凤凰传媒
PHOENIX MEDIA

经济数学（第四版）

JINGJI SHUXUE

登录凤凰职教云平台，学习更多知识
www.fhmooc.com

责任编辑　汪立亮
装帧设计　汤　欣

ISBN 978-7-5743-0698-1
9 787574 306981 >
定价：62.80元(共2册)

经济数学（第四版）

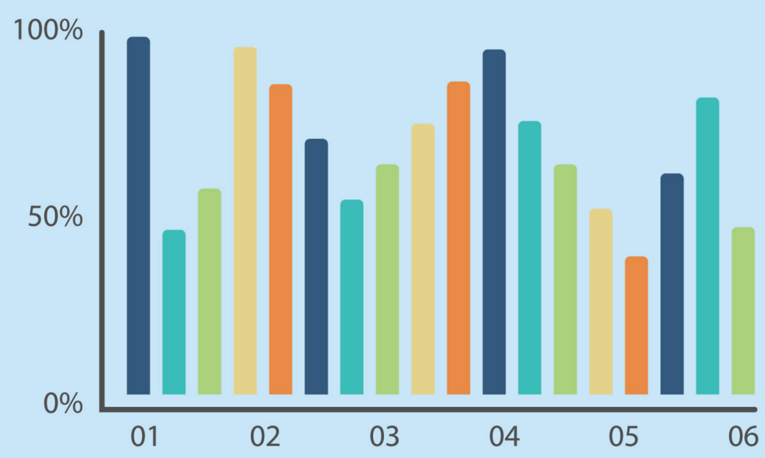
江苏凤凰教育出版社　凤凰职教

“十三五”江苏省高等学校重点教材
江苏省“十四五”首批职业教育规划教材

经济数学（第四版）

JINGJI SHUXUE

主　编　陆　峰
主　审　骈俊生



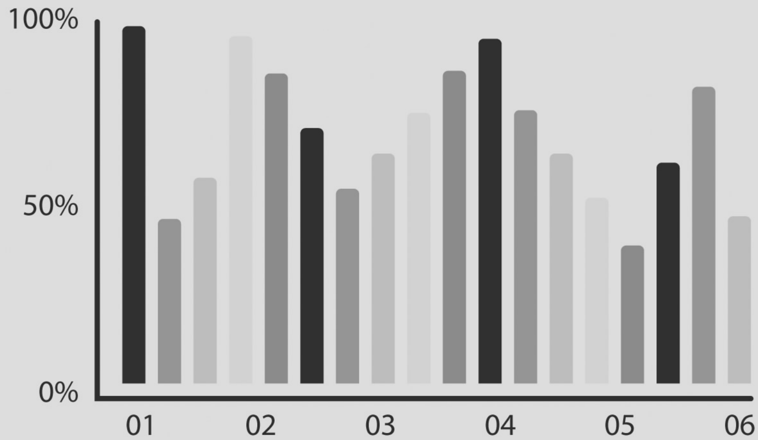
江苏凤凰教育出版社　凤凰职教

"十三五"江苏省高等学校重点教材
江苏省"十四五"首批职业教育规划教材

经济数学（第四版）

JINGJI SHUXUE

主　编　陆　峰
主　审　骈俊生



江苏凤凰教育出版社　凤凰职教

图书在版编目(CIP)数据

经济数学 / 陆峰主编. -- 4 版. -- 南京 ：江苏凤凰教育出版社，2023.6(2023.7 重印)

ISBN 978-7-5743-0698-1

Ⅰ. ①经… Ⅱ. ①陆… Ⅲ. ①经济数学—高等职业教育—教材 Ⅳ. ①F224.0

中国国家版本馆 CIP 数据核字(2023)第 085861 号

书　　名	经济数学(第四版)
主　　编	陆　峰
责任编辑	汪立亮
出版发行	江苏凤凰教育出版社
地　　址	南京市湖南路 1 号 A 楼，邮编：210009
出　　品	江苏凤凰职业教育图书有限公司
网　　址	http://www.fhmooc.com
照　　排	江苏凤凰制版有限公司
印　　刷	三河市骏杰印刷有限公司
厂　　址	河北省廊坊市三河市杨庄镇付辛庄村，邮编：065200
电　　话	0316-3662258
开　　本	787 毫米×1 092 毫米　1/16
印　　张	29(含《经济数学案例与练习》)
版次印次	2023 年 6 月第 4 版　2023 年 7 月第 2 次印刷
标准书号	ISBN 978-7-5743-0698-1
定　　价	62.80 元(共 2 册)
批发电话	025-83677909
盗版举报	025-83658893

如发现质量问题，请联系我们。

【内容质量】电话：025-83658873　邮箱：sunyi@ppm.cn

【印装质量】电话：025-83677905

前　　言

（第四版）

为了实现“统筹职业教育、高等教育、继续教育协同创新，推进职普融通、产教融合、科教融汇，优化职业教育类型定位。”这一新部署新要求，开拓职业教育、高等教育、继续教育可持续发展新局面，适应高职教育的发展的需要，满足高职教育应用型人才培养目标的要求需求，进一步提高加强教学质量的基础性建设，推动加快教学资源的现代化进程，我们针对高职教育经管类专业的特点，结合编者多年的教学实践，我们编写了本书。在编写过程中，我们遵循“数学为基，经管为用”的原则。本书具有如下特点：

1. 注重数学思想方法的作用。教材以数学史、数学问题、数学知识等为载体，介绍数学思想、数学方法、数学精神；着眼于提高学生的数学素质，培养学生的睿智、细致、创新的品格。

2. 淡化理论性和系统性。讲解基本概念、基本原理和基本解题技能时，做到由易到难、循序渐进和通俗易懂；多用图形、图表表达信息，多用有实际应用价值的案例、示例促进对概念、方法的理解；对基础理论不做论证，只给出解释或简单的几何说明。

3. 与专业结合，突出实际应用。教材体系突出与各经济管理类专业紧密结合，体现数学知识专业化，经济管理问题数学化，尽可能反应用数学知识解释经济和管理中的现象，并用数学方法解决实际的问题。实现“教、学、做”一体的教学改革精神。

4. 案例驱动，问题导向。采用“案例驱动”的方式，由实际问题引出数学知识，再将数学知识应用于处理和解决生活和经济管理中的实际问题。体现了数学知识来源于实际问题，反过来又应用于实际问题。

5. 注重数学建模思想、方法的渗透。通过应用实例介绍数学建模过程，从而引入数学模型的概念。在每章的最后一节设计了数学实验，以培养学生运用计算机及相应的数学软件求解数学模型的能力。

6. 设计若干模块，面向专业需求。本书共设计了经济管理函数、极限与连续、一元函数微分学及经济管理应用、一元函数积分学及经济管理应用、多元函数微分学及经济管理应用、线性代数初步、概率论初步和数理统计初步七个模块。在每一节前增加了学

习目标，每一节后配备了类型合理、深度和广度适中的习题。每一章后增加了小结与复习的内容，帮助学生总结重要的知识点。另还编写了专门与本书配备的案例与习题练习册，方便学生在做课堂练习时使用。

教材体现了数学的应用价值和文化价值，扭住思想政治工作体系建设这一主线，突出以德育德这一关键，引导学生树立共产主义远大理想和中国特色社会主义共同理想，增强学生的中国特色社会主义道路自信、理论自信、制度自信、文化自信，使学生立志肩负起民族复兴的时代重任。教材在增强学生综合素质上下功夫，培养学生的战略思维、历史思维、辩证思维和创新思维，提高学生文化素质、道德素养、职业素养及可持续发展学习和适应能力，为培养高技能人才服务。

本教材由江苏城市职业学院陆峰主编，参与加本书编写的有陆峰（第一章、第五章）、杨军（第二章）、徐薇（第三章）、俞金元（第四章）、盛秀兰（第六章、第七章）等老师。全书由陆峰修改、统稿、定稿。本书的出版得到江苏城市职业学院公共基础课部、教务处以及凤凰出版传媒集团的大力支持，在此谨表示衷心感谢。

限于编者水平，加上时间仓促，书中难免有不当之处，敬请广大师生和读者批评指正。

编　者

2023 年 5 月

目　录

第一章

函数、极限与连续

经济数学，是经济学与数学相互交叉的一个新的跨学科的领域. 本章将介绍函数、极限和函数连续性等基本概念以及它们的一些性质，这些内容都是学习本课程必需的基本知识.

第一节　函数的概念及初等函数

函数的概念
及初等函数

学习目标

1. 理解函数的概念，了解分段函数. 能熟练地求函数的定义域和对应法则.
2. 了解函数的主要性质(单调性、奇偶性、周期性和有界性).
3. 熟练掌握基本初等函数的解析表达式、定义域、主要性质和图形.
4. 理解复合函数、初等函数的概念.

现实世界中，存在着各种各样不停变化着的量，它们之间相互依存，相互联系. 例如，某商品的市场需求量是受该商品的价格影响的，它随价格的变动而变化. 反之，该商品的价格也会受市场需求量的影响. 函数就是对各种变量之间的相互依存关系的一种抽象. 微积分学的研究对象是函数. 函数概念是数学中的一个基本而重要的概念.

一、函数

1. 函数的概念

在考察某些自然现象或社会现象时，往往会遇到几个变量. 这些变量并不是孤立的，而是存在着某种相互依赖关系，如下面这些例子.

【案例 1.1】 **(需求与价格)**某种商品的市场需求量 q 与该商品的价格 p 满足关系式

$$q = 60 - 3p.$$

通过这个关系式，根据不同的价格 p，可以知道该商品的市场需求量 q，上式确定了这两个变量之间的对应关系.

【案例 1.2】 **(人民币整存整取定期存款利率)**我国 2011 年 7 月 7 日实行的人民币整存整取定期储蓄存期与年利率如下表 1.1：

表 1.1

存期	三个月	半年	一年	二年	三年	五年
年利率(%)	3.10	3.30	3.50	4.40	5.00	5.50

这张表格确定了存期与年利率这两个变量之间的对应关系.根据不同的存期可以知道整存整取定期储蓄的年利率.

【案例 1.3】 (**股票曲线**)股票在某天的价格和成交量随时间的变化常用图形表示,图 1.1 为某一股票在某天的走势图.

从股票曲线,我们可以看出这只股票当天的价格和成交量随时间的波动情况.

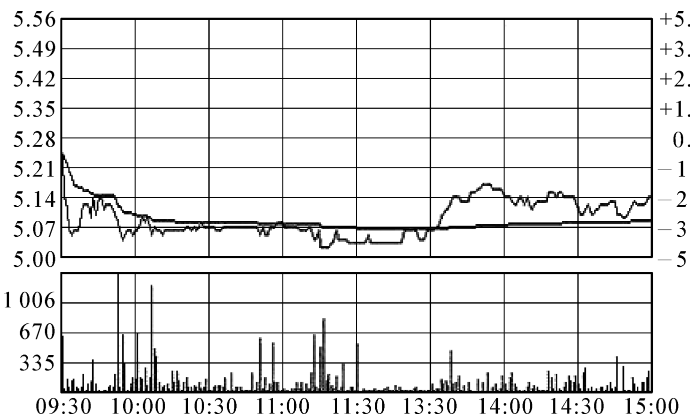


图 1.1

定义 1.1 设 x 和 y 是两个变量,D 是一个给定的数集.如果对于每一个数$x\in D$,变量 y 按照一定的法则总有确定的数值与之对应,则称 y 是 x 的**函数**,记作$y=f(x)$,其中 x 为**自变量**,y 为**因变量**,数集 D 称为函数 $f(x)$的**定义域**.当 x 取遍 D 内的各个数值时,对应的函数值的全体组成的数集称为函数 $f(x)$的**值域**.

如果自变量在定义域内任取一个数值,对应的函数值只有唯一的一个,称这种函数为**单值函数**;否则,如果有多个函数值与之对应,就称为**多值函数**.没有特别说明时,本书讨论的函数都是指单值函数.

从函数定义我们可以看出构成函数的两要素是定义域和对应法则.如果两个函数的定义域相同,对应法则也相同,那么这两个函数就是相同的,否则就是不同的.

【例 1.1】 设 $f(x)=2x^2-3$,求 $f(-1)$, $f(x_0)$.

解 $f(-1)=2\times(-1)^2-3=-1$,

$f(x_0)=2(x_0)^2-3=2x_0^2-3$.

【例 1.2】 求函数 $f(x)=\dfrac{1}{\ln(x+2)}+\sqrt{4-x^2}$ 的定义域.

解 函数的定义域是满足不等式组

$\begin{cases}x+2>0,\\x+2\neq1,\\4-x^2\geqslant0\end{cases}$ 的 x 值的全体.解此不等式组,得其定义域为:

$$D=\{x\mid -2<x\leqslant 2,\text{且 } x\neq -1\},\text{或 } D=(-2,-1)\cup(-1,2].$$

2. 函数的表示法

表示函数的主要方法有三种：解析法（公式法）、表格法和图形法.

（1）解析法

用数学式子表示函数的方法叫作**解析法**. 如 $y=f(x)$，其中 y 是因变量，f 为对应法则，x 是自变量. 其优点是便于数学上的分析和计算，本书主要讨论用解析式表示的函数，如案例 1.1 某种商品的市场需求量与该商品价格的关系式.

（2）表格法

用表格形式表示函数的方法叫作**表格法**. 它是将自变量所取的值和对应的函数值列成表格，其优点是直观、精确. 如案例 1.2 人民币整存整取定期储蓄存期与年利率的关系.

（3）图形法

用图形表示函数的方法叫作**图形法**. 其优点是直观形象，且可看到函数的变化趋势. 如案例 1.3 某一股票在某天的走势图.

3. 函数的几种特性

（1）函数的有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $X\subset D$. 如果存在数 K_1，使对任一 $x\in X$，有 $f(x)\leqslant K_1$，则称函数 $f(x)$ 在 X 上**有上界**，而称 K_1 为函数 $f(x)$ 在 X 上的一个**上界**. 图形特点是 $y=f(x)$ 的图形在直线 $y=K_1$ 的下方.

