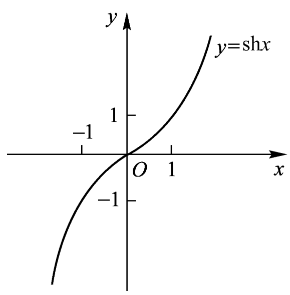


图 1-20

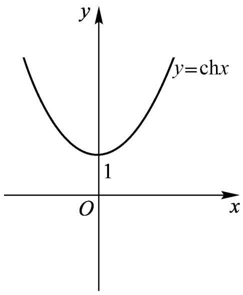


图 1-21

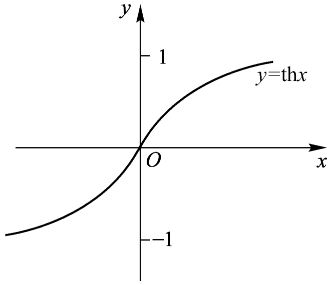


图 1-22

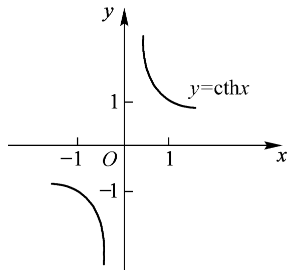


图 1-23

其中 $\mathrm{sh}x$，$\mathrm{th}x$，$\mathrm{cth}x$ 都是奇函数，$\mathrm{ch}x$ 是偶函数.

$\mathrm{sh}x$，$\mathrm{ch}x$，$\mathrm{th}x$ 的反函数称为反双曲函数，分别记作

反双曲正弦 $y=\mathrm{arsh}x$

反双曲余弦 $y=\mathrm{arch}x$

反双曲正切 $y=\mathrm{arth}x$

同样，反双曲函数可以通过自然对数函数来表示，这里不作介绍.

用数学工具解决实际问题时，往往需要建立相应的数学模型，其中一类较简单的问题是建立函数关系. 下面给出两个例子.

例 1 某工厂生产电视机年产量为 x 台，每台售价 1200 元. 当年产量在 500 台以内，可以全部售出. 经广告宣传后又可以再多出售 300 台，每台平均广告费为 40 元，若生产再多，本年就销售不出去了. 试建立本年的销售总收入 y 与年产量 x 的关系.

解 因为总收入 = 产量 × 单价，根据题意可列出函数关系如下：

$$y=\begin{cases}1200x, & 0\leqslant x\leqslant 500\\ 1200\times 500+(1200-40)(x-500), & 500<x\leqslant 800\\ 1200\times 500+1160\times 300, & x>800\end{cases}$$

例 2 某单位要建造一个容积为 V 的长方体水池，它的底为正方形. 如果池底的单位面积造价为侧面积造价的 2 倍，试建立总造价与底面边长之间的函数关系.

解 设底面边长为 x，总造价为 y，侧面积单位造价为 m. 由已知可知水深为 $\dfrac{V}{x^2}$，侧面积为 $4x\cdot\dfrac{V}{x^2}=\dfrac{4V}{x}$，根据题意可得函数关系如下：

$$y=2mx^2+4m\frac{V}{x},\quad 0<x<+\infty$$

思考 分段函数是初等函数吗？函数 $f(x)=1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}+x^n+\cdots$ 是初等函数吗？为什么？

习题 1-4

1. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{x^2-x-6}+\arcsin\dfrac{2x-1}{7}$；

(2) $y=\log_{x+1}(16-x^2)$;
(3) $y=\log_2[\log_3(\log_4 x)]$;
(4) $y=\tan(1+x)$.

2. 设 $f(x)=\arcsin x$，求 $f(0)$，$f(-1)$，$f(\frac{\sqrt{3}}{2})$，$f(-\frac{\sqrt{2}}{2})$，$f(1)$ 的值.

3. 指出下列函数哪些是基本初等函数，哪些是初等函数？

(1) $y=\cos t$;　(2) $y=\cos(2t+\varphi)$;　(3) $y=e^x$;

(4) $y=\tan\frac{1}{x^2+1}$;　(5) $y=\arcsin\sqrt[3]{\frac{x}{x^2+4}}$;　(6) $y=\ln(3+\cos e^{2x})$.

4. 利用基本初等函数的图形，作出下列函数的图形.

(1) $y=\sin 2x+1$;　(2) $y=2e^{x+1}$;

(3) $y=\begin{cases}x^2, & |x|\leqslant 1\\ 1, & |x|>1\end{cases}$;　(4) $y=x|x-1|$.

5. 已知 $f^{-1}(\log_a x)=x^2+1$，求 $f(x)$.

6. 工程上为将圆周运动转化为往复直线运动（或相反），广泛采用曲柄连杆机构（见图 1-24），设曲柄 $AO=r$，连杆 $AB=l$，若曲柄 AO 以等角速度 ω 逆时针旋转，求滑块 B 的运动规律 $x(t)$.

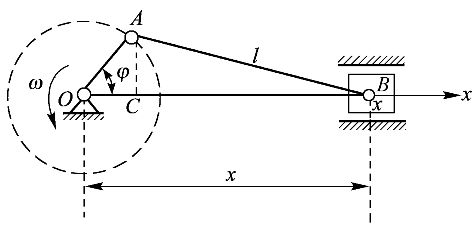


图　1-24

提示：过点 A 作 $AC\perp OB$，$x=OC+CB$，OC，CB 可分别在直角三角形 ACO，ACB 中确定，再将 $\varphi=\omega t$ 代入.

7. 有一块边长为 l(cm) 的正方形铁皮，它的四角剪去四块边长都是 x 的小正方形，形成一只没有盖的容器，求这容器的容积 V 与高 x 的函数关系.

复习题一

1. 设 $f(x)=\begin{cases}2^x, & -1<x<0\\ 2, & 0\leqslant x<1\\ x-1, & 1\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$，求 $f(2)$，$f(\frac{1}{2})$，$f(-\frac{1}{2})$.

2. 下列函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是否相同？

(1) $f(x)=\frac{x-1}{x^2-1}$，　$g(x)=\frac{1}{x+1}$;

(2) $f(x)=\sqrt{(1-x)^2}$，　$g(x)=1-x$;

(3) $f(x)=x$，　$g(x)=\ln e^x$.

3. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$；　　　(2) $y=\ln(x^2-1)+\arcsin\dfrac{1}{x+1}$.

4. 对于下列函数 $f(x)$ 与 $g(x)$，求复合函数 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$，并确定它们的定义域.

(1) $f(x)=\sqrt{x+1}$，　$g(x)=x^4$；

(2) $f(x)=\sqrt{1-x}$，　$g(x)=\sqrt{x-1}$.

5. 求下列函数的反函数：

(1) $y=1+\log_4 x$；　　　(2) $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$.

6. 已知 $f(x-1)=x^2+x+1$，求 $f(\dfrac{1}{x-1})$.

7. 设 $f(x)$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$ 且对于任意 x,y 都有

$$f(x+y)+f(x-y)=f(x)f(y)$$

且 $x\neq 0$ 时 $f(x)\neq 0$. 证明 $f(x)$ 为偶函数.

8. 某单位有汽车一辆，一年中的税款、保险费及司机工资等支出共 a，另外，行驶单位路程需油费 b，试写出一年中平均每公里费用 y 与行驶路程 x 的函数关系式.

9. 一物体由静止开始做直线运动，前 10 s 内做匀加速运动，加速度为 2 cm/s^2，10 s 后做匀速运动，运动开始时路程为零. 试建立路程 s 与时间 t 之间的函数关系.