策划编辑 马国宝
责任编辑 张春龙
责任校对 李 军
封面设计 张 伟
责任印制 张艳芳

ISBN 978-7-5725-0077-0
定价：68.00 元（上、下册）

“十四五”职业教育国家规划教材
高等数学（第2版）（下册）
郑兆顺 常瑞玲 主编
河南科学技术出版社

“十四五”职业教育国家规划教材

高等数学（第 2 版）

GAODENG SHUXUE

（下册）

郑兆顺 常瑞玲 主编

中原出版传媒集团
中原传媒股份公司
河南科学技术出版社

• 教学课件
• 电子教案
• 考试题库

“十四五”职业教育国家规划教材

高等数学

GAODENG SHUXUE

（第 2 版）

（下册）

郑兆顺　常瑞玲　主　编

郭　新　刘艳平　宋林锋　马秀芬　杨信超　田　州　副主编

河南科学技术出版社

·郑州·

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/郑兆顺,常瑞玲主编. —2 版. —郑州:河南科学技术出版社, 2020.9(2023.7 重印)

ISBN 978 - 7 - 5725 - 0077 - 0

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①郑… ②常… Ⅲ. ①高等数学 - 高等学校 - 教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2020)第 146716 号

出版发行:河南科学技术出版社

地址:郑州市郑东新区祥盛街 27 号　　邮政编码:450016

电话:(0371)65788641　65788859

网址:www.hnstp.cn

策划编辑:马国宝

责任编辑:张春龙

责任校对:李　军

封面设计:张　伟

责任印制:张艳芳

印　　刷:郑州豫兴印刷有限公司

经　　销:全国新华书店

开　　本:787 mm×1 092 mm　1/16　　**印张**:26.25　　**字数**:630 千字

版　　次:2020 年 9 月第 2 版　　2023 年 7 月第 8 次印刷

定　　价:68.00 元(上、下册)

序

郑兆顺、常瑞玲等编写的《高等数学》是结合多年职业院校高等数学教育研究成果及精品课建设、在线课建设和一线教学实践经验精心编写而成的，令人耳目一新，其特色主要体现在如下几个方面。

1. 充分发挥高等数学技术教育功能和文化教育功能，突出高等数学教育教学的本质。

2. 注重教学方法论的指导地位，把提高学生的一般科学素养、文化修养及形成和发展数学品质作为高等数学的教育目标。

3. 高等数学要为学习相关专业课程和后继课程服务，为培养学生的思维能力服务，为学生处理和解决相关实际问题服务，为学生的可持续发展服务。

4. 注重概念方法的教学，强化基本概念脱胎于实际的过程和主要方法，在适度注意数学的理论性、严密性、系统性的基础上返璞归真，尽量使数学知识生活化、通俗化、简单化。

5. 注重培养学生用数学思想和方法分析、解决问题的能力，特别是用数学的思想、概念、方法，消化吸收“工程”概念和“工程”原理的能力，把实际问题转化为数学模型的能力，以及求解数学模型的能力。

6. 在例题的处理上，层次分明、衔接得当、前后贯通，特别是穿插的思考问题，对打破学生的思维定式很有益处。

7. 增加数学实验模块，提升学生应用能力。数学实验模块主要是每章所学计算方法在数学软件中的实现，目的是结合专业特点，更好地提高数学建模能力及用数学软件解决实际问题的能力。

8. 本着教材建设是树人立魂的大事之理念，高等数学教材承载着文化传承的使命，在每一章的后面增加了阅读材料——数学史话。该模块让学生了解所学知识的来源、发展及相应的数学家的故事，以提高学生的数学素养和人文素养。

显而易见，作者对《高等数学》的编写下了功夫，做了努力，期望本书在使用过程中能日臻完善。

杨世明

全国数学科学方法论研究交流中心副主任

前言

PREFACE

本书是编者根据职业院校对高等数学课程教学基本要求,结合 20 多年“MM 教育方式”的研究成果和近 30 年的一线教学实践经验,经过认真研究、集思广益,通力合作,精心编写而成的。编者将精品课程建设、精品资源共享课程建设、精品在线课程建设与教材建设有机结合,精心锤炼。本书的所有创新点体现在每个细节里,体现在处理每个知识点的“匠心”上。本书力求在概念中提倡返璞归真,在定理引入时合情合理,在方法中重视策略应变,在应用中强调广泛应用。因此,本教材内容的很多地方在同类教材中独树一帜,新颖易学。

本书分上下两册,上册共七章,内容包括预备知识、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分和常微分方程;下册共七章,内容包括级数、向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、线性代数、概率论与数理统计初步理论。标有“*”的内容可根据不同专业选学。

我们编写的《高等数学》教材在整个使用进程中,是紧跟我校人才培养模式的变革、专业调整和学科建设的发展而逐渐完善、成熟的。本书自 2008 年出版至今,根据教学研究目标和师生反馈意见,已经五改其稿,每次都做了大量的修改、补充和完善,目前是第五稿。

囿于编者水平,错误和疏漏恐在所难免,还请广大读者多提宝贵意见,以便精益求精,使本书日臻完善。

编者

2020 年 9 月

目录

第八章　级数

以前我们解决了有限个数的求和问题及有限个函数和的极限、连续、微分、积分等问题，但对于无限个数的求和或无限个函数和的连续、极限、微分、积分等问题，其结果会是怎么样呢？这就是本章要讨论的问题，即级数理论. 级数理论在自然科学、工程技术及经济和数学本身都有广泛的应用.

第一节　数值级数

一、数值级数及收敛与发散的概念

定义 8.1　设有数列 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \tag{8.1}$$

称为常数项级数，又称为数值级数. 数列 $\{a_n\}$ 的第 n 项又称为级数的一般项或通项.

例 1　(1) 等比数列 $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$ 对应级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$.

(2) 一般等比数列 $\{aq^n\}$ 对应级数 $\sum_{n=1}^{\infty} aq^n = aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots$ ($a \neq 0$, q 是公比)，称为等比级数(几何级数).

(3) 数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ 对应级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$，称为调和级数.

(4) 数列 $\left\{\frac{1}{n^p}\right\}$ 对应级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$，称为广义调和级数.

(5) 数列 $\left\{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right\}$ 对应级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln 2 + \ln \frac{3}{2} + \cdots + \ln \frac{1+n}{n} + \cdots$.

(6) 数列 $\left\{(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right\}$ 对应级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \cdots$.

(7) 数列 $\{n\}$ 对应级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + \cdots + n + \cdots$.

(8) 数列 $\{(-1)^{n-1}\}$ 对应级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + (-1)^{n-1} + \cdots$.

级数是无穷多个数求和的问题，涉及无限的概念，极限是解决这类问题的一般方法.

定义 8.2 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的前 n 项和，即

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \tag{8.2}$$

称为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的前 n 项部分和. 数列 $\{S_n\}$ 称为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和数列.

定义 8.3 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 有极限 S，即 $\lim_{n\to\infty} S_n = S$，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，S 称为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的和，表示为

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = S. \tag{8.3}$$

否则，如果 $\lim_{n\to\infty} S_n$ 不存在，则称此级数发散.

例 2 如例 1 中的(1)，有 $S_n = \dfrac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}} = 1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$，

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = 1.$$

所以级数(1)收敛，即

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots = 1.$$

而例 1 中的(8)是发散的. 事实上，$S_n = \begin{cases} 1, n \text{ 为奇数}, \\ 0, n \text{ 为偶数}. \end{cases}$

例 3 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ 的和.

解 前 n 项部分和

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \\ &= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right), \end{aligned}$$

因此 $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2n+1}\right) = \dfrac{1}{2}$，

故该级数收敛，且其和 $S = \dfrac{1}{2}$.

例 4 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ 是发散的.

证明 $S_n = \ln 2 + \ln\dfrac{3}{2} + \ln\dfrac{4}{3} + \cdots + \ln\dfrac{n+1}{n}$

$$=\ln2+\ln3-\ln2+\ln4-\ln3+\cdots+\ln(n+1)-\ln n=\ln(n+1),$$

因此$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\ln(n+1)=+\infty$,

故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$发散.

二、数值级数的性质

定理 8.1 (柯西收敛准则)数值级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛$\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbf{N}_+,\forall n>N,\forall p\in\mathbf{N}_+$,有

$$|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}|<\varepsilon.$$

证明略.

该定理说明级数敛散性与级数充分远处的任意片段有关,而与级数前面有限项无关.

性质 1 去掉、增加或改变级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$的有限项,所得新级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$与原级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$的敛散性相同.

性质 2 (收敛的必要条件)若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛,则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

证明 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛于$S$,则其部分和数列的极限为$S$,即$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}S_{n-1}=S$,所以$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=S-S=0$.

定理 8.2 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$是两个收敛级数,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)$也收敛,并且有

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\pm\sum_{n=1}^{\infty}b_n.$$

定理 8.3 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛,$C$为常数,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}Ca_n$也收敛,并且有

$$\sum_{n=1}^{\infty}Ca_n=C\sum_{n=1}^{\infty}a_n.$$

以上两定理均可用定义证明,这里略.

习题8-1

1. 写出下列级数的前五项.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4\cdot7\cdot10\cdot\cdots\cdot(3n+1)}{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[1-\dfrac{(n-1)^2}{n+1}\right]$.

2. 写出下列级数的一个通项.

(1) $-1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}-\cdots$;　　(2) $\dfrac{\sqrt{x}}{2}+\dfrac{x}{2\cdot4}+\dfrac{x\sqrt{x}}{2\cdot4\cdot6}+\dfrac{x^2}{2\cdot4\cdot6\cdot8}+\cdots$;

(3) $-\dfrac{1}{2}+0+\dfrac{1}{4}+\dfrac{2}{5}+\dfrac{3}{6}+\cdots$;　　(4) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{5}+\dfrac{5}{10}+\dfrac{7}{17}+\cdots$;

(5) $1-\frac{8}{2}+\frac{27}{6}-\frac{64}{24}+\cdots$.