如果存在数 K_2，使对任一 $x\in X$，有 $f(x)\geqslant K_2$，则称函数 $f(x)$ 在 X 上**有下界**，而称 K_2 为函数 $f(x)$ 在 X 上的一个**下界**. 图形特点是，函数 $y=f(x)$ 的图形在直线 $y=K_2$ 的上方.

如果存在正数 M，使对任一 $x\in X$，有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 X 上**有界**. 图形特点是，函数 $y=f(x)$ 的图形在直线 $y=-M$ 和 $y=M$ 的之间.

如果这样的 M 不存在，则称函数 $f(x)$ 在 X 上**无界**. 函数 $f(x)$ 无界，就是说对任何 M，总存在 $x_1\in X$，使 $|f(x)|>M$.

例如：

① $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是有界的，即 $|\sin x|\leqslant 1$.

② 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在开区间 $(0, 1)$ 内是无上界的. 或者说它在开区间 $(0, 1)$ 内有下界，无上界，而在开区间 $(1, 2)$ 内是有界的.

（2）函数的单调性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$. 如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)<f(x_2)\,(\text{或 } f(x_1)>f(x_2)),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调增加**（或**单调减少**）的.

单调增加和单调减少的函数统称为**单调函数**.

例如：函数 $y=x^2$ 在区间 $(-\infty, 0]$ 上是单调减少的，在区间 $[0, +\infty)$ 上是单调增加的，在 $(-\infty, +\infty)$ 上不是单调的.

（3）函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称（即若 $x\in D$，则 $-x\in D$）.

如果对于任一 $x\in D$，有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为**偶函数**.

如果对于任一 $x\in D$，有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为**奇函数**.

偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于原点对称.

例如：$y=x^2$，$y=\cos x$ 都是偶函数. $y=x^3$，$y=\sin x$ 都是奇函数，$y=\sin x+\cos x$ 是非奇非

偶函数.

(4) 函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D. 如果存在一个正数 l,使得对于任一 $x\in D$ 有 $(x\pm l)\in D$,且 $f(x\pm l)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为**周期函数**,l 称为 $f(x)$ 的**周期**(一般指**最小正周期**).

周期函数的图形特点是:在函数的定义域内,每个长度为 l 的相邻区间上,函数的图形相同.

4. 分段函数

【案例 1.4】 (**国内寄信函的收费标准**)表 1.2 为国内寄信函的收费标准.

表 1.2

重量	定价	重量	定价
20 g 及 20 g 以下	0.80 元	60 g 以上至 80 g	3.40 元
20 g 以上至 40 g	1.60 元	80 g 以上至 100 g	4 元
40 g 以上至 60 g	2.40 元		

试求邮资与信函的函数关系式.

解 信函在 5 个不同的质量范围时,其收费标准各不相同,设信函质量为 x,邮资为 $f(x)$,则函数关系可表示式为:

$$f(x)=\begin{cases}0.8, & x\leqslant 20,\\ 1.6, & 20<x\leqslant 40,\\ 2.4, & 40<x\leqslant 60,\\ 3.4, & 60<x\leqslant 80,\\ 4, & 80<x\leqslant 100.\end{cases}$$

其定义域为 $x\in(0,100]$.

上述函数的特点是其由多个表达式构成,在工程实践及日常生活中常常会遇到此类函数. 在不同的定义域上用不同的函数表达式表示的函数称为**分段函数**.

下面介绍几种特殊的分段函数:

(1) 符号函数(如图 1.2)

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0.\end{cases}$$

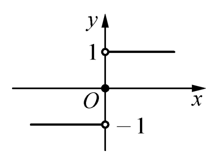


图 1.2

(2) 取整函数(如图 1.3)

设 x 为任意实数,称不超过 x 的最大整数为取整函数,记为 $y=[x]$,即若 $n\leqslant x\leqslant n+1$,则 $[x]=n$,其中 n 为整数,因此其数学表达式为:

$$y=\begin{cases}\cdots, & \cdots,\\ -2, & -2\leqslant x<-1,\\ -1, & -1\leqslant x<0,\\ 0, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & 1\leqslant x<2,\\ 2, & 2\leqslant x<3,\\ \cdots, & \cdots.\end{cases}$$

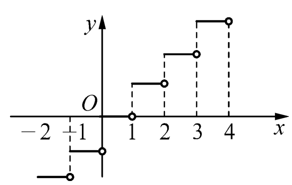


图 1.3

(3) 特征函数

$$y=\chi_A=\begin{cases}1, & x\in A,\\ 0, & x\notin A.\end{cases}$$

其中 A 是数集，此函数常用于计数统计.

注意：分段函数是一个整体，不是几个函数，分段函数的图形应分段作出，求函数值 $f(x_0)$ 要先判断 x_0 所在的范围，再用对应的法则求函数值.

【例 1.3】 一旅馆有 200 间房间，如果定价不超过 100 元/间，则可全部出租. 若每间定价每高出 10 元，则会少出租 4 间. 设每间房出租后的服务成本费为 20 元，试建立旅馆一天的利润与房价间的函数关系.

解 设旅馆的房价为 x 元/间，旅馆一天的利润为 y 元.

若 $x\leqslant 100$，则旅馆出租 200 间，利润为

$$y=200(x-20).$$

若 $x>100$，则旅馆少出租 $4(x-100)/10$ 间，出租了 $200-4(x-100)/10$ 间，利润为

$$y=[200-4(x-100)/10](x-20).$$

综上分析，旅馆利润与房价之间的函数为：

$$y=\begin{cases}200(x-20), & x\leqslant 100,\\ [200-4(x-100)/10](x-20), & x>100.\end{cases}$$

5. 反函数与复合函数

【案例 1.5】 **(商品销售)** 在商品销售中，已知某种商品的价格(即单价)为 m，如果要想用该商品的销售量 x 来计算该商品销售总收入 y，那么 x 是自变量，y 是因变量，其函数关系为：

$$y=mx.$$

反过来，如果想以这种商品的销售总收入来计算其销售量，就必须把 y 作为自变量，把 x 作为因变量，并由函数 $y=mx$ 解出 x 关于 y 的函数关系

$$x=\frac{y}{m},$$

这时称 $x=\dfrac{y}{m}$ 为 $y=mx$ 的反函数，$y=mx$ 为直接函数.

定义 1.2 设 $y=f(x)$ 在 D 上是一一对应的，值域为 $f(D)$，对任意的 $y\in f(D)$，有唯一的 $x\in D$，使得 $f(x)=y$，若把 y 看作自变量，x 视为因变量，所得到的一个新的函数，称为直接函数 $y=f(x)$ 的**反函数**，记为 $x=f^{-1}(y)$.

通常把 $y=f(x)$, $x\in D$ 的反函数记成 $y=f^{-1}(x)$, $x\in f(D)$.

例如，函数 $y=-\sqrt{x-1}\,(x\geqslant 1)$ 的反函数是 $x=y^2+1\,(y\leqslant 0)$，习惯上改写为 $y=x^2+1\,(x\leqslant 0)$.

相对于反函数 $y=f^{-1}(x)$ 来说，原来的函数 $y=f(x)$ 称为**直接函数**. 把函数 $y=f(x)$ 和它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形画在同一坐标平面上，这两个图形关于直线 $y=x$ 是对称的(如图 1.4). 这是因为如果 $P(a,b)$ 是 $y=f(x)$ 图形上的点，则有 $b=f(a)$. 按反函数的定义，有 $a=f^{-1}(b)$，故 $Q(b,a)$ 是 $y=f^{-1}(x)$ 图形上的点；反之，若 $Q(b,a)$ 是

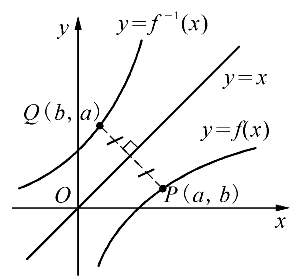


图 1.4

$y=f^{-1}(x)$图形上的点，则$P(a, b)$是 $y=f(x)$图形上的点. 而 $P(a, b)$与 $Q(b, a)$是关于直线 $y=x$ 对称的.（即直线 $y=x$ 是线段 PQ 的垂直平分线）.

定理 1.1 如果直接函数 $y=f(x)$，$x\in D$ 是单调增加（或减少）的，则存在反函数 $y=f^{-1}(x)$，$x\in f(D)$，且该反函数也是单调增加（或减少）的.

定理证明从略.

【案例 1.6】（月产量）一家生产台灯的小企业一年内员工人数和薪酬情况保持稳定，月产量 q（台）是投入资金 m（元）的函数

$$q=\frac{m}{25}-120 \quad (6\,000\leqslant m\leqslant 20\,000),$$

每月投入的资金 m 是月份 t 的函数

$$m=-\frac{500}{3}t^2+2\,000t+3\,000 \quad t\in\{0, 1, 2, \cdots, 12\},$$

那么月产量 q 可以替换成

$$q=\frac{1}{25}\left(-\frac{500}{3}t^2+2\,000t+3\,000\right)-120=-\frac{20}{3}t^2+80t \quad t\in\{0, 1, 2, \cdots, 12\},$$

而表示成时间 t 的函数. 我们说此函数是由 $q=\frac{m}{25}-120$ 和 $m=-\frac{500}{3}t^2+2\,000t+3\,000$构成的一个复合函数.

定义 1.3 设函数 $y=f(u)$的定义域为 D_1，函数 $u=g(x)$在 D 上有定义且$g(D)\subset D_1$，则由下式确定的函数 $y=f[g(x)]$，$x\in D$ 称为由函数$u=g(x)$和函数 $y=f(u)$构成的**复合函数**，它的定义域为 D，变量 u 称为**中间变量**.

函数 g 与函数 f 构成的复合函数通常记为 $f\circ g$，即$(f\circ g)=f[g(x)]$.

与复合映射一样，g 与 f 构成的复合函数 $f\circ g$ 的条件是：函数 g 在 D 上的值域$g(D)$必须含在 f 的定义域D_1内，即 $g(D)\subset D_1$. 否则，不能构成复合函数.

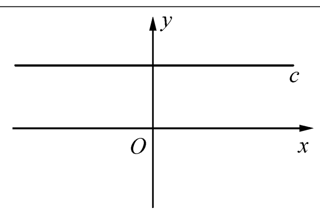
例如，函数 $y=f(u)=\arcsin u$ 的定义域为$[-1, 1]$，函数 $u=g(x)=2\sqrt{1-x^2}$ 在 $D=\left[-1, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right]\cup\left[\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$上有定义，且 $g(D)\subset[-1, 1]$，则函数 g 与 f 可构成复合函数 $y=\arcsin 2\sqrt{1-x^2}$，$x\in D$. 但函数 $y=\arcsin u$ 和函数$u=2+x^2$不能构成复合函数，这是因为对任意的 $x\in\mathrm{R}$，$u=2+x^2$均不在 $y=\arcsin u$ 的定义域$[-1, 1]$内.

二、初等函数

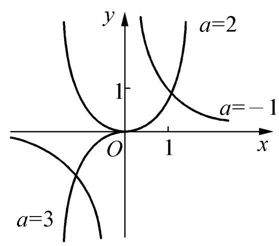
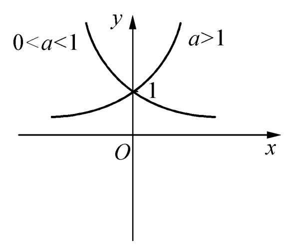
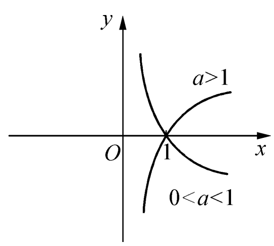
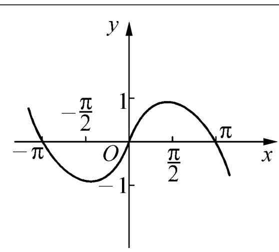
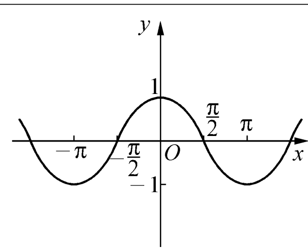
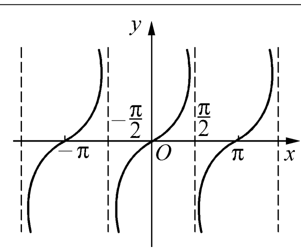
1. 基本初等函数

常值函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数，以上六类函数统称为**基本初等函数**，表 1.3 给出了它们的表达式、定义域、值域、图像和特性.

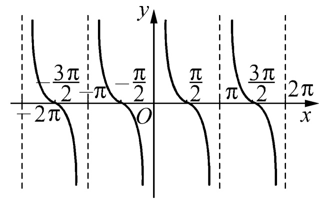
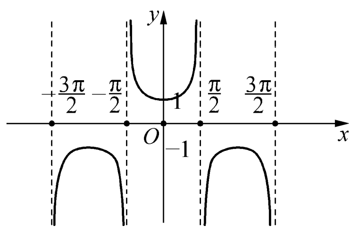
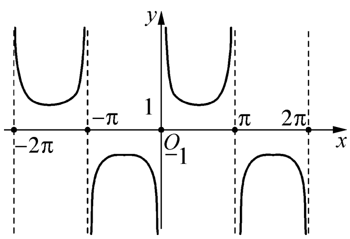
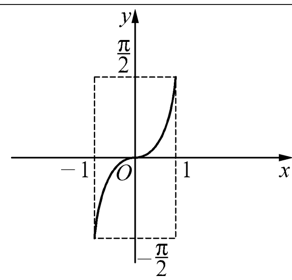
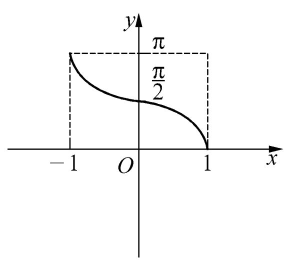
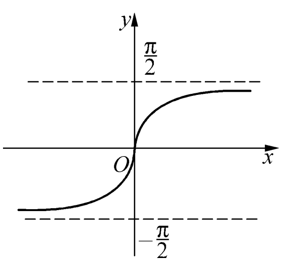
表 1.3

函数	表达式	定义域与值域	图 像	特 性
常值函数	$y=c$	$x\in(-\infty, +\infty)$ $y\in\{c\}$		偶函数

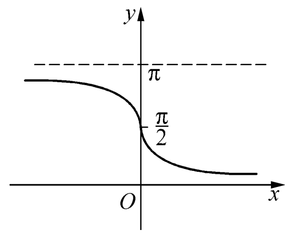
（续表）

函数	表达式	定义域与值域	图　像	特　性
幂函数	$y=x^a$	定义域与值域随 a 的不同而不同		若 $a>0$，在 $[0,+\infty)$ 内单调增加 若 $a<0$，在 $(0,+\infty)$ 内单调减少
指数函数	$y=a^x$ $a>0,a\neq1$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		$a>1$，a^x 单调增加 $0<a<1$，a^x 单调减少
对数函数	$y=\log_a x$ $a>0,a\neq1$	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		$a>1$，$\log_a x$ 单调增加；$0<a<1$，$\log_a x$ 单调减少
正弦函数	$y=\sin x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		奇函数，周期 2π，有界
余弦函数	$y=\cos x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		偶函数，周期 2π，有界
正切函数	$y=\tan x$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，周期 π

（续表）

函数	表达式	定义域与值域	图像	特性
余切函数	$y=\cot x$	$x\neq k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$ $y\in(-\infty,\ +\infty)$		奇函数,周期 π
正割函数	$y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$	$x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,\ -1]\cup[1,\ +\infty)$		偶函数,周期 2π
余割函数	$y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$	$x\neq k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$ $y\in(-\infty,\ -1]\cup[1,\ +\infty)$		奇函数,周期 2π
反正弦函数	$y=\arcsin x$	$x\in[-1,\ 1]$ $y\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right]$		奇函数,单调增加,有界
反余弦函数	$y=\arccos x$	$x\in[-1,\ 1]$ $y\in[0,\ \pi]$		单调减少,有界
反正切函数	$y=\arctan x$	$x\in(-\infty,\ +\infty)$ $y\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$		奇函数,单调增加,有界

（续表）

函数	表达式	定义域与值域	图　像	特　性
反余切函数	$y=\operatorname{arccot} x$	$x\in(-\infty,\ +\infty)$ $y\in(0,\ \pi)$		单调减少，有界

2. 初等函数

由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成，并可用一个式子表示的函数，称为**初等函数**.

例如 $y=\sqrt{1-x^2}$，$y=\sin^2 x$，$y=\sqrt{\cot\dfrac{x}{2}}$ 等都是初等函数. 在本课程中所讨论的函数绝大多数都是初等函数.

三、函数关系式的建立

为解决实际问题，我们常常要把问题量化，找出问题中变量的关系，建立数学模型，即确定目标函数，再利用相关的数学知识解决这些问题.

【例 1.4】 某工厂生产计算机的日生产能力为 0 到 100 台，工厂维持生产的日固定费用为 4 万元，生产一台计算机的直接费用（含材料费和劳务费）是 4 250 元. 试建立该厂日生产 x 台计算机的总费用函数，并指出其定义域.

解 设该厂日生产 x 台计算机的总费用为 y（单位：元），则 y 为日固定费用和生产 x 台计算机所需总费用之和，即

$$y=40\,000+4\,250x,$$

由于该厂每天最多能生产 100 台计算机，所以定义域为 $\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 100\}$.

【例 1.5】 我们知道，当个人的月收入超过一定金额时，应向国家交纳个人所得税，收入越高，国家征收的个人所得税的比例也越高，即“高收入，高税收”. 我国现行的税收制度（见表 1.4）是 2007 年 12 月 29 日通过的《修改〈中华人民共和国个人所得税法〉的决定》，并从 2008 年 3 月 1 日起施行. 规定月收入超过 2 000 元为应纳税所得额（表中仅保留了原表中前 2 级的税率）.

表 1.4

级　数	全月应纳税所得额	税率（%）
1	不超过 500 元部分	5
2	超过 500 元至 2 000 元部分	10

个人所得税一般在工资中直接扣发. 若某单位所有人的月收入都不超过 4 000 元，请建立月收入与纳税金额之间的函数关系.

解 设某人月收入为 x 元，应交纳所得税为 y 元.

当 $0\leqslant x\leqslant 2\,000$ 时，$y=0$；

当 $2\,000<x\leqslant 2\,500$ 时，$y=(x-2\,000)\times 5\%$；

当 $2\,500<x\leqslant 4\,000$ 时，

$$y=(2\,500-2\,000)\times 5\%+(x-2\,500)\times 10\%=25+(x-2\,500)\times 10\%.$$

综上所述，该单位所有人的月收入与纳税金额之间的函数关系为：

$$y=\begin{cases} 0, & 0\leqslant x\leqslant 2\,000, \\ 0.05\times(x-2\,000), & 2\,000<x\leqslant 2\,500, \\ 0.1\times(x-2\,500)+25, & 2\,500<x\leqslant 4\,000. \end{cases}$$

习题 1.1

1. 求下列函数的定义域.

（1）$y=\sqrt{3x-x^2}$　　（2）$y=\dfrac{2x}{x^2-3x+2}$

（3）$y=\lg(5-x)+\arcsin\dfrac{x-1}{6}$　　（4）$y=\begin{cases} -x, & -1\leqslant x\leqslant 0, \\ \sqrt{3-x}, & 0<x<2. \end{cases}$

2. 下列各对函数是否相同，为什么？

（1）$f(x)=\lg x^2$，$g(x)=2\lg x$；　　（2）$f(x)=x$，$g(x)=\sqrt{x^2}$；

（3）$f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$，$g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$；　　（4）$f(x)=\sqrt{1-\cos^2 x}$，$g(x)=\sin x$.

3. 讨论下列函数的奇偶性.

（1）$y=a^x-a^{-x}(a>0)$；　　（2）$y=\lg(x+\sqrt{1+x^2})$；

（3）$y=\sin x-\cos x+1$；　　（4）$y=\dfrac{1}{1+x^2}\cos x$.

4. 求下列函数的反函数.

（1）$y=\sqrt[3]{x+1}$；　　（2）$f(x)=\begin{cases} x-1 & x<0 \\ x^2 & x\geqslant 0 \end{cases}$.

5. 指出下列函数由哪些函数复合而成.

（1）$y=\ln(\tan x)$；　　（2）$y=e^{x^3}$；

（3）$y=\cos(e^{\sqrt{x}})$；　　（4）$y=\sqrt{\ln\sqrt{x}}$；

（5）$y=\tan(x^2+1)$；　　（6）$y=\arctan\dfrac{x-1}{x+1}$.

6. 设 $f(x)=\begin{cases} -(x+1), & x<-1, \\ \sqrt{1+x^2}, & -1\leqslant x<1, \\ 0, & x\geqslant 1, \end{cases}$ 求 $f(-2)$，$f(0)$，$f(a^2+1)$.

7. 设火车从甲站出发，以 $0.5\ \mathrm{km/min^2}$ 的匀加速度前进，经过 2 min 后开始匀速行驶，再经过 7 min 后以 $0.5\ \mathrm{km/min^2}$ 的匀减速到达乙站，试将火车在这段时间内所行驶的路程 S 表示为时间 t 的函数.

8. 某市居民在购房时，面积不超过 $140\ \mathrm{m^2}$ 时，按购房总价的 2%向政府交税；面积超过 $140\ \mathrm{m^2}$ 时，除 $140\ \mathrm{m^2}$ 要执行前述的税收政策外，超过的部分按 4%向政府交税。已知房屋单价是 20 000 元/$\mathrm{m^2}$，求（1）购买 $100\ \mathrm{m^2}$ 的房屋应向政府交多少税？（2）购买 $150\ \mathrm{m^2}$ 的房屋应向政府交多少税？

9. 要设计一个容积为 $V=20\pi(\mathrm{m^3})$ 有盖圆柱形油桶，已知上盖单位面积造价是侧面的一半，而侧面单位面积造价又是底面的一半，设上盖单位面积造价为 a(元/$\mathrm{m^2}$)，试将油桶总造价 p 表示为油桶半径 r 的函数.

10. 设 1—14 岁的儿童的平均身高 y(cm)与年龄 x 成线性函数关系. 已知一岁儿童的平均身高为 85 cm，10 岁儿童的平均身高为 130 cm，写出 y 与 x 的函数关系.

第二节　经济管理中常见的函数

学习目标

1. 了解常用经济函数的概念.
2. 会建立实际问题中的经济函数关系式.

常用的经济函数

在经济贸易和经济建设中,经常遇到函数之间的关系问题,本节重点介绍经济学中常用的一些函数.

一、需求函数与供给函数

1. 需求函数

一种商品的市场需求量与消费群体的人数、收入、习惯及该商品的价格等诸多因素有关,为简化问题的分析,我们只考虑商品价格对需求量的影响,而其他因素暂时保持某种状态不变,需求量 Q 可以看成价格 p 的一元函数,称为**需求函数**,记作

$$Q = Q(p).$$

一般地,价格 p 越高,需求量 Q 要下降;价格 p 越低,需求量 Q 要上升,所以需求函数为价格 p 的单调减少函数.

常见需求函数有以下几种类型:

(1) 线性需求函数 $Q=a-bp$,其中 $b\geqslant 0$, $a\geqslant 0$ 均为常数;

(2) 二次需求函数 $Q=a-bp-cp^2$,其中 $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, $c\geqslant 0$ 均为常数;

(3) 指数需求函数 $Q=a\mathrm{e}^{-bp}$,其中 $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$ 均为常数.

需求函数 $Q=Q(p)$的反函数就是**价格函数**,记作 $P=P(q)$.

2. 供给函数

在市场经济规律作用下,某种商品的市场供给量将依赖于该商品的价格高低,价格上涨将刺激该商品的供给量增多,供给量 S 可以看成是价格 p 的函数,称为**供给函数**,记作

$$S = S(p).$$

一般地,供给函数为价格 p 的单调增加函数. 常见的供给函数也有以下几种类型:

(1) 线性供给函数:$S=-c+dp$,其中 $c>0$, $d>0$ 均为常数,

(2) 指数供给函数:$S=ae^{dp}$,其中 $a>0$, $d>0$ 均为常数.

3. 市场均衡

需求函数与供给函数可以帮助我们分析市场规律,由于需求函数 Q 是单调减少函数,供给函数 S 是单调增加函数,若把需求与供给曲线画在同一坐标系(如图 1.5),它们将相交于一点(p_0, Q_0),这里的 p_0 就是供、需平衡的价格,叫做**均衡价格**,Q_0 就是**均衡数量**,此时我们称之为**市场均衡**.

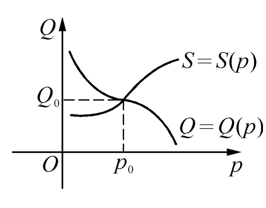


图 1.5

【例 1.6】 电视机厂生产一种型号的电视机,当价格为每台 1 600 元时,需求量为 6 000 台,价格每降低 10 元,则可多卖出 100 台,求需求量 Q 与价格 p 之间的线性函

数关系.

解 设需求函数为 $Q=a-bp$,由题意可得

$$\begin{cases}6\,000=a-1\,600b,\\6\,100=a-1\,590b.\end{cases}$$

解得 $a=22\,000$, $b=10$,则所求需求函数为

$$Q=22\,000-10p.$$

【例 1.7】 某种商品的供给函数和需求函数分别是

$$S=25p-10,\ Q=200-5p.$$

求该商品的市场均衡价格和市场均衡数量.

解 按市场均衡条件 $Q=S$,即 $25p-10=200-5p$,则 $p_0=7$,此时 $Q_0=200-5\times7=165$,即市场均衡价格为 7,市场均衡数量为 165.

二、成本、收入和利润函数

在生产和产品经营活动中,成本、收入和利润这些经济变量都与产品的产量或销售量 q 密切相关,它们都可以看成 q 的函数.

1. 总成本函数

总成本函数 C 由**固定成本** C_0 和**可变成本** C_1 两部分组成. 固定成本 C_0 与产量 q 无关,如厂房、设备、企业管理费等. 可变成本 C_1 随产量 q 的变化而变化,即 $C_1=C_1(q)$,如原材料费、劳动者工资等. 这样总成本函数 $C=C_0+C_1(q)$.

单从总成本无法看出企业生产水平的高低,还要进一步考察单位产品的成本,即**平均成本函数**,记作 $\overline{C}=\dfrac{C(q)}{q}$,其中 $C(q)$是总成本函数.

【例 1.8】 已知某种产品的总成本函数是 $C=2\,000+\dfrac{1}{8}q^2$,求生产 400 件该产品时的总成本和平均成本.

解 总成本 $C(400)=2\,000+\dfrac{1}{8}400^2=22\,000$,

平均成本 $\overline{C}(400)=\dfrac{C(400)}{400}=\dfrac{22\,000}{400}=55$.

2. 收入函数

如果 p 为商品价格,q 为商品的销售量,则有**收入函数** $R=p\cdot q$.

【例 1.9】 已知某种商品的需求函数是 $q=400-5p$,求该商品的收入函数 R,并求出销售 40 件该商品时的收入.

解 由需求函数得

$$p=80-\frac{q}{5},$$

所以收入函数为

$$R=\left(80-\frac{q}{5}\right)\cdot q,$$

即 $R=80q-\dfrac{1}{5}q^2$.

由此，销售 40 件该商品的收入为 $R=80\times40-\frac{1}{5}\times40^2=2\,880$.

3. 利润函数

生产一定数量的产品的收入与总成本之差就是它的**利润**，于是**利润函数**为 $L=L(q)=R(q)-C(q)$，其中 q 为产品数量. 它的**平均利润函数**为：$\overline{L}=\overline{L}(q)=\frac{L(q)}{q}$.

【例 1.10】 已知生产某种商品 q 件时的总成本（单位：万元）为 $C=8+5q+0.1q^2$，该商品每件售价是 9 万元，试求：(1) 该商品的利润函数；(2) 生产 10 件该商品时的利润和平均利润；(3) 生产 40 件该商品时的利润.