3. 判断下列级数的敛散性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$; (3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}$; (5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3n+1}$; (6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$.

第二节 正项级数敛散性的判别

定义 8.4 给定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$,当 $a_n\geqslant 0(n=1,2,\cdots)$时,称为正项级数;当 $a_n\leqslant 0(n=1,2,\cdots)$时,称为负项级数.

正项级数与负项级数统称为同号级数. 由定理 8.3,同号级数敛散性只需讨论正项级数即可.

一、比较判别法

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 为正项级数,则部分和数列$\{S_n\}$为单调增数列. 由上册极限存在公理可得下面公理.

公理 正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛$\Leftrightarrow$它的部分和数列$\{S_n\}$有上界.

定理 8.4 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 均为正项级数,且 $a_n\leqslant b_n(n=1,2,\cdots)$,则

(1)若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛,则正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收敛;

(2)若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散,则正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 也发散.

推论 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 都是正项级数,$b_n>0$,且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=d(0\leqslant d\leqslant+\infty),$$

则

(1) $0<d<+\infty$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 同时收敛或同时发散;

(2) $d=0$ 时,若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收敛;

(3)$d=+\infty$ 时,若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 也发散.

例 1　判别下列级数的敛散性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\dfrac{1}{n}$;　　(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2n^2+n+1}$.

解　(1)当 $p=1$ 时,由于 $\ln(1+x)<x(x>0)$,令 $x=\dfrac{1}{n}$,则有

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n},$$

由本章第一节例 4 知,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$发散,所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$也发散.

当 $p<1$ 时,由于$\dfrac{1}{n^p}>\dfrac{1}{n}$,且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散,所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$发散.

当 $p>1$ 时,级数收敛.

事实上,将$\dfrac{1}{n^p}$中的 n 换成 x,得函数$\dfrac{1}{x^p}$,它在$(0,+\infty)$上的图像如图 8-1 所示,此 p 级数从第二项起的前 n 项和为$\dfrac{1}{2^p}+\dfrac{1}{3^p}+\cdots+\dfrac{1}{n^p}$,恰为阴影的面积,该面积小于在区间$[1,n]$上曲线$y=\dfrac{1}{x^p}$所对应的面积,所以

$$\begin{aligned}S_n&=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}\\&<1+\int_1^n\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x=1+\frac{1}{1-p}\left(\frac{1}{n^{p-1}}-1\right)\\&<1+\frac{1}{p-1}.\end{aligned}$$

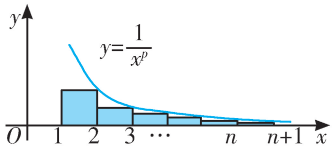

图 8-1

可知$\{S_n\}$有上界,故 $p>1$ 时,级数收敛.

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$,当 $p>1$ 时收敛;当 $p\leqslant1$ 时发散.

(2)由于$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1$,且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散,由推论知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{1}{n}$发散.

(3)由于$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{2n^2+n+1}}{\frac{1}{n^2}}=\dfrac{1}{2}$,而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$收敛,由推论知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n^2+n+1}$收敛.

二、比式判别法与根式判别法

定理 8.5 （比式判别法）设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(a_n>0)$，且 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l$，则

（1）当 $l<1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；

（2）当 $l>1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

定理 8.6 （根式判别法）设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(a_n>0)$，且 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=l$，则

（1）当 $l<1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；

（2）当 $l>1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

注：定理 8.5 和定理 8.6 均没有 $l=1$ 时的讨论，事实上，当 $l=1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 可能收敛也可能发散，例如 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$，求得 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$，$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$，但 $p>1$ 时收敛，$p\leqslant 1$ 时发散.

例 2 判别下列级数的敛散性.

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}$；　（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$；　（3）$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$；　（4）$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}$.

解 （1）方法一：由于 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{2^n}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{(n+1)^2}=2>1$，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}$ 发散.

方法二：由于 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^{\frac{2}{n}}}=2>1$，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}$ 发散.

（2）由（1），显然 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2}<1\left(或 \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\frac{1}{2}<1\right)$，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$ 收敛.

（3）方法一：由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}>1$，

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ 发散.

方法二：由于 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{(n+1)^2}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}=\mathrm{e}>1$，

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ 发散.

说明：求这个极限较为复杂，有兴趣的同学可以在课下探讨一下.

（4）由（3），$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\frac{1}{\mathrm{e}}<1\left(或 \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{\mathrm{e}}<1\right)$，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}$ 收敛.

通过以上例题可见，选择比式与根式判别法时，对不同题目来说难易程度有很大差异.

习题8-2

1. 判断下列正项级数的敛散性.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$；　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n(n+1)}$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$；　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}(a>0)$；

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a+bn}(a,b>0)$；　(6) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n^2+a}-\sqrt{n^2-a})(a>0)$；

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2n^4-1}$；　(8) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{n^2}$；

(9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}$；　(10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^2\cdot 2^n}$.

2. 试在$(0,+\infty)$内讨论x在什么区间取值时，下列级数收敛.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$；　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}n^3\left(\frac{x}{2}\right)^n$.

第三节　任意项级数

一、交错级数及其敛散性的判别法

任意项级数敛散性的判别相对较复杂，本节只给出特殊任意项级数——交错级数的判别法.

定义 8.5　设$a_n>0(n=1,2,\cdots)$，则称

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=a_1-a_2+a_3-\cdots+(-1)^{n-1}a_n+\cdots \tag{8.4}$$

为交错级数.

定理 8.7　（莱布尼茨判别法）设有交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$满足条件：

(1) $a_n\geqslant a_{n+1}(n=1,2,\cdots)$，

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，

则交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$收敛，且其和$S\leqslant a_1$.

证明略.

例 1　判别下列交错级数的敛散性.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$；　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$.

解 (1)因为 $a_n=\frac{1}{n}>\frac{1}{n+1}=a_{n+1}(n=1,2,\cdots)$,且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$

由莱布尼茨判别法可得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$收敛.

(2) 因为 $a_n=\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{1}{\sqrt{n+1}}=a_{n+1}(n=1,2,\cdots)$,且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0.$

由莱布尼茨判别法可得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$收敛.

二、绝对收敛与条件收敛

定义 8.6 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$收敛,则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛.

若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$发散,则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛.

例如,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$绝对收敛,而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$条件收敛.

定理 8.8 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 必定收敛.

例 2 判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{3^n}$的敛散性.

解 由于 $\left|\frac{\sin n}{3^n}\right|\leqslant\frac{1}{3^n}$,而等比级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$收敛,所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin n}{3^n}\right|$收敛,由定理 8.8 可得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{3^n}$收敛.

例 3 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n^2}$是条件收敛的.

证明 由于 $\left|(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n^2}\right|=\frac{2n+1}{n^2}$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2}$是正项级数,且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{2n+1}{n^2}}{\frac{1}{n}}=2$,而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散,所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2}$发散,故该级数非绝对收敛.

又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n}{n^2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$,而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2}{n}$与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$均收敛,所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n^2}$是收敛的.

综上所述,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n^2}$是条件收敛的.

习题8-3

1. 在下列级数中,条件收敛的是(　　).

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n+1}$　　B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$

C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}$　　D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+1)}$

2. 设常数 $k>0$,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{k+n}{n^2}$(　　).

A. 发散　　B. 绝对收敛

C. 条件收敛　　D. 收敛或发散与 k 的取值有关

3. 判断下列级数是否收敛,如果是收敛级数,指出其是绝对收敛还是条件收敛.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\cdot 2^n}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sqrt{n}}{n+1}$;　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2}{3}\right)^n$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{\sqrt{n^3}}$;　　(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos na}{n^3}$($a$ 是与 n 无关的常数);

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n+2}{(n+1)\sqrt{n}}$;　　(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{2n-1}$.

4. 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p}$的敛散性($p>0$).

第四节　幂级数

一、函数项级数的概念

前面讨论了数项级数,它的每一项均为常数,解决的问题是无穷个数的求和(和存在)问题. 现在再考虑每一项都是函数的级数.

一般地,由定义在同一区间 I 内的函数序列构成的无穷级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)=f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x)+\cdots(x\in I)\tag{8.5}$$

称为函数项级数.

例如,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin x}{n^2}=\frac{\sin x}{1^2}+\frac{\sin x}{2^2}+\cdots+\frac{\sin x}{n^2}+\cdots(x\in\mathbf{R}),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}+\cdots(x\in\mathbf{R}),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots (x \in \mathbf{R}),$$

均为定义在 $\mathbf{R}$ 内的函数项级数.

若 $x_0 \in I$，$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$（数值级数）收敛，称 x_0 为函数项级数(8.5)的收敛点.

若 $x_1 \in I$，$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_1)$（数值级数）发散，称 x_1 为函数项级数(8.5)的发散点.

函数项级数(8.5)的所有收敛点构成的集合称为函数项级数(8.5)的收敛域，记作 $D(D \subseteq I)$. 所有发散点构成的集合称为函数项级数(8.5)的发散域. 在收敛域 D 内，对 $\forall x \in D$，存在函数 $f(x)$，使 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$，称 $f(x)$ 为 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 的和函数.

记 $S_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)$，则称 $S_n(x)$ 为 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 的前 n 项部分和函数，从而有

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = f(x), x \in D.$$

二、幂级数及其收敛半径

函数项级数中，最简单最常用的一类函数项级数是关于 x 或 $(x-a)$ 的幂级数，分别表示为

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_x x^n + \cdots, \tag{8.6}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + \cdots, \tag{8.7}$$

其中 $a_i(i=1,2,\cdots)$ 称为幂级数的系数.