解 (1) 按题意，收入函数 $R=9q$，所以利润为

$$L=R-C=9q-(8+5q+0.1q^2)=4q-8-0.1q^2.$$

(2) 生产 10 件该商品时的利润为

$$L(10)=4\times10-8-0.1\times10^2=22(\text{万元}),$$

此时平均利润为 $\overline{L}(10)=\frac{L(10)}{10}=\frac{22}{10}=2.2(\text{万元})$.

(3) 生产 40 件该商品时的利润为

$$L(40)=4\times40-8-0.1\times40^2=-8(\text{万元}).$$

从上例看出，利润并不总是随产量的增加而增加，有时产量增加，反而亏损，我们把当某一生产经营既不盈利也不亏本时称为盈亏平衡，满足 $L(q)=0$ 的点 q_0 称为**盈亏平衡点（或保本点）**. 盈亏分析常用于企业管理中各种定价或生产决策.

【例 1.11】 已知某种商品的成本函数为 $C=12+3q+q^2$，销售单价定为 11 元/件，试求该商品的盈亏平衡点，并说明随产量 q 变化时的盈亏情况.

解 该商品的收入函数 $R=11q$，则利润函数 $L(q)=R-C=8q-12-q^2$，由 $L(q)=0$，得两个盈亏平衡点 $q_1=2$，$q_2=6$.

再由利润函数 $L(q)=8q-12-q^2=-(q-2)(q-6)$ 知：当 $0\leqslant q<2$ 时，$L<0$；当 $2<q<6$ 时，$L>0$；当 $q>6$ 时，$L<0$，即，当 $q<2$ 时亏损，当 $2<q<6$ 时盈利，当 $q>6$ 时，又转为亏损.

习题 1.2

1. 当某物品收购价为每件 4.5 元时，收购站每月能收 500 件，若收购价每件提高 0.1 元，则收购量可增加 400 件，求该物品的线性供给函数.

2. 生产某产品的固定成本为 $a(a>0)$元，每生产一吨产品，总成本增加 $b(b>0)$元. 试写出总成本函数与平均成本函数.

3. 已知需求函数为 $Q(p)=120-4p$ 与供给函数 $S(p)=-30+p$，求均衡价格 p.

4. 设某商品的需求函数与供给函数分别为 $Q(p)=\frac{5\,600}{p}$ 和 $S(p)=p-10$.

(1) 找出均衡价格，并求此时的供给量与需求量；

(2) 在同一坐标中画出供给曲线和需求曲线；

(3) 何时供给曲线过 P 轴，这一点的经济意义是什么？

5. 某玩具厂每天生产 60 个玩具的总成本为 300 元，每天生产 80 个玩具的总成本为 340 元.

试求:(1) 线性成本函数;(2) 每天的固定成本;(3) 生产一个玩具的可变成本.

6. 某厂生产某种产品 1 万吨,销售量在 5 000 吨以内时,定价为 150 元/吨,当销售量超过 5 000吨时,超出部分按定价的 9 折出售.试求销售收入与销售量之间的函数关系.

7. 设某商品的需求量 q 与其价格 p 之间的关系是 $3q+4p=100$.

(1) 求需求函数;

(2) 试将该商品的市场销售收益 R 表示为商品价格 p 的函数;

(3) 求销售 5 件时的收益.

8. 设生产某种商品 x 件时的总成本为 $C(x)=100+3x+x^2$(万元).若每售出一件该商品的收入是 43 万元,求生产 30 件时的利润和平均利润.

9. 某食品店以 0.5 元/kg 进了一批黄瓜,以 0.9 元/kg 卖出,当天卖不完的要0.3 元/kg处理掉,此次进货 10 000 kg,试将这批货的利润表示成销售量 Q 的函数.

10. 已知某种商品的成本函数与收入函数分别是 $C=q^2+27-7q$, $R=5q$,试求:

(1) 该商品的利润函数;

(2) 该商品的盈亏平衡点,并说明盈亏情况.

第三节　极限的概念及运算

学习目标

1. 了解极限的概念,知道函数极限的描述性定义,会求左右极限.
2. 了解无穷小量的概念,了解无穷小量的运算性质及其与无穷大量的关系,以及无穷小量的比较等关系.
3. 掌握极限的四则运算法则.
4. 掌握两个重要极限.
5. 掌握一些常用的求极限的方法.

十九世纪以前,人们用朴素的极限思想计算了圆的面积或某些不规则物体的体积等.十九世纪之后,柯西以物体运动为背景,结合几何直观,引入了极限概念.后来,维尔斯特拉斯给出了形式化的数学语言描述.极限概念的创立,是微积分严格化的关键.它奠定了微积分学的基础.它也是研究经济变量变化趋势,预测经济变量未来走向的基础.

一、数列的极限

数列的极限

首先来研究一种特殊的函数,它是以正整数集 N^* 为定义域的函数,$x_n=f(n)$,$n\in N^*$,称为**数列**,记作$\{x_n\}$.

【案例 1.7】 战国时期著名哲学家庄子在《庄子・天下篇》一书中记载着惠施的一段话"一尺之棰,日取其半,万世不竭".

这句话的意思是指一尺的木棒,第一天取它的一半,即得$\frac{1}{2}$尺;第二天再取剩下的一半,即得$\frac{1}{4}$尺;第三天再取第二天剩下的一半,即得$\frac{1}{8}$尺;可以一天天的取下去,而木棒是永远也取不完的.

将每天剩余的木棒长度写出来就是数列：$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{8}$，…，$\frac{1}{2^n}$，…. 可以看出：当 n 无限增大时，$\frac{1}{2^n}$ 无限接近于 0.

【案例 1.8】（**圆面积的计算**）我国古代魏末晋初的杰出数学家刘徽（约 225—295 年）创造了“割圆术”，成功地推算出圆周率和圆的面积.

下面介绍一下“割圆术”求圆面积的作法和思路：

先作圆的内接正三边形，把它的面积记作 A_1，再作内接正六边形，其面积记作 A_2，再作内接正十二边形，其面积记作 A_3，…，照此下去，把圆的内接正 $3\times 2^{n-1}$（$n=1, 2\cdots$）边形的面积记作 A_n，这样得到一数列：

$$A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n, \cdots.$$

当边数 n 无限增大时，正多边形的面积 A_n 就无限接近于圆的面积.

定义 1.4　对于数列 $\{x_n\}$，如果当 n 无限增大时，数列的通项 x_n 无限地接近于某一确定的常数 a，则称常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的**极限**，或称数列 $\{x_n\}$ **收敛**于 a. 记为 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=a$. 如果数列没有极限，就说数列是**发散**的，记为 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ 不存在.

对无限接近的刻划为：x_n 无限接近于 a 等价于 $|x_n-a|$ 无限接近于 0.

数列极限的几何解释：一般地，若 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=a$，可将常数 a 和数列的通项 x_n 在数轴上用它们的对应点表示出来，对 a 的任一个取定的邻域 $U(a, \varepsilon)$，当 n 无限增大时，数列的项 x_n 最终（从某项 x_N 以后的项）都要落到邻域内（如图 1.6）.

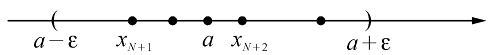


图 1.6

【例 1.12】　利用数列极限的定义，讨论下列数列的极限：

(1) $1, \frac{5}{2}, \frac{5}{3}, \frac{9}{4}, \frac{9}{5}, \cdots, \frac{2n+(-1)^n}{n}, \cdots$；

(2) $2, 4, 8, \cdots, 2^n, \cdots$；

(3) $1, -1, 1, \cdots, (-1)^{n+1}, \cdots$.

解　(1) 该数列的通项 $x_n=\frac{2n+(-1)^n}{n}$，通项 x_n 与 2 的距离 $|x_n-2|=\frac{1}{n}$，当项数 n 无限增大时，$|x_n-2|$ 无限逼近于零，即通项 x_n 无限逼近于 2，因此 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2n+(-1)^n}{n}=2$.

(2) 当项数 n 无限增大时，该数列的通项 x_n 也无限增大，不可能逼近一个常数项，从而 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ 不存在.

(3) 在数列 $1, -1, 1, \cdots, (-1)^{n+1}, \cdots$ 中，奇数项总是 1，偶数项总是 -1，因此通项 x_n 不可能逼近一个常数项，从而 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ 不存在.

收敛数列的性质：

定理 1.2（极限的唯一性）　数列 $\{x_n\}$ 不能收敛于两个不同的极限.

定理证明从略.

事实上，如果数列 $\{x_n\}$ 有两个极限：$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=a$，$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=b$，且 $a\neq b$，则这时在数轴上看，当通项 x_n 变化到一定“时刻”后，x_n 既要与点 a 无限接近，又要与另外一点 b 无限接近，这显然是不可能的，可见，数列的极限是唯一的.

定理 1.3(收敛数列的有界性) 如果数列$\{x_n\}$收敛,那么数列$\{x_n\}$一定有界.

定理证明从略.

由定理 1.3 可知,数列有界是数列收敛的必要条件,而不是充分条件. 有界数列未必收敛. 但无界数列必发散.

上述数列极限的两个性质对以下函数极限同样成立.

函数的极限

二、函数的极限

如果把数列极限中的函数 $f(n)$的定义域(N^*)以及自变量的变化过程($n\to+\infty$)等特殊性撇开,我们就可以得到函数极限的一般概念.

1. $x\to\infty$时函数的极限

【案例 1.9】 (**水温的变化趋势**)将一盆 80 ℃的热水放在一间室温恒为20℃的房间里,水的温度 T 将逐渐降低,随着时间 t 的推移,水温会越来越接近室温20℃.

【案例 1.10】 (**函数的变化趋势**)考察函数 $y=\dfrac{1}{x}$在$x\to+\infty$和$x\to-\infty$时变化情况(如下表1.5):

表 1.5

x	1	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000	…
$f(x)=\dfrac{1}{x}$	1	0.1	0.01	0.001	0.000 01	0.000 01	0.000 001	…

x	-1	-10	-100	$-1\ 000$	$-10\ 000$	$-100\ 000$	$-1\ 000\ 000$	…
$f(x)=\dfrac{1}{x}$	-1	-0.1	-0.01	-0.001	$-0.000\ 1$	$-0.000\ 01$	$-0.000\ 001$	…

可以从表中观察出:当 $x\to+\infty$时,$f(x)=\dfrac{1}{x}$与 0 无限接近;当 $x\to-\infty$时,$f(x)=\dfrac{1}{x}$也与 0 无限接近.

从上述两个问题中,我们看到:当自变量的绝对值逐渐增大时,相应的函数值趋近于某一个常数.

定义 1.5 若函数 $f(x)$当自变量 x 的绝对值无限增大时,函数 $f(x)$的值无限趋近于某个确定的常数 A,则称 A 为**函数 $f(x)$当 $x\to\infty$时的极限**. 记作$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 或$f(x)\to A$(当 $x\to\infty$).

> **注意**:$x\to\infty$表示 x 既取正值且无限增大(记为 $x\to+\infty$),同时又取负值且绝对值无限增大,(记为 $x\to-\infty$),故称为双边的.

有时 x 的变化趋向是单边的,即 $x\to+\infty$或 $x\to-\infty$.

定义 1.6 设函数 $f(x)$在$(a,+\infty)$内有定义,当x 的无限增大时,对应的函数值 $f(x)$无限趋近于某个确定的常数 A,则称 A 为**函数 $f(x)$当 $x\to+\infty$时的极限**. 记作 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A$(当 $x\to+\infty$).

类似地,可给出 $x\to-\infty$时极限的定义.

【例 1.13】 讨论 $f(x)=\arctan x$ 当 $x\to\infty$时的极限.

解 由表 1.3 中反正切函数的图像可知

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2},\ \lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}.$$

由于当 $x\to+\infty$ 和 $x\to-\infty$ 时，$f(x)=\arctan x$ 不是无限趋于同一个确定的常数，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在.

一般有结论：双边极限存在的充分必要条件是两个单边极限存在且相等，即

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}f(x)=A.\text{（记号“}\Leftrightarrow\text{”表示等价）}$$

2. $x\to x_0$ 时函数的极限

【案例 1.11】（**人影长度**）考虑一个人沿直线走向路灯的正下方时其影子的长度. 若目标总是灯的正下方那一点，灯与地面的垂直高度为 H. 由日常生活知识知道，当此人走向目标时，其影子长度越来越短，当人越来越接近目标（即 $x\to0$）其影子的长度越来越短，逐渐趋于 0（即 $y\to0$）（如图 1.7）.

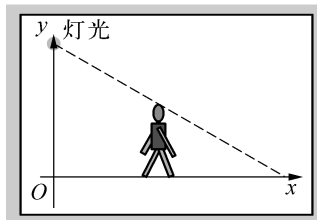


图 1.7

这一案例中，自变量无限接近某一点（$x\to0$）时，相应函数也无限地接近某一确定的值 0（$y\to0$）.

定义 1.7　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域内有定义，如果在自变量 $x\to x_0$ 的变化过程中，函数值 $f(x)$ 无限接近于确定的常数 A，则称 A 是**函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限**，记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A$（当 $x\to x_0$）.

说明：在定义中，“设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域内有定义”反映我们关心的是函数 $f(x)$ 在点 x_0 附近的变化趋势，而不是 $f(x)$ 在 x_0 这一孤立点 x_0 的情况. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 是否存在，与 $f(x)$ 在点 x_0 有没有定义或函数取什么数值都没有关系.

3. 单侧极限

【案例 1.12】（**出租车费**）设某城市出租车白天的收费 y（单位：元）与路程 x（单位：km）之间的关系为：

$$f(x)=\begin{cases}5+1.2x, & 0\leqslant x\leqslant7,\\ 13.4+2.1(x-7), & x>7,\end{cases}$$

讨论函数在 $x=7$ 处的极限.

在函数极限的定义中，x 趋近于 x_0 的方式是任意的. 此函数为分段函数，在 $x=7$ 的左右两则，函数 $f(x)$ 的表达式不同，此时只能先对 $x=7$ 左右两则分别进行讨论.

定义 1.8　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个左（右）邻域内有定义，如果 x 从 x_0 的左（右）侧趋于 x_0 时，$f(x)$ 无限地接近于确定的常数 A，则称 A 为**函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的左（右）极限**，记作 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 或 $f(x_0^-)$（$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 或 $f(x_0^+)$）.

根据 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限定义和左、右极限的定义，可以证明：函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时极限存在的充要条件是左极限和右极限各自存在且相等，即

$f(x_0^-)=f(x_0^+)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$　（记号“$\Leftrightarrow$”表示等价）.

案例 1.12 中函数 $f(x)$ 在 $x=7$ 的左极限为 13.4，右极限也为 13.4，所以函数 $f(x)$ 在 $x=7$ 处极限为 13.4.

【例 1.14】　求 $\lim\limits_{x\to1}(2x-1)$.

解　$|f(x)-A|=|(2x-1)-1|=2|x-1|$.

所以，当 $x\to1$ 时，$(2x-1)$ 以 1 为极限，即 $\lim\limits_{x\to1}(2x-1)=1$.

【例 1.15】 求 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$.

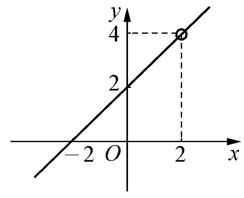


图 1.8

解 函数 $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ 其图像是“挖掉”点(2，4)的直线 $y=x+2$，如图 1.8. 当 $x\neq2$ 时，$f(x)=x+2$，则

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to2}(x+2)=4.$$

极限 $\lim\limits_{x\to2}f(x)$ 存在，但不等于 $f(x)$ 在点 $x=2$ 处的值(函数在 $x=2$ 处没有定义).

利用函数极限的定义可以考察某个常数 A 是否为 $f(x)$ 在 x_0 处的极限，但不是用来求函数 $f(x)$ 在 x_0 处的极限的常用方法. 但可以验证：基本初等函数在其各自的定义域内每点处的极限都存在，且等于该点处的函数值.

【例 1.16】 设函数 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x<0,\\ x^2, & 0\leqslant x\leqslant1,\\ 1, & x>1,\end{cases}$ 求函数在 $x=0$ 和 $x=1$ 处的极限.

解 因为

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}(x+1)=1,$$
$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}x^2=0,$$

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$，所以 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 不存在.

因为

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}x^2=1,$$
$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}1=1,$$

$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}f(x)$，所以 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=1$.

无穷小和无穷大

三、无穷小与无穷大

1. 无穷小

【案例 1.13】 (**洗涤效果**)在用洗衣机清洗衣物时，清洗次数越多，衣物上残留的污渍就越少. 当洗涤次数无限增大时，衣物上的污渍趋于零.

在对许多事物进行研究时，常遇到事物数量的变化趋势为零.

定义 1.9 在自变量某一变化过程中，变量 X 的极限为零，则称 X 为自变量在此变化过程中的**无穷小量**(**简称无穷小**)，记作 $\lim X=0$，其中 lim 可表示 $n\to\infty$，$x\to x_0$，$x\to\infty$ 等.

> **注意**：无穷小是个变量(函数)，它在自变量某一变化过程中，其绝对值可以任意小，要多小就多小. 零这个常数作为无穷小是特殊情形，因为如果 $f(x)\equiv0$，其绝对值可以任意小，或者说，常数零在自变量的任何一个变化过程中，极限总为零，因此零是可以作为无穷小的唯一的常数.

例如：因为 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}=0$，故函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ 是 $x\to-\infty$ 时的无穷小.

又例如：因为$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$，故函数 $y=\frac{1}{x}$是$x\to\infty$时的无穷小.

定理 1.4（无穷小与函数极限的关系）　在自变量 x 的某一变化过程中，函数$f(x)$具有极限 A 的充分必要条件是 $f(x)=A+\boldsymbol{\alpha}$，其中 $\boldsymbol{\alpha}$ 是自变量x 在同一变化过程中的无穷小.

定理证明从略.

无穷小的代数性质.

性质 1. 有限个无穷小之和仍是无穷小.

性质 2. 有界变量与无穷小之积仍是无穷小.

性质 3. 常数与无穷小之积是无穷小.

性质 4. 有限个无穷小之积是无穷小.

【例 1.17】　求极限$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\arctan x}{x}$.

解　当 $x\to\infty$时，分子和分母的极限都不存在. 若把$\frac{\arctan x}{x}$视为 $\arctan x$ 与$\frac{1}{x}$的乘积，由于$\frac{1}{x}$是当$x\to\infty$时的无穷小，而$|\arctan x|<\frac{\pi}{2}$是有界变量. 因此，根据有界变量与无穷小之积仍是无穷小得：$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\arctan x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\arctan x=0$.

2. 无穷大

【案例 1.14】　（**投资分析**）若某人以本金 A 元进行一项投资，投资的年利率为 r，如果以年为单位计算复利（即每年计息一次，并把利息加入下年的本金，重复计息），试建立此人 n 年末的本利和数列，并分析当 $n\to+\infty$时，此数列的极限，解释其实际意义.

解　n 年末的本利和为：$A_n=A\,(1+r)^n$.

$$\lim_{n\to+\infty}A_n=\lim_{n\to+\infty}A\,(1+r)^n=+\infty$$

其实际意义为：投资时间越长，本利和越大，当投资时间无限长时，本利和也无限增大.

定义 1.10　在自变量的某一变化过程中，变量 X 的绝对值$|X|$无限增大，就称 X 为自变量在此变化过程中的**无穷大量**（简称**无穷大**），记为 $\lim X=\infty$. 其中 $\lim$ 可表示 $n\to\infty$，$x\to x_0$，$x\to\infty$ 等.

注意：这里$\lim X=\infty$只是沿用了极限符号，并不意味着变量 X 存在极限，无穷大（∞）不是数，不可与绝对值很大的数混为一谈. 无穷大是指绝对值可以任意变大的变量.

例如：因为$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty$，故函数 $y=\frac{1}{x}$为当$x\to 0$ 时的无穷大.

又例如：因为$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x=\infty$，故函数 $y=\tan x$ 为当$x\to\frac{\pi}{2}$时的无穷大.

3. 无穷小与无穷大的关系

定理 1.5　在自变量的同一变化过程中：

(1) 如果 X 为无穷大，则$\frac{1}{X}$为无穷小；

(2) 如果 $X\neq 0$ 且为无穷小，则$\frac{1}{X}$为无穷大.

定理证明从略.

据此定理,关于无穷大的问题都可转化为无穷小来讨论.

4. 无穷小的比较

无穷小的比较

根据无穷小的代数性质,我们知道,在同一过程中的两个无穷小的和差及乘积仍为无穷小,但它们的商却不一定是无穷小.

例如:当 $x\to0$ 时,$3x$、x^2、$\sin x$ 都是无穷小,而

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2}{3x}=0,\lim_{x\to0}\frac{3x}{x^2}=\infty,\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{3x}=\frac{1}{3}.$$

上述不同情况的出现,是因为不同的无穷小趋向于零的快慢程度的差异所致,就上面例子来说,在 $x\to0$ 的过程中,$x^2\to0$ 比 $3x\to0$ 要快些,反过来 $3x\to0$ 比 $x^2\to0$ 要慢些,而 $\sin x\to0$ 与 $3x\to0$ 则快慢相仿.

为了比较在同一变化过程中两个无穷小趋于零的快慢,我们引进无穷小的阶的概念.

定义 1.11 设 $\alpha=\alpha(x)$,$\beta=\beta(x)$都是自变量同一变化过程中的无穷小,则

(1) 如果$\lim\frac{\beta}{\alpha}=c(c\neq0)$,则称 β 与 α 是**同阶无穷小**,特别地,如果$\lim\frac{\beta}{\alpha}=1$,则称 β 与 α 是**等价无穷小**,记作 $\beta\sim\alpha$ 或 $\alpha\sim\beta$;

(2) 如果$\lim\frac{\beta}{\alpha}=0$,则称 β 是 α 的**高阶无穷小**,记作 $\beta=o(\alpha)$;

(3) 如果$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\infty$,则称 β 是 α 的**低阶无穷小**.

例如,因为

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2},$$

所以当 $x\to0$ 时,$1-\cos x$ 与 x^2 是同阶无穷小,或者说 $1-\cos x$ 与$\frac{1}{2}x^2$ 是等价无穷小,即 $1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$ $\left(因为\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}}=1\right)$.

定理 1.6(等价无穷小的替换原理) 设 $\alpha,\beta,\alpha',\beta'$是自变量同一变化过程中的无穷小,若 $\alpha\sim\alpha'$,$\beta\sim\beta'$且$\lim\frac{\beta'}{\alpha'}$存在,则$\lim\frac{\beta}{\alpha}$也存在,且$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\frac{\beta'}{\alpha'}$.

证明 $\lim\frac{\beta'}{\alpha'}=\lim\left(\frac{\beta'}{\alpha'}\cdot\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\right)=\lim\frac{\beta'}{\beta}\cdot\lim\frac{\beta}{\alpha}\cdot\lim\frac{\alpha}{\alpha'}=\lim\frac{\beta}{\alpha}$.

这个性质表明:求两个无穷小之比的极限时,分子及分母都可用等价无穷小来代替,这往往可使计算简化.

【例 1.18】 求$\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan 2x}{\sin 5x}$.

解 因为当 $x\to0$ 时,$\tan 2x\sim2x$, $\sin 5x\sim5x$,故

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan 2x}{\sin 5x}=\lim_{x\to0}\frac{2x}{5x}=\frac{2}{5}.$$

【例 1.19】 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{2\ln(x+1)}$.

解 因为当 $x\to 0$ 时，$\tan x\sim x$，$\ln(x+1)\sim x$，故

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{2\ln(x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}.$$

【例 1.20】 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$.

解 因为当 $x\to 0$ 时，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，$\tan x\sim x$，从而$(1-\cos x)\tan x\sim\dfrac{1}{2}x^3$，故

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\tan x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^3}{x^3}=\frac{1}{2}.$$

注意：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}\neq\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-x}{x^3}=0$，因为 $\tan x-\sin x$ 与 $x-x$ 不等价. 无穷小的替换，必须是两个无穷小之比或无穷小为极限式中的乘积，而且代换后的极限存在，才可使用. 加减项的无穷小不能用等价无穷小代换.

常见的等价无穷小有(当 $x\to 0$ 时)：$x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim\ln(x+1)\sim e^x-1$；$1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$；$(1+x)^a-1\sim ax(a\neq 0)$.

极限的运算方法

四、极限的运算

1. 极限的四则运算法则

【案例 1.15】 用列表法或图形法讨论较复杂的函数的极限，不仅工作量大，而且还不一定准确，如求$\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2-\dfrac{\cos x}{10\,000}\right)$，下表 1.6 列出函数 $y=x^2-\dfrac{\cos x}{10\,000}$在 $x=0$ 处附近取值时的函数值.

表 1.6

x	± 0.5	± 0.1	± 0.01	$\to$	0
$x^2-\dfrac{\cos x}{10\,000}$	0.249 91	0.009 90	0.000 000 005	$\to$	?

我们可能会估计$\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2-\dfrac{\cos x}{10\,000}\right)=0$，但这个结果是错误的. 因此我们需要研究函数极限的运算法则. 以下在同一式子中考虑自变量的同一变化过程，其主要定理如下：

定理 1.7 如果 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，那么

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$；

(2) $\lim f(x)\cdot g(x)=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$；

(3) $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}(B\neq 0)$.

定理证明从略.

推论 1 常数可以提到极限号前，即 $\lim[Cf(x)]=C\lim f(x)$.

推论 2 若 $\lim f(x)=A$，且 n 为正整数，则 $\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n=A^n$.

【例 1.21】 求$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-1}{x^2-5x+3}$.

解 运用定理 1.7 及其推论可得：

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-1}{x^2-5x+3}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(x^3-1)}{\lim\limits_{x\to 2}(x^2-5x+3)}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}x^3-\lim\limits_{x\to 2}1}{\lim\limits_{x\to 2}x^2-5\lim\limits_{x\to 2}x+\lim\limits_{x\to 2}3}$$

$$=\frac{(\lim\limits_{x\to 2}x)^3-1}{(\lim\limits_{x\to 2}x)^2-5\cdot 2+3}=\frac{2^3-1}{2^2-10+3}=-\frac{7}{3}.$$

【例 1.22】 求$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9}$.

分析：所给函数的特点是：分子、分母的极限都为零，但它们都有趋向 0 的公因子 $x-3$，当 $x\to 3$ 时，可约去 $x-3$ 这个为零的公因子.

解 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{(x-3)(x+3)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{x+3}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 3}1}{\lim\limits_{x\to 3}(x+3)}=\dfrac{1}{6}$.

【例 1.23】 求$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-3}{x^2-5x+4}$.

分析：所给函数的特点是：分子的极限不为零，分母的极限为零，因此不能直接运用商的极限运算法则. 对于这类题目应先计算其倒数的极限，再运用无穷大与无穷小的关系得出结果.

解 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-5x+4}{2x-3}=\dfrac{1^2-5\cdot 1+4}{2\cdot 1-3}=0$，根据无穷大与无穷小的关系得$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-3}{x^2-5x+4}=\infty$.

【例 1.24】 求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+4x^2+2}{7x^3+5x^2-3}$.

解 所给函数的特点是：分子和分母都趋于无穷大，因此不能直接运用商的极限运算法则. 对于这类题目先用 x^3 去除分子及分母，然后求极限：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+4x^2+2}{7x^3+5x^2-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\dfrac{4}{x}+\dfrac{2}{x^3}}{7+\dfrac{5}{x}-\dfrac{3}{x^3}}=\frac{3}{7}.$$

【例 1.25】 求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x-1}{2x^3-x^2+5}$.

解 先用 x^3 去除分子及分母，然后求极限：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x-1}{2x^3-x^2+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{3}{x}-\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}}{2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{x^3}}=\frac{0}{2}=0.$$

【例 1.26】 求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-x^2+5}{3x^2-2x-1}$.

解 因为$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x-1}{2x^3-x^2+5}=0$，所以

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-x^2+5}{3x^2-2x-1}=\infty.$$

上述三个函数，当自变量趋于无穷大时，其分子、分母都趋于无穷大，这类极限称为“$\frac{\infty}{\infty}$”型极限，对于它们不能直接运用商的运算法则，而应采用分子分母同除自变量 x 的最高次的方法求极限.