在式(8.7)中令 $y=(x-a)$，可得到式(8.6)，故以下我们重点讨论式(8.6).

例如，

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^n}{n} + \cdots,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + \cdots,$$

均为幂级数.

下面讨论幂级数的收敛性，首先，当 $x=0$ 时幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 一定收敛，即幂级数不会出现对任何 x 都不收敛的情形；其次，幂级数的收敛域总是以原点为中心的对称区间，这一点由下面的定理即可得出.

> **定理 8.9** (1)若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x_0 \neq 0$ 处收敛，则当 $|x| < |x_0|$ 时绝对收敛；
> (2)若在 x_1 处发散，则当 $|x| > |x_1|$ 时发散.

证明 (1)由数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ 收敛，故有 $\lim_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$，于是存在一个正数 M，使得

$|a_n x_0^n| \leqslant M(n=0,1,2,\cdots)$，故对任意满足$|x|<|x_0|$的 x，有

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \left|\frac{x^n}{x_0^n}\right| \leqslant M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n .$$

又 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} M\left|\dfrac{x}{x_0}\right|^n$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 也收敛.

(2)已知级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$ 发散，且$|x|>|x_1|$.

假设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛，则由(1)知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$ 也收敛，与已知矛盾，从而 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 发散.

由定理 8.9(1)可以得出结论：如果一个幂级数在 $x_0 \neq 0$ 处收敛，那么它就有一个以原点为中心的对称收敛区间，即存在一个正数 R，当$|x|<R$ 时，幂级数绝对收敛；当$|x|>R$ 时，幂级数发散(当$|x|=R$ 时可能收敛也可能发散). 此时称 R 为幂级数的收敛半径. 当幂级数只在 $x=0$ 处收敛时，记 $R=0$. 当对 $\forall x \in (-\infty, +\infty)$，幂级数均收敛时，记 $R=+\infty$.

关于收敛半径有下列定理.

定理 8.10　设有幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l$(或 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = l$)，则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径

$$R=\begin{cases}\dfrac{1}{l}, 0<l<+\infty, \\ +\infty, l=0, \\ 0, l=+\infty. \end{cases}$$

证明略.

例 1　求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^n}{n}$的收敛域.

解　由于$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left|\dfrac{(-1)^{n+1}}{n+1}\right|}{\left|\dfrac{(-1)^n}{n}\right|} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1} = 1$，$\therefore R=1$.

又当 $x=1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$是交错级数，收敛；当 $x=-1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n(-1)^n}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ 发散.

故幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^n}{n}$的收敛域为$(-1,1]$.

例 2　求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$ 的收敛半径.

解　由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{(n+1)!}}{\dfrac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0,$$

于是收敛半径 $R=+\infty$.

例 3 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n x^n$ 的收敛半径.

解 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^{n+1}}{n^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n(n+1)=+\infty$,

于是收敛半径 $R=0$.

例 4 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}(x-2)^n$ 的收敛半径并讨论其收敛域.

解 设 $y=x-2$,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}(x-2)^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}y^n$.

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{(n+1)^2}}{\dfrac{1}{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^2=1$,即幂级数的收敛半径为 1.

又当 $y=\pm1$ 时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{y^n}{n^2}$ 收敛,所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{y^n}{n^2}$ 的收敛域是 $[-1,1]$.

于是,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}(x-2)^n$ 的收敛域是 $[1,3]$.

三、幂级数的运算性质

在实际应用时,需要对幂级数进行加、减、乘、除以及求导、求积分等运算,下面介绍这类性质.

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ 的收敛半径分别为 R_1、R_2,其和函数分别为 $S_1(x)$、$S_2(x)$,又设 $R=\min\{R_1,R_2\}$,则有如下性质.

性质 1 加法与减法

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\pm\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)x^n=S_1(x)\pm S_2(x).$$

此时所得幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)x^n$ 的收敛半径为 R.

性质 2 乘法

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\cdot\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n=S_1(x)\cdot S_2(x).$$

此时所得幂级数的收敛半径为 R.

性质 3 连续性 若 $x_0\in(-R_1,R_1)$,则

$$\lim_{x\to x_0}S_1(x)=\lim_{x\to x_0}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\lim_{x\to x_0}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx_0^n.$$

性质 4 逐项求导 $\forall x\in(-R_1,R_1)$,有

$$S'_1(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}.$$

性质 5 逐项积分 $\forall x\in(-R_1,R_1)$,有

$$\int_0^x S_1(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

$\forall [a,b] \subset (-R_1, R_1)$，有

$$\int_a^b S_1(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n x^n \mathrm{d}x.$$

注　求导或求积分后所得幂级数的收敛半径不变，但收敛域端点的敛散性可能改变. 利用先求导再积分，或者是先积分再求导可以求某些幂级数的和函数.

例 5　求下列幂级数的和函数.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$;　　　　(2) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$.

解　(1) 不难得到它的收敛半径为 1. 设它的和函数是 $S(x)$，即 $\forall x \in (-1,1)$，有

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots.$$

逐项求导，有

$$S'(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \frac{1}{1+x}.$$

$\forall x \in (-1,1)$，对上式两端从 0 到 x 积分，得

$$\int_0^x S'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \ln(1+x),$$

即 $S(x) - S(0) = \ln(1+x)$，又 $S(0) = 0$，于是 $S(x) = \ln(1+x)$，即 $\forall x \in (-1,1)$，有

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots.$$

显然当 $x = 1$ 时，有

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots.$$

(2) 不难得到它的收敛半径为 1. 设它的和函数是 $S(x)$，即 $\forall x \in (-1,1)$，有

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots.$$

$\forall x \in (-1,1)$，对上式两端从 0 到 x 积分，得

$$\int_0^x S(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \mathrm{d}t + \int_0^x 2t\,\mathrm{d}t + \int_0^x 3t^2\,\mathrm{d}t + \cdots$$

$$= x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{x}{1-x},$$

对上式两端求导，有

$$S(x) = \frac{1}{(1-x)^2},$$

即 $\forall x \in (-1,1)$，有

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots.$$

习题8-4

1. 求下列幂级数的收敛域.

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} nx^n$; (2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$; (3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!x^n$; (4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n n^2}$; (6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^{n-1}}{\sqrt{n}}$; (7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n \cdot 2^n}$; (8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}(x-1)^n$.

2. 求下列幂级数的和函数.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n}(|x|<1)$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2nx^{2n-1}(|x|<1)$.

第五节　函数的幂级数展开

在上一节的例 5 中,我们得到了幂级数的和函数是一个初等函数,下面要讨论的问题是,给定一个函数可否把它表示成一个幂级数,因为幂级数是数学中最简单的一类函数,体现了简单表示复杂的思想. 这种表示法的重要应用之一是函数值的近似计算,同时也为解决函数问题提供一种新的方法.

一、麦克劳林公式

泰勒公式　如果函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的某个邻域内有直到 $(n+1)$ 阶导数,则在这个邻域内有公式

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+r_n(x), \quad (8.8)$$

其中,

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}(\xi \text{ 介于 } x \text{ 与 } x_0 \text{ 之间}), \quad (8.9)$$

称式(8.9)为拉格朗日型余项,式(8.8)为带有拉格朗日型余项的泰勒公式.

在式(8.8)中,令 $x_0=0$,得到,

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+r_n(x), \quad (8.10)$$

其中,$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}(0<\theta<1)$,称式(8.10)为带有拉格朗日型余项的麦克劳林公式.

式(8.8)、式(8.10)说明,任一函数只要有直到 $(n+1)$ 阶导数,就可等于某个 n 次多项式与一个余项的和.

若 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域有任意阶导数,则称

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots \quad (8.11)$$

为 $f(x)$ 的麦克劳林级数.

这里有两个问题需要解决:

(1)$f(x)$的麦克劳林级数是否收敛;

(2)若收敛是否收敛于$f(x)$.

令级数(8.11)的前$(n+1)$项和为$S_{n+1}(x)$,即

$$S_{n+1}(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,$$

则级数(8.11)收敛于$f(x)$的条件为$\lim\limits_{n\to\infty}S_{n+1}(x)=f(x)$.

于是,当$\lim\limits_{n\to\infty}r_n(x)=0$时,有$\lim\limits_{n\to\infty}S_{n+1}(x)=f(x)$;反之,若$\lim\limits_{n\to\infty}S_{n+1}(x)=f(x)$,必有$\lim\limits_{n\to\infty}r_n(x)=0$.

这说明,麦克劳林级数(8.11)以$f(x)$为和函数的充要条件是$\lim\limits_{n\to\infty}r_n(x)=0$. 这样得到函数$f(x)$的幂级数展开式,即

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots. \tag{8.12}$$

说明:(1)$f(x)$的幂级数表达式是唯一的(各阶导数值唯一);

(2)$f(x)$的定义域也是对应幂级数的收敛域.

若$f(x)$在$x=x_0$处存在任意阶导数且满足相应条件,则称

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots \tag{8.13}$$

为$f(x)$的泰勒级数.

在泰勒级数(8.13)中,令$x_0=0$,即为麦克劳林级数(8.12). 所以下面重点讨论函数的麦克劳林级数.

二、直接展开法

利用麦克劳林公式直接将函数展开成幂级数的方法,称为直接展开法.

例1　将函数$f(x)=e^x$展开成麦克劳林级数.

解　$f^{(n)}(x)=(e^x)^{(n)}=e^x(n=1,2,\cdots)$,$f^{(n)}(0)=e^0=1$. 由式(8.10),有

$$f(x)=e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{x^n}{n!}+r_n(x)\ (x\in\mathbf{R}),$$

其中,$r_n(x)=\dfrac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}(0<\theta<1)$.