一般地，当 $a_0\neq0$，$b_0\neq0$，m 和 n 为非负整数时，有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=\begin{cases}0, & n<m,\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & n=m,\\ \infty, & n>m.\end{cases}$$

此结果可作为公式使用，但要注意只适用于 $x\to+\infty$，$x\to-\infty$ 和 $x\to\infty$ 的情形.

【例 1.27】　求 $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{x^2}{x^2-4}-\dfrac{1}{x-2}\right)$.

分析：此例也称“$\infty-\infty$”型极限，一般处理的方法为通分，再运用前面介绍过的求极限的方法计算.

解　$\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{x^2}{x^2-4}-\dfrac{1}{x-2}\right)=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-x-2}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)(x+1)}{(x+2)(x-2)}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x+1}{x+2}=\dfrac{3}{4}$.

2. 复合函数的极限法则

定理 1.8　设函数 $y=f(x)$ 与 $u=\varphi(x)$ 满足如下两个条件：

(1) $\lim\limits_{u\to a}f(u)=A$；

(2) 当 $x\neq x_0$ 时，$\varphi(x)\neq a$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$.

则 $\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=\lim\limits_{u\to a}f(u)=A$.

定理证明从略.

若 $f(u)$ 是基本初等函数，a 又是 $f(u)$ 的定义域内的点，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=f(a)$，即 $\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=f[\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)]$.（在第四节有了连续函数的概念后，上式只要 $f(u)$ 在 a 点连续即成立）.

【例 1.28】　求 $\lim\limits_{x\to3}\sqrt{\dfrac{x^2-9}{x-3}}$.

解　$y=\sqrt{\dfrac{x^2-9}{x-3}}$ 是由 $y=\sqrt{u}$ 与 $u=\dfrac{x^2-9}{x-3}$ 复合而成的.

因为 $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=6$，所以 $\lim\limits_{x\to3}\sqrt{\dfrac{x^2-9}{x-3}}=\lim\limits_{u\to6}\sqrt{u}=\sqrt{6}$.

【例 1.29】　求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{1-\sqrt{1+x^2}}$.

分析：根据复合函数的极限运算法则知，分子和分母均为零，因此，需先将分母有理化，约去关于 x 的公因子，再运用前面介绍过的求极限的方法计算.

解　$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{1-\sqrt{1+x^2}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2(1+\sqrt{1+x^2})}{1-(1+x^2)}=-\lim\limits_{x\to0}(1+\sqrt{1+x^2})=-2$.

3. 两个重要极限

对这两个重要极限我们不作证明，仅用列表法来给出函数的变化趋势.

(1) **第一个重要极限**：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

通过列表法（见下表 1.7）可以看出当 $x\to0$ 时，函数 $y=\dfrac{\sin x}{x}\to1$.

第一个重要极限

表 1.7

x	± 1	± 0.5	± 0.1	± 0.01	…
$\dfrac{\sin x}{x}$	0.841 471	0.958 85	0.998 33	0.999 98	…

（2）**第二个重要极限**：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$（或$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$）.

通过列表法（见下表 1.8）可以看出当 $x\to\infty$时，函数 $y=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}\to e$.

第二个重要极限

表 1.8

x	1	2	5	10	100	1 000	10 000	100 000	100 000 000	…
$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}$	2	2.25	2.488	2.594	2.705	2.717	2.718 15	2.718 28	2.718 281 82	…

【例 1.30】 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}=1$.

【例 1.31】 求$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sin(x^2-9)}{x-3}$.

解 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sin(x^2-9)}{x-3}=\lim\limits_{x^2-9\to 0}\dfrac{\sin(x^2-9)}{x^2-9}\lim\limits_{x\to 3}(x+3)=1\times 6=6$.

【例 1.32】 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\dfrac{x}{2}}{\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2=\dfrac{1}{2}\cdot 1^2=\dfrac{1}{2}$.

【例 1.33】 求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{x}$.

解 令 $t=-x$，则 $x\to\infty$时，$t\to\infty$. 于是

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-t}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}}=\frac{1}{\mathrm{e}}.$$

或 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{-x}\right)^{-x(-1)}=\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{-x}\right)^{-x}\right]^{-1}=\mathrm{e}^{-1}$.

【例 1.34】 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln\mathrm{e}=1$.

【例 1.35】 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}$.

解 令 $u=\mathrm{e}^x-1$，则 $x=\ln(1+u)$，当 $x\to 0$ 时 $u\to 0$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{u}{\ln(1+u)}=1.$$

4. 连续复利

作为公式$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$在经济方面的应用，下面我们介绍复利公式：

资金的价值是有时间性的，银行存款、借贷资金都要付利息. 如果计算利息时，利息又产生利息，称为**复利**. 在复利问题中，设本金为A_0，年利率为r，若每年年末结算一次，则

第一年末的本利和为$A_0+A_0r=A_0(1+r)$，

第二年末的本利和为$A_0(1+r)+A_0(1+r)\cdot r=A_0(1+r)^2$，

依此递推可得第n年末的本利和为$A_0(1+r)^n$.

这就是以年为期的复利公式. 若把一年均分为t期计息，这时每期利率可以认为是$\frac{r}{t}$，于是

第一年末的本利和为$A_0\left(1+\frac{r}{t}\right)^t$，

第二年末的本利和为$A_0\left(1+\frac{r}{t}\right)^{2t}$，

依此递推可得第n年末的本利和为$A_0\left(1+\frac{r}{t}\right)^{nt}$.

假设每时每刻都计算利息，就是立即产生，立即结算(称为**连续复利**，国外有些银行实行连续复利)，相当于计息期限无限缩短，即$t\to\infty$，于是得到连续复利的计算公式

$$\lim_{t\to\infty}A_0\left(1+\frac{r}{t}\right)^{nt}=A_0\mathrm{e}^{rn}.$$

因此，对连续复利问题，第n年末的本利和为$A_0\mathrm{e}^{rn}$.

【例 1.36】 四家银行按不同方式(年、半年、月、连续)计算本利和，假设在每个银行存入 1 000 元，年利率为 8%，试问 5 年后本利和各为多少？

解 设$A_i(i=1,2,3,4)$为第i家银行 5 年后的本利和.

第一家银行(按年计息)：$A_1=1\,000(1+8\%)^5=1\,469.33$(元).

第二家银行(按半年计息)：$A_2=1\,000\left(1+\frac{0.08}{2}\right)^{5\times2}=1\,480.24$(元).

第三家银行(按月计息)：$A_3=1\,000\left(1+\frac{0.08}{12}\right)^{5\times12}=1\,489.85$(元).

第四家银行(按连续计息)：$A_4=1\,000\mathrm{e}^{0.08\times5}=1\,491.82$(元).

5. 永续年金

永续年金是指无限期的收入或支出相等金额的年金，也称永久年金. 由于永续年金持续期无限，没有终止时间，因此没有终值，只有现值. 由复利计算公式知，若每年末奖金为A，则第 1 年至第n年末年金A的现值$P_1,P_2,\cdots,P_n$分别为$\frac{A}{(1+r)},\frac{A}{(1+r)^2},\frac{A}{(1+r)^3},\cdots,\frac{A}{(1+r)^n}$($r$为年利率)，显然$P_1,P_2,\cdots,P_n$构成一个公比为$\frac{1}{1+r}$的等比数列，所以前$n$年年金现值之和为

$$\begin{aligned}P&=\frac{A}{(1+r)}+\frac{A}{(1+r)^2}+\frac{A}{(1+r)^3}+\cdots+\frac{A}{(1+r)^n}\\&=\frac{A}{(1+r)}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{1+r}\right)^n}{1-\frac{1}{1+r}}\end{aligned}$$

$$=\frac{A}{r}\cdot\left[1-\frac{1}{(1+r)^n}\right]$$

当年金的年数永远继续，即 $n\to\infty$，上述公式中令 $n\to\infty$，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A}{r}\cdot\left[1-\frac{1}{(1+r)^n}\right]=\frac{A}{r},$$

因此永续年金现值公式为 $P=\frac{A}{r}$.

【例 1.37】 某学校要建立一项永久性的奖学金，每年发放一次，奖金为 1 000 元，若以年复利率 5% 计算，现需存入银行多少钱？

解 $$P=\frac{S}{r}=\frac{1\,000}{0.05}=20\,000(\text{元})$$

即现在需存入银行 20 000 元.

习题 1.3

1. 观察如下数列 $\{x_n\}$ 一般项 x_n 的变化趋势，写出它们的极限.

(1) $x_n=\frac{1}{3^n}$；　(2) $x_n=(-1)\frac{1}{n}$；

(3) $x_n=3+\frac{1}{n^2}$；　(4) $x_n=\frac{n-1}{n+1}$；

(5) $x_n=n\,(-1)^n$；　(6) $x_n=n-\frac{1}{n}$.

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases}e^x+1, & x>0,\\ 2x+b, & x\leqslant 0,\end{cases}$ 要使极限 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在，b 应取何值？

3. 在下列各题中，指出哪些是无穷小，哪些是无穷大？

(1) $\frac{1+2x}{x^2}(x\to\infty)$；　(2) $\frac{x+1}{x^2-9}(x\to 3)$；

(3) $\frac{\sin x}{1+\cos x}(x\to 0)$；　(4) $e^{\frac{1}{x}}(x\to 0)$.

4. 计算下列各极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\cos\frac{1}{x-1}$；　(2) $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\frac{1}{x}$.

5. 计算下列各极限：

(1) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{3x+1}{x^2+1}$；　(2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$；

(3) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x+2}$；　(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2-x}$；

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(2-\frac{1}{x^2}\right)$；　(6) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x^3-1}\right)$.

6. 计算下列各极限：

(1) $\lim\limits_{x\to -3}\sqrt{x^2-x+8}$；　(2) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\arcsin\sqrt{x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\ln 2^x$；　(4) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{5x-8}-\sqrt{x}}{x-2}$.

7. 计算下列各极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{x}$；　　（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 5x}$；

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{x\sin x}$；　　（4）$\lim\limits_{n\to\infty}3^n\sin\dfrac{x}{3^n}(x\neq 0)$.

8. 计算下列各极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{1}{x}}$；　　（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{3x}$；

（3）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{x+2}\right)^{x}$；　　（4）$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{2\sec x}$.

9. 一笔 10 万元的房屋贷款，还贷期限是 5 年. 如果贷款利率为 6％的年复利，采用每月偿还等额本息的还贷方法，每月需还银行多少钱？

10. 某企业计划建立一项永久性的奖励基金，每年年终发放一次，奖金为 10 万元，若以年复利率 4％计算，现需存入银行多少钱？

第四节　函数的连续性与间断点

学习目标

1. 了解函数连续性的定义，会求函数的连续区间.
2. 了解函数间断点的概念，会判别函数间断点的类型.
3. 知道闭区间上连续函数的几个性质.

在稳定的社会经济系统中，许多经济量都是连续变化的. 例如，人口数量、国民收入、价格指数等都可以看作是时间的函数，显然，在很短的时间内，这些经济量的改变将是很小的. 这些现象在函数关系上的反映，就是函数的连续性. 函数的连续性是与函数的极限密切相关的重要概念，这个概念的建立为进一步深入地研究函数的微分和积分及其应用打下了基础.

一、函数的连续性

函数的连续性

【案例 1.16】（**人体高度的连续变化**）我们知道，人体的高度 h 是时间 t 的函数$h(t)$，h 随着 t 的变化而连续变化. 事实上，当 Δt 变化很微小时，人的高度 Δh 的变化也很微小，即

$$\Delta t\to 0 \text{ 时}，\Delta h\to 0.$$

下面我们先引入增量的概念，然后来描述连续性，并引入连续性的定义.

设变量 y 从它的一个初值 y_1 变到终值 y_2，终值与初值的差 y_2-y_1 就叫做**变量 y 的增量**，记作 Δy，即 $\Delta y=y_2-y_1$.

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一个邻域内是有定义的，当自变量 x 在该邻域内从 x_0 变到 $x_0+\Delta x$ 时，函数 y 相应地从 $f(x_0)$ 变到 $f(x_0+\Delta x)$，因此函数 y 的对应增量为

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$

定义 1.12　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一个邻域内有定义，如果当自变量的增量 $\Delta x=x-x_0$ 趋于零时，对应的函数的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 也趋于零，即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0 \text{ 或} \lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0).$$

那么就称函数 $y=f(x)$在点 x_0处**连续**.

从定义可以看出函数 $y=f(x)$在点 x_0处连续，则函数 $y=f(x)$在点 x_0处的极限等于函数 $y=f(x)$在点 x_0函数值.

定义 1.13 如果$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)=f(x_0)$，则称 $y=f(x)$在点 x_0 处**左连续**. 如果$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)=f(x_0)$，则称 $y=f(x)$在点 x_0 处**右连续**.

左右连续与连续的关系：

函数 $y=f(x)$在点 x_0处连续$\Leftrightarrow$函数 $y=f(x)$在点 x_0处左连续且右连续.

在区间上每一点都连续的函数，叫做在该区间上的**连续函数**，或者说函数在该区间上连续. 如果区间包括端点，那么函数在右端点连续是指左连续，在左端点连续是指右连续.

【例 1.37】 证明函数 $y=x^2$ 在点 x_0 连续.

证明 当自变量 x 的增量为 Δx 时，函数 $y=x^2$ 对应的增量为：

$$\Delta y=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2=2x_0\Delta x+(\Delta x)^2,$$

$$\lim_{\Delta x \to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x \to 0}[2x_0\Delta x+(\Delta x)^2]=0,$$

所以 $y=x^2$ 在点 x_0 连续.

【例 1.38】 证明 $f(x)=\begin{cases}2x+1, & x\leqslant 0,\\ \cos x, & x>0\end{cases}$在 $x=0$ 处连续.

证明 因为$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x \to 0^+}\cos x=1$，$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x \to 0^-}(2x+1)=1$ 且 $f(0)=1$，即

$$\lim_{x \to 0^+} f(x)=\lim_{x \to 0^-} f(x)=f(0).$$

所以 $f(x)$在 $x=0$ 连续.

注意：一切初等函数在其定义区间内都是连续的.

二、函数的间断点

函数的间断点

【案例 1.17】（**冰融化所需要的热量**）设 1 g 冰从 -40 ℃升到 x ℃所需要的热量[单位:J(焦尔)]为：

$$f(x)=\begin{cases}2.1x+84, & -40\leqslant x\leqslant 0,\\ 4.2x+420, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

试问当 $x=0$ 时，函数是否连续？并解释其物理意义.

解 $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x \to 0^-}(2.1x+84)=84$,

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x \to 0^+}(4.2x+420)=420$,

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)\neq\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$.

所以，函数 $f(x)$在 $x=0$ 处不连续.

案例中该点不连续的物理意义是：冰在熔解时，需要吸收大量的热量，这些热量使冰变成水，但并不能引起温度的升高.

定义 1.14 函数 $f(x)$不连续的点 x_0 称为函数 $f(x)$的**间断点**. 设函数 $f(x)$在点 x_0的某去心邻域内有定义. 如果函数 $f(x)$有下列三种情形之一：

(1) 在 x_0没有定义；

(2) 虽然在 x_0有定义，但$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$不存在；

(3) 虽然在 x_0 有定义且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在,但 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$;
则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处间断.

通常把间断点分成两类:

如果 x_0 是函数 $f(x)$ 的间断点,且左极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 及右极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 都存在,那么 x_0 称为函数 $f(x)$ 的**第一类间断点**. 在第一类间断点中,左、右极限相等者称为**可去间断点**,不相等者称为**跳跃间断点**.

如果 x_0 是函数 $f(x)$ 的间断点,且左极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 及右极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 至少有一个不存在,那么 x_0 称为函数 $f(x)$ 的**第二类间断点**. 在第二类间断点中,函数趋向于无穷称为**无穷间断点**,函数出现振荡,称为**振荡间断点**.

【例 1.39】 考察函数 $y=\tan x$ 在 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 处的连续性.

解 正切函数 $y=\tan x$ 在 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 处没有定义,则点 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 是函数 $y=\tan x$ 的间断点. 因为 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x=\infty$,故 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 为函数 $y=\tan x$ 的无穷间断点.

【例 1.40】 考察函数 $y=\sin\dfrac{1}{x}$ 在点 $x=0$ 处的连续性.

解 函数 $y=\sin\dfrac{1}{x}$ 在点 $x=0$ 没有定义,则点 $x=0$ 是函数 $y=\sin\dfrac{1}{x}$ 的间断点. 当 $x\to 0$ 时,函数值在 -1 与 $+1$ 之间变动无限多次,所以点 $x=0$ 为函数 $y=\sin\dfrac{1}{x}$ 的振荡间断点.

【例 1.41】 考察函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 在 $x=1$ 处的连续性.

解 函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 在 $x=1$ 没有定义,则点 $x=1$ 是函数的间断点. 因为 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2$,如果补充定义:令 $x=1$ 时 $y=2$,则所给函数在 $x=1$ 成为连续. 所以 $x=1$ 为该函数的可去间断点.

【例 1.42】 考察函数 $f(x)=\begin{cases}x-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ x+1, & x>0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解 因为 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x-1)=-1$,

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+1)=1$,

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$.

所以极限 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在,$x=0$ 是函数 $f(x)$ 的间断点. 因函数 $f(x)$ 的图形在 $x=0$ 处产生跳跃现象(如图 1.9),我们称 $x=0$ 为函数 $f(x)$ 的跳跃间断点.

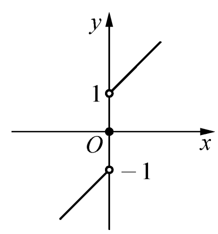


图 1.9

三、闭区间上连续函数的性质

在闭区间上连续函数具有一些重要的性质,下面我们将不加证明地予以介绍.

定理 1.9(最大值和最小值定理) 在闭区间上连续的函数在该区间上一定能取得它的最大值和最小值.

定理证明从略.

图 1.10 给出了该定理的几何直观图形.

即设 $f(x)$为闭区间$[a, b]$上的连续函数，则存在 $\xi_1, \xi_2 \in [a, b]$，使得

$$f(\xi_1)=\min_{a\leqslant x\leqslant b} f(x),$$

$$f(\xi_2)=\max_{a\leqslant x\leqslant b} f(x).$$

注意：如果函数在开区间内连续，或函数在闭区间上有间断点，那么函数在该区间上就不一定有最大值或最小值.

例如：在开区间(a, b)上，连续函数 $y=x$ 无最大值和最小值.

又如，函数 $y=f(x)=\begin{cases}-x+1 & 0\leqslant x<1\\ 1 & x=1\\ -x+3 & 1<x\leqslant 2\end{cases}$ （如图 1.11）在闭区间$[0, 2]$上无最大值和最小值.

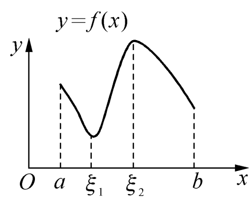


图 1.10

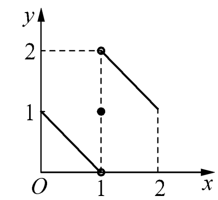


图 1.11

定理 1.10（有界性定理） 在闭区间上连续的函数一定在该区间上有界.

定理证明从略.

如果 x_0 使 $f(x_0)=0$，则 x_0 称为函数 $f(x)$的**零点**.

定理 1.11（零点定理） 设函数 $f(x)$在闭区间$[a, b]$上连续，且 $f(a)$与 $f(b)$异号，那么在开区间(a, b)内至少有一点 ξ，使得 $f(\xi)=0$.

定理证明从略.

图 1.12 给出了该定理的几何直观图形：如果连续曲线弧 $f(x)$的两个端点位于 x 轴的不同侧，那么这段弧与 x 轴至少有一个交点 ξ.

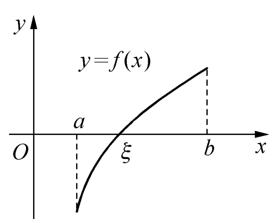


图 1.12

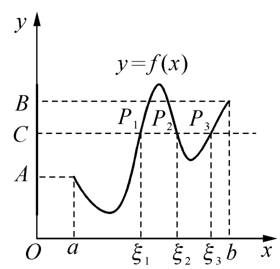


图 1.13

定理 1.12（介值定理） 设函数 $f(x)$在闭区间$[a, b]$上连续，且 $f(a)\neq f(b)$，那么，对于 $f(a)$与 $f(b)$之间的任意一个数 C，在开区间(a, b)内至少有一点 ξ，使得

$$f(\xi)=C.$$

定理证明从略.

图 1.13 给出了该定理的几何直观图形：连续曲线弧 $y=f(x)$与水平直线 $y=C$ 至少相交于一

点，图中点 P_1，P_2，P_3 都是曲线 $y=f(x)$与直线 $y=C$ 的交点.

推论　在闭区间上连续的函数必取得介于最大值 M 与最小值 m 之间的任何值.

设 $m=f(x_1)$，$M=f(x_2)$，而 $m\neq M$，在闭区间$[x_1, x_2]$(或$[x_2, x_1]$)上利用介值定理，就可以得到上述推论.

【例 1.43】　证明方程 $x^3-4x^2+1=0$ 在区间$(0, 1)$内至少有一个根.

证明　函数 $f(x)=x^3-4x^2+1$ 在闭区间$[0, 1]$上连续，又 $f(0)=1>0$，$f(1)=-2<0$. 根据零点定理，在$(0, 1)$内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=0$，即 $\xi^3-4\xi^2+1=0 \quad (0<\xi<1)$. 此等式说明方程 $x^3-4x^2+1=0$ 在区间$(0, 1)$内至少有一个根是 ξ.

习题 1.4

1. 设函数 $f(x)=x^2-2x+5$，求下列条件下函数的增量：

(1) 当 x 由 2 变到 1；　　(2) 当 x 由 2 变到 $2+\Delta x$；

(3) 当 x 由 x_0 变到 $x_0+\Delta x$.

2. 如果 $f(x)$在 x_0 处连续，那么$|f(x)|$在 x_0 处是否也连续？

3. 设函数 $f(x)=\begin{cases}(1-x)^{\frac{1}{x}}, & x\neq 0,\\ k, & x=0\end{cases}$在点 $x=0$ 处连续，求 k 的值.

4. 使函数 $f(x)=\begin{cases}e^x+b, & x<0,\\ a, & x=0,\\ \dfrac{1}{x}\sin x+2, & x>0\end{cases}$在定义域内连续，常数 a，b 各应取何值？

5. 求下列函数的连续区间.

(1) $y=\dfrac{1}{x^2+x-2}$；　　(2) $y=\dfrac{1}{x-1}+\sqrt{x+2}$.

6. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{x\cos x}{x^2+1}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\ln\dfrac{\sin x}{x}$.

7. 求下列函数的间断点并判断其类型.

(1) $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-2x-3}$；　　(2) $y=\dfrac{1}{\cos x}$；

(3) $y=\dfrac{1}{2+e^{\frac{1}{x-1}}}$.

8. 一个停车场第一个小时(或不到一小时)收费 3 元，以后每小时(或不到整时)收费 2 元，每天最多收费 10 元. 讨论此函数的间断点，并说明其实际意义.

9. 研究函数 $f(x)=\begin{cases}x, & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ 2-x, & x<-1 \text{ 或 } x>1\end{cases}$的连续性，并画出函数的图形.

10. 验证方程 $x\cdot 2^x=1$ 至少有一个小于 1 的正根.

第五节　MATLAB 软件简介

本节首先介绍 MATLAB 程序设计与应用的基础知识，包括 MATLAB 的操作界面，

MATLAB 语言的各种基本要素、MATLAB 基本运算符以及 MATLAB 函数等，然后进行函数、极限与连续运算实验.

一、MATLAB 基础知识介绍

MATLAB 是 MATrix LABoratory 的缩写，是由美国 Math Works 公司于 1982 年推出的一套高性能数值计算的可视化软件，不但可以解决数值计算问题，还可以解决符号演算问题，并且能够绘制函数图形. 具有语言简单易学易用，代码短小高效，计算功能强大，绘图方便，可扩展性强等特点. 已广泛地应用于教学和科研领域.

MATLAB 安装成功后，开始/程序/MATLAB 菜单项（或双击桌面上的 MATLAB 图标快捷键）即可打开 MATLAB 界面（如图 1.14 所示）. 若要退出，单击右上关闭按钮便可.

图 1.14

在图 1.14 中，第一栏为 MATLAB 标题栏，第二栏为菜单栏，第三栏为工具栏. 工具栏中，除了一般的 Windows 程序通用按钮之外，有 1 个仿真程序启动按钮，另外，在最右端还有一个当前目录窗口. 在工具栏下面是命令编辑区，利用菜单栏中的“View 菜单”中的命令可打开或关闭多个窗口. 图 1.14 已打开多个窗口.

1) 命令窗口（Command Window）. 在该窗口输入命令，回车实现计算或绘图等功能. 符号“≫”表示等待用户输入. 在命令窗口利用功能键，可使操作简便快捷. 一些常用的功能键如表 1.9 所示.

表 1.9 命令窗口常用功能键

功能键	功能	功能键	功能
↑,Ctrl - P	重调前一行	Home, Ctrl - A	光标移到行首
↓,Ctrl - N	重调下一行	End, Ctrl - E	光标移到行尾
←,Ctrl - B	光标左移一个字符	Esc	清除一行命令
→,Ctrl - F	光标右移一个字符	Del, Ctrl - D	删除光标右边字符
Ctrl -←	光标左移一个字	Backspace	删除光标左边字符
Ctrl -→	光标右移一个字	Ctrl - K	删除到行尾

2）工作空间窗口(Work Space). 运行 MATLAB 命令时所产生的变量都被加入到工作空间，该窗口可以显示变量的名称、数值、尺寸、最小值和最大值等，并用不同的图标表示数据类型，并可对变量及其赋值进行修改.

3）命令历史窗口(Command History). 该窗口显示所有执行过的命令，当选定某个命令后可以直接双击或按 F9 键执行该命令.

4）当前目录窗口(Current Driectory). 显示当前目录下的文件信息.

5）帮助导航(?). 单击可以打开帮助浏览器

MATLAB 是一种交互式语言，输入命令即给出运算结果. 当命令窗口出现提示符≫时，表示 MATLAB 已准备好，可以输入命令、变量或运行函数.

二、MATLAB 基本运算

1. 算术运算符

MATLAB 中提供的常用算术运算符如表 1.10 所示.

表 1.10　常用算术运算符

+	加	\	左除
−	减	/	右除
*	乘	^	乘方

【说明】 /与\这两种符号对数值操作时，作用相同，如 1/2 与 2\1，其结果都是0.5；但对矩阵操作时，它们却表达了两种完全不同的操作.

算术运算按照从左到右的顺序进行. 幂运算具有最高优先级，乘、除法具有相同的次优先级，加、减有相同的最低优先级，括号可用来改变优先次序.

【例 1.44】 用 MATLAB 软件计算式子 $\dfrac{4\times 5.23^2+3\times(4.38+6.27)^3}{3.5+4.8}$ 的值.

MATLAB 输入命令	MATLAB 输出结果
(4*5.23^2+3*(4.38+6.27)^3)/(3.5+4.8)	ans= 449.7904

正如上面运算结果所示，在默认情况下，MATLAB 显示小数点后 4 位小数，可以利用 format 命令改变显示格式，以 e 为例，常用的格式如表 1.11 所示.

表 1.11　MATLAB 数据显示格式

命　令	说　明	显　示
format short	小数点后 4 位	2.718 3
format long	小数点后 15 位	2.718 281 828 459 046
format bank	小数点后 2 位	2.72
format short e	小数点后 4 位科学计数法	2.718 3e+000
format long e	小数点后 15 位科学计数法	2.718 281 828 459 046e+000
format rat	最接近的有理数	1 457/536

2. MATLAB 变量

1）变量赋值形式

MATLAB 语句由表达式和变量组成，变量赋值通常有两种形式：

$$\boxed{\text{变量}=\text{表达式}} \qquad \boxed{\text{表达式}}$$

其中，“＝”为赋值符号，将右边表达式的值赋给左边变量. 当不指定输出变量时，MATLAB 将表达式的值赋给临时变量 ans.