因为$\theta x\leqslant|\theta x|\leqslant|x|$,所以有$e^{\theta x}<e^{|x|}$,因而有

$$|r_n(x)|=\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}|x|^{n+1}<\frac{e^{|x|}}{(n+1)!}|x|^{n+1}.$$

注意到对任一确定的x值,$e^{|x|}$是一个确定的数,而级数

$$1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

是绝对收敛的,因此$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}=0$,所以$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{|x|}}{(n+1)!}|x|^{n+1}=0$. 从而$\lim\limits_{n\to\infty}|r_n(x)|=0$. 故

$$f(x)=e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots(x\in\mathbf{R}).$$

例2　将正弦函数$f(x)=\sin x$展开成麦克劳林级数.

解 由 $f^{(n)}(x)=(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)(n=1,2,\cdots)$，可知

$f(0)=0, f'(0)=1, f''(0)=0, f'''(0)=-1,\cdots, f^{(2n)}(0)=0, f^{(2n+1)}(0)=(-1)^n$，从而有

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+r_n(x)(x\in\mathbf{R}),$$

可以证明

$$\lim_{n\to\infty}r_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\left(\theta x+\frac{n+1}{2}\pi\right)}{(n+1)!}x^{n+1}=0(0<\theta<1),$$

所以 $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots(x\in\mathbf{R})$.

三、间接展开法

前面已经给出了函数$\frac{1}{1+x}$，e^x，$\sin x$ 的展开式，应用幂级数的性质还可以求出许多函数的幂级数展开式. 这种求函数幂级数的方法称为间接展开法.

例 3 将下列函数分别展开为麦克劳林级数.

(1)$f(x)=\ln(1+x)$； (2)$g(x)=\cos x$； (3)$h(x)=\arctan x$.

解 (1)因为 $\ln(1+x)=\int_0^x\frac{1}{1+t}\mathrm{d}t$，而

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots(|x|<1),$$

将上式两边同时积分，得

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots.$$

(2)因为$(\sin x)'=\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}\right]'=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}(x\in\mathbf{R})$，所以

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}(x\in\mathbf{R}).$$

(3)因为$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$，而$\frac{1}{1+x^2}$的展开式可通过将$\frac{1}{1+x}$中的 x 换成 x^2 得到

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\cdots,$$

上式两边同时积分，得

$$\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots(-1\leqslant x\leqslant 1).$$

例 4 将 $f(x)=(1+x)e^x$ 展开成 x 的幂级数.

解 方法一：$f(x)=e^x+xe^x=\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\right)+x\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\right)$

$$=1+\left(\frac{1}{1!}+1\right)x+\left(\frac{1}{2!}+\frac{1}{1!}\right)x^2+\left(\frac{1}{3!}+\frac{1}{2!}\right)x^3+\cdots$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n!}x^n\ (x\in\mathbf{R}).$$

方法二：$(1+x)e^x=(xe^x)'$，而

$$xe^x=x\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\right)=x+\frac{x^2}{1!}+\frac{x^3}{2!}+\frac{x^4}{3!}+\cdots,$$

所以$(1+x)e^x=(xe^x)'=1+\frac{2x}{1!}+\frac{3x^2}{2!}+\frac{4x^3}{3!}+\cdots=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n!}x^n\ (x\in\mathbf{R})$.

例 5　将函数$f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}$展开成 x 的幂级数.

解　$f(x)=\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}$，而

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots(|x|<1),$$

$$\frac{1}{x+2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\left[1-\frac{x}{2}+\left(\frac{x}{2}\right)^2-\left(\frac{x}{2}\right)^3+\cdots+(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^n+\cdots\right](|x|<2),$$

因此$f(x)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}$

$$=(1-x+x^2-x^3+\cdots)-\frac{1}{2}\left[1-\frac{x}{2}+\left(\frac{x}{2}\right)^2-\left(\frac{x}{2}\right)^3+\cdots+(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^n+\cdots\right]$$

$$=\frac{1}{2}-\left(1-\frac{1}{4}\right)x+\left(1-\frac{1}{8}\right)x^2-\left(1-\frac{1}{16}\right)x^3+\cdots$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{2^2-1}{2^2}x+\frac{2^3-1}{2^3}x^2-\cdots+(-1)^n\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}x^n+\cdots(|x|<1).$$

习题8–5

利用间接展开法，将下列函数展开成 x 的幂级数，并求其收敛区间.

(1) $\sin\dfrac{x}{2}$；　　　　(2) $\dfrac{1}{3+2x}$；

(3) $\mathrm{sh}x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$；　　　　(4) $(1+x)\ln(1+x)$.

第六节　傅里叶级数

一、三角函数系与三角级数

简谐振动的函数

$$y=A\sin(\omega t+\varphi)$$

是一个以$\dfrac{2\pi}{\omega}$为周期的正弦函数，其中 y 表示动点的位置，t 表示时间，A 为振幅，ω 为角频率，φ 为初相.

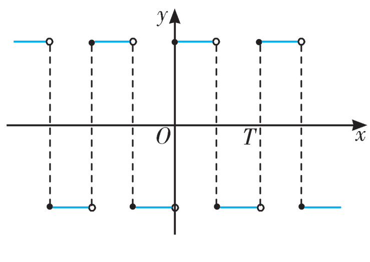

图 8－2

在实际问题中,还会遇到一些更复杂的周期函数,如电子技术中常用周期为 T 的矩形波,如图 8－2 所示.

如何深入研究非正弦周期函数呢?联系到前面介绍过的用函数的幂级数展开式表示并讨论函数,我们也想将周期函数展开成由简单的周期函数(例如三角函数)组成的级数,具体来说,将周期为 $T=\frac{2\pi}{\omega}$ 的周期函数用一系列三角函数组成的级数来表示,并记为

$$f(t)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(n\omega t+\varphi_n)\ , \tag{8.14}$$

其中,$A_0,A_n,\varphi_n(n=1,2,3,\cdots)$都是常数.

将周期函数按上述方式展开,它的物理意义是很明确的,就是把一个复杂的周期运动看成是许多不同频率的简谐振动的叠加,在电工学上这种展开称为谐波分析.

为了讨论方便,将 $A_n\sin(n\omega t+\varphi_n)$ 变形为

$$A_n\sin(n\omega t+\varphi_n)=A_n\sin\varphi_n\cos n\omega t+A_n\cos\varphi_n\sin n\omega t,$$

并且令 $\frac{a_0}{2}=A_0,a_n=A_n\sin\varphi_n,b_n=A_n\cos\varphi_n,\omega t=x$,则式(8.14)右端的级数就可改写为

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx). \tag{8.15}$$

一般地,形如式(8.15)的级数叫作三角级数,其中 $a_0,a_n,b_n(n=1,2,\cdots)$都是常数.

与讨论幂级数类似,也需要讨论三个问题:

(1)式(8.15)的收敛问题.

(2)函数 $f(x)$ 满足什么条件时,可以展成三角级数;展成三角级数收敛时和 $f(x)$ 的关系.

(3)若能展成三角级数,如何求级数中的系数 a_0,a_n,b_n.

首先介绍三角函数系的正交性.

函数序列:

$$1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\cdots,\cos nx,\sin nx,\cdots \tag{8.16}$$

称为三角函数系,2π 是这个三角函数系中每个函数的周期. 讨论三角函数系(8.16)只需选取一个长度为 2π 的区间即可,通常选取$[-\pi,\pi]$.

三角函数系具有下列性质(m,n 是任意非负整数):

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\mathrm{d}x=\begin{cases}0, m\neq n,\\ \pi, m=n\neq 0;\end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cos nx\mathrm{d}x=0;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\mathrm{d}x=\begin{cases}0, m\neq n,\\ \pi, m=n\neq 0.\end{cases}$$

即三角函数系(8.16)中任意两个不同函数之积在$[-\pi,\pi]$内的定积分都是 0,而每个函数的平方在$[-\pi,\pi]$的定积分不是 0. 这个性质称为三角函数系(8.16)的正交性.

二、傅里叶级数

为了求得系数 a_0,a_n,b_n 的计算公式,先假设函数 $f(x)$ 在区间$[-\pi,\pi]$上能展成三角级数式(8.15)或三角级数式(8.15)在区间$[-\pi,\pi]$上收敛于函数 $f(x)$,即

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).\tag{8.17}$$

对式(8.17)两端在$[-\pi,\pi]$上积分,再利用正交性,可得

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x,\tag{8.18}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x(n=1,2,\cdots),\tag{8.19}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x(n=1,2,\cdots).\tag{8.20}$$

由此可见,如果函数$f(x)$在区间$[-\pi,\pi]$上能展成三角级数式(8.15),其系数a_0,a_n,b_n将由$f(x)$确定.

注意到$n=0$时,式(8.19)即为式(8.18).因此有:

定义 8.7　若函数$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上可积,则称

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x(n=0,1,2,\cdots),\tag{8.21}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x(n=1,2,\cdots)\tag{8.22}$$

为傅里叶系数.由傅里叶系数组成的式(8.15)称为傅里叶级数,常表示为

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

关于函数展开成傅里叶级数的条件及其收敛性问题,我们不加证明地给出如下定理:

收敛定理　若周期为2π的周期函数$f(x)$满足条件:

(1)在区间$[-\pi,\pi]$内连续或只有有限个第Ⅰ类间断点,

(2)在区间$[-\pi,\pi]$内只有有限个极值点,

则函数$f(x)$的傅里叶级数收敛,且当x是连续点时,级数收敛于$f(x)$,即

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx);$$

当$x=x_0$是间断点时,级数收敛于$\frac{f_-(x_0)+f_+(x_0)}{2}$,即

$$\frac{f_-(x_0)+f_+(x_0)}{2}=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

两个结论可以理解为x是连续点时收敛于函数本身,x是间断点时收敛于该点左、右极限的平均数.

例 1　$f(x)$是周期为2π的周期函数,它在$(-\pi,\pi]$上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}0,-\pi<x\leqslant 0,\\ a,0<x\leqslant\pi,\end{cases}$$

将$f(x)$展开成傅里叶级数.

解　$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}a\mathrm{d}x=a,$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} a\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{a}{n\pi}\sin nx\Big|_0^{\pi} = 0(n = 1,2,\cdots),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} a\sin nx\,\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{a}{n\pi}\cos nx\Big|_0^{\pi} = \frac{a}{n\pi}[1-(-1)^n] = \begin{cases}\dfrac{2a}{n\pi}, n\ 为奇数,\\ 0, n\ 为偶数,\end{cases}$$

所以

$$f(x) = \frac{a}{2} + \frac{2a}{\pi}\left[\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \cdots + \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1} + \cdots\right](0 < |x| < \pi).$$

当 $x = 0$ 时,傅里叶级数收敛于

$$\frac{f_-(0)+f_+(0)}{2} = \frac{0+a}{2} = \frac{a}{2};$$

当 $x = \pm\pi$ 时,由周期性,傅里叶级数收敛于

$$\frac{f_+(-\pi)+f_-(\pi)}{2} = \frac{0+a}{2} = \frac{a}{2}.$$

傅里叶级数的和函数是以 2π 为周期的周期函数,如图 8－3 所示.

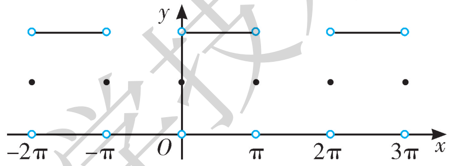

图 8－3

例 2 将函数 $f(x) = x^2$ 在 $(0,2\pi]$ 上展开成傅里叶级数.

解 $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{8\pi^2}{3}$,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{2}{n\pi}\int_0^{2\pi} x\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{4}{n^2},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\sin nx\,\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{4\pi}{n} + \frac{2}{n\pi}\int_0^{2\pi} x\cos nx\,\mathrm{d}x = -\frac{4\pi}{n},$$

于是 $x^2 = \frac{4}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos nx}{n^2} - \frac{\pi\sin nx}{n}\right)(0 < x < 2\pi)$.

当 $x = 0$ 或 2π 时,由周期性,傅里叶级数收敛于

$$\frac{f_+(0)+f_-(2\pi)}{2} = \frac{0+4\pi^2}{2} = 2\pi^2.$$

傅里叶级数的和函数是以 2π 为周期的周期函数，如图 8－4 所示.

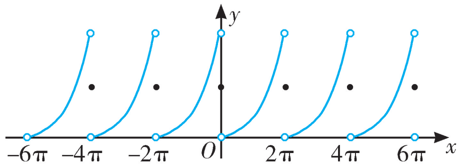

图 8－4

三、奇偶函数的傅里叶级数

1. 奇函数的傅里叶级数

若 $f(x)$ 是以 2π 为周期的奇函数，则 $f(x)\sin nx$ 是偶函数，$f(x)\cos nx$ 是奇函数. 于是，函数 $f(x)$ 的傅里叶系数

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x = 0(n = 0,1,2,\cdots),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x(n = 1,2,\cdots).$$

显然，奇函数的傅里叶级数只含有正弦函数的项，亦称正弦级数.

2. 偶函数的傅里叶级数

若 $f(x)$ 是以为 2π 周期的偶函数，则 $f(x)\cos nx$ 为偶函数，$f(x)\sin nx$ 为奇函数. 于是，函数 $f(x)$ 的傅里叶系数

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x(n = 0,1,2,\cdots),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x = 0(n = 1,2,\cdots).$$

显然，偶函数的傅里叶级数只含有余弦函数的项，亦称余弦级数.

例 3　将 $f(x) = x$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上展开成傅里叶级数.

解　$f(x) = x$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上是奇函数，有

$a_n = 0$,

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\mathrm{d}x = (-1)^{n+1}\frac{2}{n},$$

于是，$x = 2\left(\dfrac{\sin x}{1} - \dfrac{\sin 2x}{2} + \dfrac{\sin 3x}{3} - \cdots\right)(|x| < \pi)$.

特别地，当 $x = \dfrac{\pi}{2}$ 时，有

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots.$$

例 4　将 $f(x) = |x|$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上展开成傅里叶级数.

解　函数 $f(x) = |x|$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上是偶函数，有

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\mathrm{d}x = \pi,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi n^2}[(-1)^n - 1] = \begin{cases} -\dfrac{4}{\pi n^2}, n\text{ 为奇数}, \\ 0, n\text{ 为偶数}, \end{cases}$$

$b_n=0$,

于是 $|x|=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{4}{\pi}\left(\cos x+\dfrac{\cos 3x}{3^2}+\dfrac{\cos 5x}{5^2}+\cdots\right)(|x|\leqslant\pi)$.

特别地,当 $x=\pi$ 时,有

$$\frac{\pi^2}{8}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots.$$

习题8-6

将下列周期为 2π 的周期函数 $f(x)$ 展开成傅里叶级数,其中 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的表达式为:

(1) $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2}$;

(2) $f(x)=3x^2+1$;

(3) $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\leqslant x<-\dfrac{\pi}{2},\\ 1, & -\dfrac{\pi}{2}\leqslant x<\dfrac{\pi}{2},\\ 0, & \dfrac{\pi}{2}\leqslant x<\pi;\end{cases}$

(4) $f(x)=\begin{cases}\pi, & -\pi\leqslant x<0,\\ x, & 0\leqslant x<\pi.\end{cases}$

综合测试题八

1. 写出下列级数的一般项.

(1) $\dfrac{2}{1}-\dfrac{3}{2}+\dfrac{4}{3}-\dfrac{5}{4}+\dfrac{6}{5}-\cdots$;

(2) $1+\dfrac{1\cdot 3}{1\cdot 4}+\dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{1\cdot 4\cdot 7}+\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{1\cdot 4\cdot 7\cdot 10}+\cdots$.

2. 用级数和定义求 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$.

3. 利用级数的基本性质及几何级数、调和级数的收敛性判定下列级数的收敛性.

(1) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{12}+\cdots$;

(2) $\dfrac{\ln 2}{2}+\dfrac{\ln^2 2}{2^2}+\dfrac{\ln^3 2}{2^3}+\cdots$;

(3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{6^n}+\frac{8^n}{9^n}\right)$.

4. 判定下列级数的收敛性.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+n}{1+n^2}$;

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)3^{n+1}}$;

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^n}$;

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n^2\sin\frac{\pi}{2^n}$;

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot 5\cdot\cdots\cdot(3n-1)}{1\cdot 5\cdot\cdots\cdot(4n-3)}$;

(6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot n!}{n^n}$;

(7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos^2\frac{n\pi}{3}}{2^n}$.

5. 判定下列级数收敛性,若收敛,是绝对收敛还是条件收敛.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$;

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n+1}{n\sqrt{n}}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\dfrac{n^{10}}{2^n}$；　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$.

6. 求下列幂级数的收敛域及其和函数：

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$；　　(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n$，并计算 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2n+1}{2^n}$ 之和.

7. 将下列函数展开为 x 的幂级数（麦克劳林级数），并指出收敛域：

(1) $\dfrac{1}{(1+x)^2}$；　　(2) $\sin^2 x$.

阅读材料

数学实验

一、求和与求积

求有限和、无穷和、积的函数是：

Sum[f,{i,imin,imax}] 求 $\sum\limits_{i=i_{\min}}^{i_{\max}} f(i)$，其中 $i_{\min}$ 可以是 $-\infty$，$i_{\max}$ 可以是 $+\infty$，但必须满足 $i_{\min} \leqslant i_{\max}$.

Sum[f,{i,imin,imax},{j,jmin,jmax},…] 求多重和.

Product[f,{i,imin,imax}] 求 $\prod\limits_{i=i_{\min}}^{i_{\max}} f(i)$.

Product[f,{i,imin,imax},{j,jmin,jmax},…] 求多重积.

在计算时也可以不输入函数，而通过基本输入模板来求.

例 1　求下列级数的和与积.

(1) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2$；　(2) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^2}$；　(3) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k}$；　(4) $\prod\limits_{k=1}^{\infty} e^{\frac{1}{k^2}}$.

解　In[1]: = Sum[k^2,{k,1,n}]

Out[1]: = $\dfrac{1}{6}$n(1 + n)(1 + 2n)

In[2]: = $\sum\limits_{k=1}^{\infty}$ 1/k^2

Out[2]: = $\dfrac{\pi^2}{6}$

In[3]: = $\sum\limits_{k=1}^{\infty}$ 1/k

Sum::div:Sum does not converge.

Out[3]: = $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k}$

In[4]: = $\prod\limits_{k=1}^{\infty}$ Exp[1/k^2];

Out[4]: $= e^{\frac{\pi^2}{6}}$

说明:对于发散的级数,Mathematica 给出提示无法求出结果,并将原输入式输出.

二、将函数展开成幂级数

格式为:

Series[f,{x,x_0,n}]	将函数 $f(x)$ 在 x_0 处展成幂级数直到 n 次项为止
Series[f,{x,x_0,n},{ y,y_0,m }]	将函数 $f(x,y)$ 先对 y 后对 x 展开
Normal[expr]	将幂级数 expr 去掉余项转换成多项式
SeriesCoefficient[expr,n]	找出幂级数 expr 的 n 次项系数

例 2 将函数 $y=\arcsin x$ 展开成幂级数.