同一行可以有多个表达式，用分号(不显示结果)或逗号(显示结果)分隔.

2）变量命名规则

(1) 变量名必须以字母开头，后面可跟字母、数字或下划线. 例如 x，y1，z_2.

(2) 变量名区分字母的大小写. 例如 a 与 A 是两个不同的变量.

(3) 变量名不能超过 63 个字符.

在 MATLAB 中，一些常用的特殊变量如表 1.12 所示.

表 1.12 MATLAB 的常用特殊变量

变量名	说　明
pi	圆周率
inf	正无穷大
eps	最小浮点数 2^(−52)
i，j	虚数单位
NaN	非数值，0/0，inf/inf，0 * inf 等

3）数值变量

例如，将 0.182 赋值给变量 x，将 0.235 赋值给变量 y 可如下操作：

MATLAB 输入命令	MATLAB 输出结果
x=0.182，y=0.235	x= 　　0.182 0 y= 　　0.235 0

输入时，如 0.128 也可简写成.128；若 x 后面加分号，不显示 x 的数值，只显示 y 的数值.

4）数组(向量)的建立

数组建立的常用方式有两种：① 在方括号中依次输入元素，中间用逗号或空格分开. ② 利用符号“:”建立等差数组. 例如

MATLAB 输入命令	MATLAB 输出结果
a=[1，−5，0，1/3，pi]	a= 　　1.000 0 −5.000 0　0　0.333 3　3.141 6

这里建立了一个 1×5 的数组 a，在工作空间窗口能看到 a 的信息. 若要使用其中某个元素，可在括号中输入列号(即第几个元素)，例如取第 2 个元素

MATLAB输入命令	MATLAB输出结果
a(2)	ans= 　　−5

用符号“:”建立等差数组的格式：

$$\boxed{\text{x=初值:步长:终值}}$$

例如建立一个1至6,公差(步长)为1的等差数组：

MATLAB输入命令	MATLAB输出结果
a=1:1:6	a= 　　1　2　3　4　5　6

步长为1时可省略,步长也可以为负数.

5) 数组的运算

利用MATLAB运算符与函数可以快速完成对数组元素的运算.数组元素的乘除与乘幂运算必须在运算符前加点,称为“点”运算,如表1.13所示.

表1.13　“点”运算符

命　令	说　明
.*	“点”乘
./	“点”除
.^	“点”乘幂

【例1.45】　设 $f(x)=x^2-\dfrac{1}{x}$,求 $f(1),f(2),\cdots,f(5)$.

MATLAB输入命令	MATLAB输出结果
x=1:5; f=x.^2−1./x	f= 　　0　3.5000　8.6667　15.7500　24.8000

如果要计算到 $f(100)$,只需把第一句中的5改成100.

3. 符号变量

MATLAB不仅能做数值运算,也能进行符号运算.MATLAB的符号运算是通过符号工具箱(Symbolic Math Toolbox)来实现的.

1) 符号变量与符号表达式

首先可以利用syms命令定义一个或多个符号变量,进而建立所需的符号表达式(符号变量).在建立多个符号变量,可依次输入,中间用空格分开.

【例1.46】　建立符号表达式 $y=ax-\dfrac{b}{x^2}+5$.

MATLAB输入命令	MATLAB输出结果
syms x a b y=a*x−b/x^2+5	y= 　　a*x−b/x^2+5

这里一共有4个符号变量,第一行定义了3个,第二行的y是由表达式赋值定义的符号变量.在工作空间窗口双击y,打开变量编辑器如图1.15所示,比较符号变量与数值变量的区别.

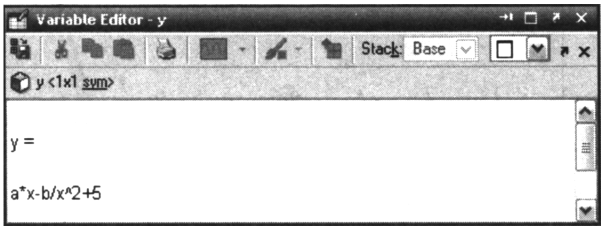


图 1.15

2）符号变量的替换

符号工具箱提供的替换命令 subs 如表 1.14 所示.

表 1.14　符号替换命令

命　令	功　能
subs(s,old,new)	将符号表达式 s 中的变量 old 用 new 代替

表中的 old 是符号变量;new 可以是符号变量,也可以是数值变量. 利用替换命令可以方便地计算函数数值.

4. 字符变量

在 MATLAB 中用单引号括起来的一串字符称为字符串,字符串赋给变量,就构成字符变量. 例如

MATLAB 输入命令	MATLAB 输出结果
'hello'	ans= hello

5. 常用函数

MATLAB 具有大量内部函数,用户只要输入相应的函数名就能直接调用,非常方便. 常用的函数如表 1.15 所示.

表 1.15　MATLAB 常用函数

命　令	功　能	命　令	功　能
sin(x)	正弦函数	asin(x)	反正弦函数
cos(x)	余弦函数	acos(x)	反余弦函数
tan(x)	正切函数	atan(x)	反正切函数
cot(x)	余切函数	acot(x)	反余切函数
sec(x)	正割函数	asec(x)	反正割函数
csc(x)	余割函数	acsc(x)	反余割函数
sqrt(x)	平方根	log(x)	自然对数
abs(x)	绝对值	log10(x)	以 10 为底的对数
exp(x)	以 e 为底的指数	log2(x)	以 2 为底的对数
pow2(x)	以 2 为底的指数	sign(x)	符号函数

函数的调用格式为

$$\boxed{\text{函数(变量)}}$$

【例 1.47】 计算$\frac{\sqrt{\sin(|x|+|y|)}}{x^2+y^2}$的值，其中 $x=-1.42, y=0.52$.

MATLAB 输入命令	MATLAB 输出结果
x=−1.42;y=0.52; sqrt(sin(abs(x)+abs(y)))/(x^2+y^2)	ans= 0.4223

输入时要注意函数名后带括号；计算数值的方法可以有多种，例如命令 3^0.5 与 sqrt(3)所产生的效果是相同的.

第六节　函数、极限与连续运算实验

一、实验目的

(1) 会利用 MATLAB 求函数极限.

(2) 会利用 MATLAB 作函数图形.

(3) 会利用 MATLAB 判断函数的连续性.

二、实验指导

(1) 利用 MATLAB 求极限

在 MATLAB 符号工具箱中求极限的指令是 limit，其调用格式如表 1.16 所示.

表 1.16　极限运算符

命　令	功　能
limit(f,x,a)	求函数 f 当 $x\to a$ 时的极限
limit(f,a)	求函数 f 中的自变量(系统默认的自变量为 x)趋于 a 时的极限
limit(f)	求函数 f 中的自变量趋于 0 时的极限
limit(f,x,a,'left')	求函数 f 当 $x\to a$ 时的左极限
limit(f,x,a,'right')	求函数 f 当 $x\to a$ 时的右极限

【例 1.48】 求下列函数的极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)$；　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{x+1}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}$；　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sin x}$.

序号	MATLAB 输入命令	MATLAB 输出结果
(1)	syms x limit((1/(x−1)−2/(x^2−1)),x,1)	ans= 1/2
(2)	syms x limit(((2*x+1)/(2*x−1))^(x+1),x,inf)	ans= exp(1)
(3)	syms x limit(1/x,x,0,'right')	ans= Inf
(4)	syms x limit(1/sin(x))	ans= NaN

(2) 利用 MATLAB 作函数的图形和判断函数连续性

绘图命令“fplot”专门用于绘制一元函数曲线. 格式如下：

fplot('fun',[a, b])

功能:绘制区间[a, b]上函数 y=fun 的图形.

【例 1.49】 绘出函数(1) $y=x+\sin x$;(2) $y=x^2e^{-x^2}$ 图形,说明其奇偶性,并根据图形判断这些函数在[−2, 2]上是否连续.

解 (1) 输入：

≫fplot('x+sin(x)',[−5, 5])

按“回车”键,出现如图 1.16 所示窗口.

(2) 输入：

≫fplot('x^2 * exp(−x^2)',[−6, 6])

按“回车”键,出现如图 1.17 所示窗口.

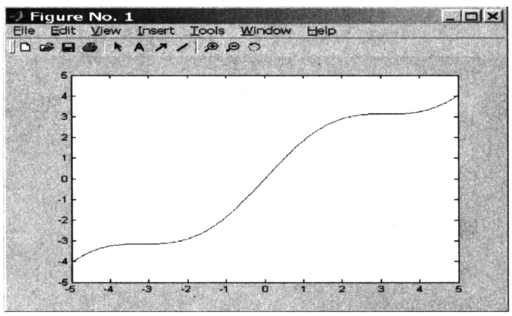


图 1.16

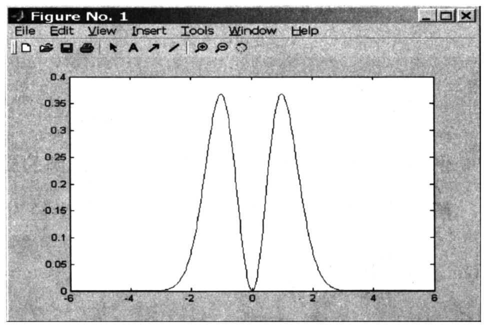


图 1.17

从以上两图形可知,$y=x+\sin x$ 是奇函数,$y=x^2e^{-x^2}$ 是偶函数,且在区间[−2, 2]上都是连续的.

【例 1.50】 判断函数 $y=2x^2-3$ 在点 $x=1$ 处的连续性.

解 方法一,作图法判断. 输入：

≫fplot('2 * x^2−3',[0, 2])

按“回车”键,出现如图 1.18 所示窗口.

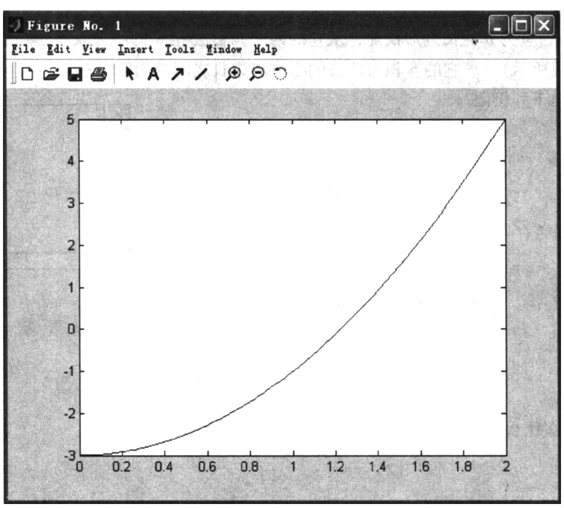


图 1.18

观察图 1.18 可知，函数在点 $x=1$ 点是连续的.

方法二，定义法. 输入：

```
≫limit(2*x^2-3, x, 1)
ans=
  -1
≫2*1^2-3
```

显示结果为：

```
ans=
    -1
```

通过计算可知，$\lim\limits_{x\to 1}(2x^2-3)=-1=f(1)$，所以函数在点 $x=1$ 是连续的.

实验训练题（一）

1. 利用 MATLAB 计算下列各极限.

（1）$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{\sqrt{x-1}-1}$；　　（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\ln(2+x)}$；

（3）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(1-x)}{1-x^2}$；　　（4）$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{5\sec x}$；

（5）$\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^{x+2}$；　　（6）$\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^{x}$.

2. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-1, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x+3, & x>1\end{cases}$ 在点 $x=1$ 处的连续性，并利用 MATLAB 进行验证.

本 章 小 结

1. 基本概念

函数、基本初等函数、初等函数、分段函数、常用的经济函数.

数列的极限、函数的极限、函数的左(右)极限、无穷小、无穷大.

函数的连续性、函数的间断点、闭区间上连续函数的性质.

2. 基本知识

（1）函数

① 基本初等函数

常值函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数.

② 初等函数

由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成，并可用一个式子表示的函数，称为初等函数.

（2）常用的经济函数

需求函数、供给函数、总成本函数、收入函数、利润函数.

（3）函数的极限

① 函数极限与函数左右极限的关系

$$f(x_0^-)=f(x_0^+)=A \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)=A.$$

② 无穷小和无穷大

无穷小的运算性质和无穷小的比较.

③ 极限的四则运算

设 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，那么

（Ⅰ）$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm \lim g(x)=A\pm B$；

（Ⅱ）$\lim f(x)\cdot g(x)=\lim f(x)\cdot \lim g(x)=A\cdot B$；

（Ⅲ）$\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}(B\neq 0)$.

④ 复合函数的极限法则

若函数 $y=f(x)$ 与 $u=\varphi(x)$ 满足如下两个条件：

(1) $\lim\limits_{u\to a} f(u)=A$；

(2) 当 $x\neq x_0$ 时，$\varphi(x)\neq a$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$.

则 $\lim\limits_{x\to x_0} f[\varphi(x)]=\lim\limits_{u\to a} f(u)=A$.

⑤ 两个重要极限

（Ⅰ）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$；

（Ⅱ）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$（或 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$）.

⑥ 连续复利

⑦ 永续年金

(4) 函数的连续性

理解函数在一点连续的定义，它包括三部分内容：

① $f(x)$ 在 x_0 的一个邻域内有定义；

② 在 x_0 存在极限；

③ 极限值等于 x_0 点的函数值.

(5) 函数间断点的分类

$$\text{间断点}\begin{cases}\begin{array}{l}\text{第一类间断点}\\ \text{（左、右极限都存在）}\end{array}\begin{cases}\text{可去间断点}\\ \text{（左、右极限相等）}\\ \text{跳跃间断点}\\ \text{（左、右极限不相等）}\end{cases}\\ \begin{array}{l}\text{第二类间断点}\\ \text{（左、右极限至少一侧不存在）}\end{array}\begin{cases}\text{无穷间断点}\\ \text{（极限不存在为无穷大）}\\ \text{振荡间断点}\\ \text{（极限不存在，且不是无穷大）}\end{cases}\end{cases}$$

(6) 闭区间上连续函数的性质.