解 In[1]: = Series[Arcsin[x],{x,0,9}]

Out[1]: $= x+\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}+\frac{5x^7}{112}+\frac{35x^9}{1152}+O[x]^{10}$

In[2]: = Normal[%]

Out[2]: $= x+\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}+\frac{5x^7}{112}+\frac{35x^9}{1152}$

In[3]: = SeriesCoefficient[%1,5]

Out[3]: $=\frac{3}{40}$

数学史话 麦克劳林(1698—1746),英国数学家.1719 年,麦克劳林在伦敦访问时见到了牛顿,从此便成为牛顿的门生.21 岁时发表了第一本重要著作——《构造几何》,在这本书中描述了作圆锥曲线一些新的巧妙方法,精辟地讨论了圆锥曲线及高次平面曲线的种种性质.1742 年撰写的《流数论》以泰勒级数作为基本工具,是对牛顿的流数法作出符合逻辑的、系统解释的第一本书.

泰勒(1685—1731),英国数学家.他以微积分学中将函数展开成无穷级数的定理著称于世.这条定理大致可以叙述为:函数在一个点的邻域内的值可以用函数在该点的值及各阶导数值组成的无穷级数表示出来.泰勒定理的严格证明是在定理诞生一个世纪之后,由柯西给出的.

傅里叶(1768—1830),法国人.1822 年,傅里叶出版了专著《热的分析理论》.这部经典著作将欧拉、伯努利等人在一些特殊情形下应用的三角级数方法发展成内容丰富的一般理论,三角级数后来就以傅里叶的名字命名.傅里叶应用三角级数求解热传导方程,同时为了处理无穷区域的热传导问题又导出了现在所称的"傅里叶积分",这一切都极大地推动了偏微分方程边值问题的研究.

第九章 向量代数与空间解析几何

空间解析几何的建立与平面解析几何类似,通过建立坐标系使几何上的点与代数上的有序数组一一对应,空间图形与代数方程一一对应,从而把几何问题转化为代数问题来研究. 平面解析几何是一元函数微积分的基础,而空间解析几何则是多元函数微积分的基础,而且在工程技术等领域也有着广泛的应用.

本章首先建立空间直角坐标系,引入向量的概念,然后以向量为工具讨论空间的平面与直线、曲面与曲线等有关的问题,最后讨论二次曲面.

第一节 空间直角坐标系

一、空间直角坐标系

在空间中取定一点 O,过点 O 作三条具有相同长度单位,且两两互相垂直的数轴 x 轴、y 轴和 z 轴,这样就建立了空间直角坐标系 $O-xyz$. 点 O 称为坐标原点,x 轴、y 轴和 z 轴统称为坐标轴,又分别叫作横轴、纵轴和竖轴. 通常规定 x 轴、y 轴和 z 轴的正向要遵循右手法则,即用右手握住 z 轴,当右手的 4 个手指从正向 x 轴以 $\frac{\pi}{2}$ 角度转向正向 y 轴时,大拇指的指向就是 z 轴的正向,如图 9-1 所示.

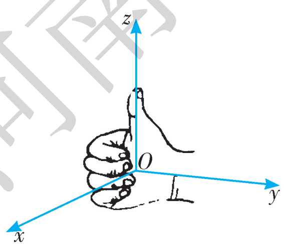

图 9-1

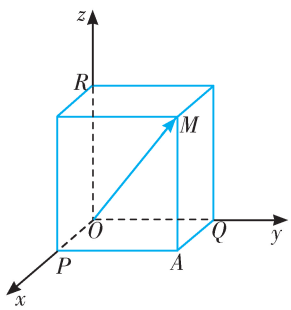

图 9-2

取定了空间直角坐标系以后,来建立空间中的点与有序数组之间的对应关系. 设点 M 为空间一点,过点 M 分别作垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴的平面,它们与 3 条坐标轴的交点分别为 P,Q,R. 设点 P,Q,R 在 3 个坐标轴上的坐标分别为 x,y,z,则有序数组 (x,y,z) 由点 M 唯一确定;反之,对于给定的有序数组 (x,y,z),在 x 轴、y 轴和 z 轴上分别取坐标为 x,y 和 z 的点 P,Q,R,再过点 P,Q,R 分别作垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴的 3 个平面,它们相交于一点 M,则点 M 被有序数组 (x,y,z) 唯一确定,如图 9-2 所示.

有序数组(x,y,z)称为点M的坐标,记为$M(x,y,z)$. x,y,z依次称为点M的横坐标、纵坐标和竖坐标. 由任意两条坐标轴确定的平面称为坐标平面,简称为坐标面. 由x轴和y轴,y轴和z轴,z轴和x轴所确定的坐标面分别叫作xOy面、yOz面和zOx面. 这3个坐标面把空间分为8个部分,每个部分称为一个卦限,依次叫作第一卦限至第八卦限. 8个卦限中,点的坐标有如下特点:

第一卦限 $x>0,y>0,z>0$;

第二卦限 $x<0,y>0,z>0$;

第三卦限 $x<0,y<0,z>0$;

第四卦限 $x>0,y<0,z>0$;

第五卦限 $x>0,y>0,z<0$;

第六卦限 $x<0,y>0,z<0$;

第七卦限 $x<0,y<0,z<0$;

第八卦限 $x>0,y<0,z<0$.

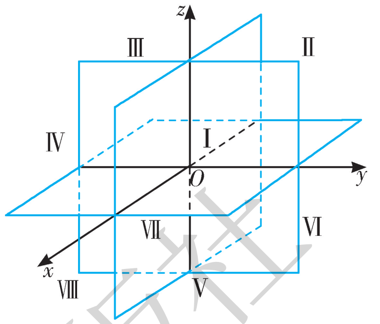

图 9-3

从上面的坐标特点容易看到,第一卦限至第四卦限在xOy面的上方,第五卦限至第八卦限在xOy面的下方,都是按逆时针方向排定. 第五卦限在第一卦限的下面,如图9-3所示.

二、空间两点间的距离

设点$M_1(x_1,y_1,z_1)$和$M_2(x_2,y_2,z_2)$是空间两点,过M_1,M_2分别作垂直于3条坐标轴的平面,这6个平面围成一个以M_1M_2为对角线的长方体,如图9-4所示.

从图9-4看出,该长方体的各棱长分别为:

$$|x_2-x_1|,|y_2-y_1|,|z_2-z_1|.$$

由立体几何知识,长方体对角线长的平方等于3条棱长的平方和,于是有

$$|M_1M_2|^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2,$$

所以点M_1和M_2间的距离为

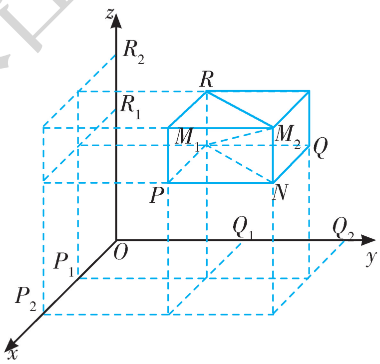

图 9-4

$$|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \tag{9.1}$$

例 1 求点$M_1(1,0,-1),M_2(3,-2,1)$之间的距离.

解 由式(9.1)得

$$|M_1M_2|=\sqrt{(3-1)^2+(-2-0)^2+[1-(-1)]^2}=2\sqrt{3}.$$

例 2 在y轴上求与点$M_1(1,2,3)$和$M_2(2,3,2)$等距离的点的坐标.

解 设所求点为$M(0,y,0)$,则有$|M_1M|^2=|M_2M|^2$,即

$$1^2+(2-y)^2+3^2=2^2+(3-y)^2+2^2,$$

解出$y=\frac{3}{2}$,从而所求点为$M\left(0,\frac{3}{2},0\right)$.

习题9-1

1. 在空间直角坐标系中,指出下列各点在哪个卦限.

$A(2,-1,3),B(3,4,-1),C(1,-4,-6),D(-3,-2,4)$.

2. 在空间直角坐标系中,作出点$A(-2,3,1)$和点$B(1,-2,3)$并写出它们:

(1)关于各坐标面对称的点的坐标;

(2)关于各坐标轴对称的点的坐标;

(3)关于原点对称的点的坐标.

3. 求点 $M(4,-3,5)$ 到下列各位置的距离.

(1)坐标原点;

(2)各坐标轴;

(3)各坐标面.

4. 在 z 轴上求与点 $A(-4,1,7)$ 和 $B(3,5,-2)$ 等距离的点.

5. 在 xOy 坐标面上找一点,使它的 x 轴坐标为 1,且与点 $(1,-2,2)$ 和点 $(2,-1,-4)$ 等距离.

6. 试证以 $A(4,3,1)$,$B(7,1,2)$,$C(5,2,3)$ 为顶点的三角形是等腰三角形.

第二节　向量及其线性运算　向量的坐标表示式

一、向量的概念

在现实生活中,经常会遇到两种量:一种是只有大小没有方向的量,叫作数量或标量,如质量、密度、时间、温度等;另一种是既有大小又有方向的量,叫作向量或矢量,如速度、加速度、力、位移等.

我们用有向线段来表示向量,有向线段的始点和终点分别叫作向量的始点和终点,有向线段的方向表示向量的方向,而有向线段的长度表示向量的大小. 始点是 A,终点是 B 的向量记为$\overrightarrow{AB}$,在手写时常用带箭头的小写字母$\vec{a}$,$\vec{b}$,$\vec{c}$,…,而在印刷时常常用黑体字母 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{i}$,…来表示向量. 始点在原点 O,终点在点 M 的向量$\overrightarrow{OM}$称为点 M 的向径,记为 $\boldsymbol{r}$.

向量的大小叫作向量的模,也称为向量的长度. 向量$\overrightarrow{AB}$的模记为$|\overrightarrow{AB}|$. 模为 1 的向量叫作单位向量;模为零的向量叫作零向量,记为 $\mathbf{0}$,它是始点与终点重合的向量,零向量的方向不定,或者为任意的.

由于向量是由大小和方向所确定的,因此,只要两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的大小相等,方向相同,就称 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相等,记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 向量相等的概念是在不考虑向量的起点在何处的前提下给出的,即一个向量可以在空间任意地平行移动,这种向量称为自由向量. 与 $\boldsymbol{a}$ 大小相等,方向相反的向量叫作 $\boldsymbol{a}$ 的负向量,记为 $-\boldsymbol{a}$.

方向相同或相反的两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 称为平行向量,记为 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. 由于零向量的方向是任意的,因此可以认为零向量与任何向量都平行. 由于平行的向量经平移后能放置在同一条直线上,所以平行向量又称为共线向量.

下面给出两个向量夹角的概念. 设给定两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$,将向量 $\boldsymbol{a}$ 或 $\boldsymbol{b}$ 平移,使它们的始点重合,它们所在的射线之间的夹角 $\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角,如图 9－5 所示,记为$\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$. 当 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 中有一个是零向量时,规定它们的夹角可

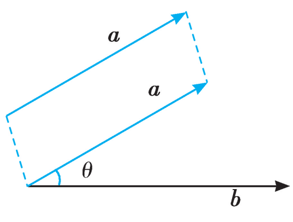

图 9－5

以在$[0,\pi]$中任意取值,当$\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\dfrac{\pi}{2}$时称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直,记为 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

二、向量的线性运算

1. 向量的加减法

定义 9.1 对于给定的向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$,在平面上取一点 A,作向量$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$,那么向量 $\boldsymbol{c}=\overrightarrow{AC}$称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和向量,记为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,即 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

如图 9-6 所示.

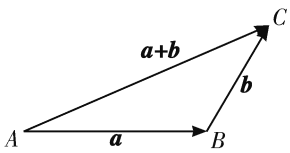

图 9-6

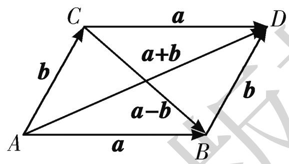

图 9-7

这种求向量和的方法称为向量加法的三角形法则. 另外,向量的加法还有如下等价的平行四边形法则,即对于给定的向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$,从一点 A 出发,作向量$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$,再以 AB 和 AC 为邻边作平行四边形 $ABDC$,那么向量 $\boldsymbol{c}=\overrightarrow{AD}$就是向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和向量,如图 9-7 所示.

向量的加法运算满足如下规律,即对于任意向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 有

(1)交换律: $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

(2)结合律:$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

定义 9.2 当向量 $\boldsymbol{b}$ 与向量 $\boldsymbol{c}$ 的和等于向量 $\boldsymbol{a}$,即 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}$ 时,把向量 $\boldsymbol{c}$ 叫作向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差,记作 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

根据减法的定义可知,$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 就是以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形中由 $\boldsymbol{b}$ 的终点指向 $\boldsymbol{a}$ 的终点的向量,如图 9-7 所示.

2. 数与向量的乘积

定义 9.3 实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积是一个向量,记为 $\lambda\boldsymbol{a}$,它的模是$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$;$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向,当 $\lambda>0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相同,当 $\lambda<0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相反.

从这个定义可以知道,当 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 时,$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|=0$,所以 $\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$,这时就不必讨论它的方向了. 当 $\lambda=-1$ 时,$(-1)\boldsymbol{a}$ 就是 $\boldsymbol{a}$ 的负向量,因此我们常常把$(-1)\boldsymbol{a}$ 简写为 $-\boldsymbol{a}$. 由定义还可知道,当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 时,与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量是 $\boldsymbol{a}^0=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$.

数与向量的乘积满足以下运算规律,即对于任意实数 λ,μ,向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 有

(1)结合律:$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$;

(2)第一分配律:$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$;

(3)第二分配律:$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

> **定理 9.1**　设向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，则向量 $\boldsymbol{b}$ 平行于向量 $\boldsymbol{a}$ 的充分必要条件是存在唯一的实数 λ，使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

证明从略.

例 1　设 $\boldsymbol{u}=2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+5\boldsymbol{c}$，试用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 表示向量 $3\boldsymbol{u}-2\boldsymbol{v}$.

解　根据向量的加法和数量与向量乘积满足的运算规律，有

$$\begin{aligned}3\boldsymbol{u}-2\boldsymbol{v}&=3(2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})-2(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+5\boldsymbol{c})\\&=6\boldsymbol{a}+9\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{c}-2\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}-10\boldsymbol{c}\\&=4\boldsymbol{a}+13\boldsymbol{b}-13\boldsymbol{c}.\end{aligned}$$

例 2　如图 9-8 所示，设 D,E 是 $\triangle ABC$ 的边 BC 的三等分点，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{m}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{n}$，试用 $\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}$ 表示 $\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AE}$.

解　由三角形法则，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{n}-\boldsymbol{m}$，

又由数与向量乘积定义 $\overrightarrow{BD}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\dfrac{1}{3}(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{m})$，

$$\overrightarrow{CE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n}).$$

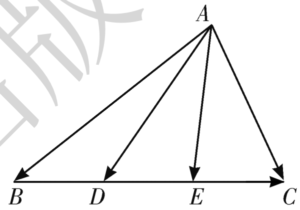

图 9-8

在 $\triangle ABD$ 与 $\triangle AEC$ 中，由三角形法则得

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD},\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE},$$

所以 $\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{m}+\dfrac{1}{3}(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{m})=\dfrac{1}{3}(2\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n})$，

$\overrightarrow{AE}=\boldsymbol{n}+\dfrac{1}{3}(\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n})=\dfrac{1}{3}(\boldsymbol{m}+2\boldsymbol{n})$.

三、向量的坐标表示式

在空间直角坐标系中，与 x 轴、y 轴和 z 轴同方向的单位向量分别记为 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$，通常称它们为基本单位向量. 下面来讨论空间内任一向量如何用基本单位向量来表示.

先来讨论空间内一点 $M(x,y,z)$ 的向径 $\overrightarrow{OM}$ 与基本单位向量之间的关系. 过点 M 分别作与 3 条坐标轴垂直的平面，与 x 轴、y 轴和 z 轴分别交于点 P,Q,R，如图 9-9 所示. 根据向量的加法，有

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}.$$

因为向量 $\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{OQ}$，$\overrightarrow{OR}$ 分别平行于基本单位向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$，则由定理 9.1 易知

$$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i},\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j},\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k},$$

于是有

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.\tag{9.2}$$

式(9.2)称为点 $M(x,y,z)$ 的向径 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标表示式. 其中 $x\boldsymbol{i},y\boldsymbol{j},z\boldsymbol{k}$ 分别称为向量 $\overrightarrow{OM}$ 在 x 轴、y 轴、z 轴上的分向量，x,y,z 分别称为向量 $\overrightarrow{OM}$ 在 x 轴、y 轴、z 轴上的射影，分别记为 $(\overrightarrow{OM})_x$，$(\overrightarrow{OM})_y$，$(\overrightarrow{OM})_z$，即 $(\overrightarrow{OM})_x=x$，$(\overrightarrow{OM})_y=y$，$(\overrightarrow{OM})_z=z$. 注意向量的射影是数量而不是向量.

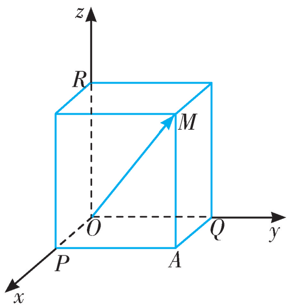

图 9－9

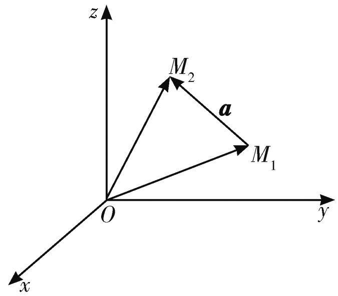

图 9－10

现在来讨论任一向量与基本单位向量之间的关系. 设向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}$ 的始点、终点坐标分别是 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$，由图 9－10 可知

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}.$$

而 $\overrightarrow{OM_1}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k}$，$\overrightarrow{OM_2}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}$，

于是 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})-(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})$

$=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}.$

我们称 $\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标表示式，有序数组 $(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标. 由此可知，空间任一向量的坐标等于其终点坐标减去始点坐标.

有了向量的坐标表示式后，就可以用向量的坐标进行向量的线性运算. 设有两个向量 $\boldsymbol{a}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}$，由向量的线性运算知

$$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(x_1\pm x_2)\boldsymbol{i}+(y_1\pm y_2)\boldsymbol{j}+(z_1+z_2)\boldsymbol{k},\lambda\boldsymbol{a}=\lambda x_1\boldsymbol{i}+\lambda y_1\boldsymbol{j}+\lambda z_1\boldsymbol{k},$$

即 $\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(x_1\pm x_2,y_1\pm y_2,z_1\pm z_2)$，$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda x_1,\lambda y_1,\lambda z_1)$.

这说明，两向量和与差的坐标等于这两个向量对应坐标的和与差，数乘向量的坐标等于这个数与向量对应坐标的乘积.

习题9－2

1. 已知向量 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$ 的始点为 $(-1,0,1)$，求向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点坐标.
2. 设 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$，试用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 表示 $2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}$.
3. 试用向量证明：三角形两边中点的连线平行且等于第三边的一半.
4. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,-1,2)$，$\boldsymbol{b}=(0,1,3)$，$\boldsymbol{c}=(2,2,-2)$，求

(1) $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c}$；

(2) $m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}$（$m,n$ 为常数）.

5. 求平行于向量 $\boldsymbol{a}=(6,7,-6)$ 的单位向量.

第三节　两向量的数量积与向量积

一、向量的数量积

在物理学中,我们知道一个物体在恒力 $\boldsymbol{f}$ 的作用下沿直线运动,产生了位移 $\boldsymbol{s}$,那么这个力 $\boldsymbol{f}$ 所做的功为

$$W=|\boldsymbol{f}||\boldsymbol{s}|\cos\theta,$$

其中 θ 为 $\boldsymbol{f}$ 和 $\boldsymbol{s}$ 的夹角,如图 9－11 所示. 这里的功 W 是由向量 $\boldsymbol{f}$ 和 $\boldsymbol{s}$ 按上式确定的一个数. 类似的情况在其他问题中也会经常遇到,为此,我们给出如下定义.

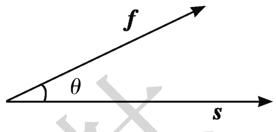

图 9－11

定义 9.4　两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的模和它们夹角的余弦的乘积叫作向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积(也称内积或点积),记为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$,即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}).$$

从向量的数量积的定义可以看出,两个向量的数量积是一个数量而不是向量. 特别地,当两个向量中有一个为零向量时,例如 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$,那么 $|\boldsymbol{b}|=0$,从而 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$. 如果两个向量相等,即当 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$ 时,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$,我们把数量积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}$ 叫作 $\boldsymbol{a}$ 的数量平方,记作 $\boldsymbol{a}^2$.

由向量数量积的定义可知,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ 的充分必要条件是 $|\boldsymbol{a}|=0$ 或 $|\boldsymbol{b}|=0$ 或 $\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\dfrac{\pi}{2}$,而这又是 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 的充分必要条件,于是我们有:

定理 9.2　两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直的充分必要条件是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

向量的数量积满足以下运算规律,即对于任意的向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 及实数 λ,有

(1)交换律:$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$;

(2)关于数因子的结合律:$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$;

(3)分配律:$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$;

(4)如果 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$,那么 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}^2>0$.

下面来讨论如何用向量的坐标来表示数量积.

设 $\boldsymbol{a}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{b}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}$,则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\cdot(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})\\&=x_1x_2\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}+x_1y_2\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+x_1z_2\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}+y_1x_2\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}+y_1y_2\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}\\&\quad+y_1z_2\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}+z_1x_2\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}+z_1y_2\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}+z_1z_2\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

因为 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 是两两相互垂直的单位向量,所以

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}=0,\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0,\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}=0,$$

且 $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=1,\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=1,\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1$,

因而

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2. \tag{9.3}$$

式(9.3)称为向量数量积的坐标表示式. 它表示两个向量的数量积等于它们对应坐标的乘积之和. 当 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 时,由此式还可得到向量 $\boldsymbol{a}$ 的模的坐标表示式,即

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}^2}=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}.$$

对于非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$,从数量积的定义,我们还可以求出它们夹角余弦的坐标表示式,即

$$\cos\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}. \tag{9.4}$$

我们把任一向量 $\boldsymbol{a}$ 与基本单位向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 的夹角 α,β,γ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角,而 $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦. 于是向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦的坐标表示式为:

$$\cos\alpha=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{i}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{j}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{y_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{z_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}.$$

显然 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

例 1 已知 $|\boldsymbol{a}|=2$, $|\boldsymbol{b}|=3$, $\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\frac{2\pi}{3}$,求

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$;

(2) 向量 $\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$ 的模.

解 (1) 根据数量积的定义,有

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=2\times3\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-3;$$

(2) 根据数量积的性质,有

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{c}|^2&=\boldsymbol{c}^2=(2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\\&=4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+6\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+6\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}+9\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}\\&=4|\boldsymbol{a}|^2+12\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+9|\boldsymbol{b}|^2\\&=4\times2^2+12\times(-3)+9\times3^2\\&=16-36+81=61,\end{aligned}$$

所以 $|\boldsymbol{c}|=\sqrt{61}$.

例 2 设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$,求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$, $\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$.

解 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1\times1+1\times(-2)+(-4)\times2=-9$.

由式(9.4)知 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 夹角的余弦为

$$\begin{aligned}\cos\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})&=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{1\times1+1\times(-2)+(-4)\times2}{\sqrt{1^2+1^2+(-4)^2}\cdot\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}\\&=\frac{1-2-8}{\sqrt{18}\times\sqrt{9}}=-\frac{\sqrt{2}}{2},\end{aligned}$$

所以,$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\frac{3\pi}{4}$.

例 3　设△ABC 的三个顶点为 $A(0,1,-1)$,$B(1,3,4)$,$C(-1,-1,0)$,证明△ABC 为直角三角形.

解　各边所对应的向量为

$$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k},$$
$$\overrightarrow{AC}=-\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k},$$
$$\overrightarrow{BC}=-2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k},$$

因为 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1\times(-1)+2\times(-2)+5\times1=0$.

所以 $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$.

故△ABC 为直角三角形.

二、向量的向量积

定义 9.5　两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积仍是一个向量,记为 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$,它的模是

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}),$$

它的方向和 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 都垂直,并且按 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 构成右手系,即如果右手的四指由 $\boldsymbol{a}$ 的方向沿小于 π 的方向握拳转向 $\boldsymbol{b}$ 的方向时,大拇指所指的方向就是 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的方向,向量的向量积又称外积或叉积.

如图 9－12 所示.

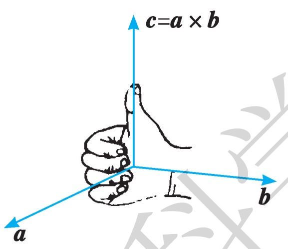

图 9－12

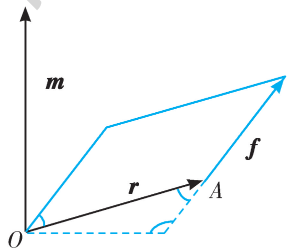

图 9－13

物理学中的力矩是一个向量,它就是两个向量的向量积. 如图 9－13 所示,如果力 $\boldsymbol{f}$ 的作用点是 A,$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{r}$,那么力矩 $\boldsymbol{m}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{f}$.

因为平行四边形的面积等于它的两条邻边长的积乘以它们夹角的正弦,所以,两不共线向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积的模等于以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积.

从以上定义容易看出,若向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线,那么必有 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$,反之亦然. 于是我们有下面定理.

定理 9.3　两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线的充分必要条件是 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

向量的向量积满足以下运算规律,即对于任意的向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 及实数 λ,有

(1)反交换律:$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$;

(2)关于数因子的结合律:$(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})$;

(3)分配律:$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$.

下面来讨论向量积的坐标表示式.

设

$$a = x_1 i + y_1 j + z_1 k, b = x_2 i + y_2 j + z_2 k,$$

则 $a \times b = (x_1 i + y_1 j + z_1 k) \times (x_2 i + y_2 j + z_2 k)$

$= x_1x_2 i \times i + x_1y_2 i \times j + x_1z_2 i \times k + y_1x_2 j \times i + y_1y_2 j \times j + y_1z_2 j \times k + z_1x_2 k \times i + z_1y_2 k \times j + z_1z_2 k \times k.$

因为 i, j, k 是两两相互垂直的单位向量,所以有

$$i \times i = 0, j \times j = 0, k \times k = 0,$$
$$i \times j = k, j \times k = i, k \times i = j,$$
$$j \times i = -k, k \times j = -i, i \times k = -j,$$

从而 $a \times b = (y_1z_2 - y_2z_1)i + (z_1x_2 - z_2x_1)j + (x_1y_2 - x_2y_1)k.$

利用二阶行列式,可将上式改写为

$$a \times b = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} i + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} k. \tag{9.5}$$

为了便于记忆,借助于三阶行列式,式 (9.5) 又可改写成

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}. \tag{9.6}$$

例 4 设 $a = 2i + j - 3k, b = -i + k$,计算 $a \times b$.

解 $a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} i + \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} k = i + j + k.$

例 5 求垂直于向量 $a = 2i + 2j + k$ 和 $b = 4i + 5j + 3k$ 的单位向量.

解 由向量积的定义,向量

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} = i - 2j + 2k,$$

既垂直于向量 a 又垂直于向量 b,而 $|a \times b| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3.$

所以单位向量 $\pm \dfrac{a \times b}{|a \times b|} = \pm \dfrac{1}{3}(i - 2j + 2k)$ 即为所求.

例 6 已知空间三点 $A(1, -1, 2), B(2, 1, 3), C(-1, 0, 1)$,试求:

(1) $\triangle ABC$ 的面积;

(2) $\triangle ABC$ 的边 AB 上的高.

解 (1)根据向量积模的几何意义,$\triangle ABC$ 的面积为

$$S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|,$$

因为 $\overrightarrow{AB} = (2-1, 1-(-1), 3-2) = (1, 2, 1)$,

$\overrightarrow{AC} = (-1-1, 0-(-1), 1-2) = (-2, 1, -1)$,

所以 $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} i + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} k = -3i - j + 5k,$

故 $S=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\dfrac{1}{2}\sqrt{(-3)^2+(-1)^2+5^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{35}$;

(2)因为$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{1^2+2^2+1^2}=\sqrt{6}$,

所以△ABC 的边 AB 上的高为

$$\frac{|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}|}=\frac{\sqrt{35}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{210}}{6}.$$

习题9–3

1. 已知 $\boldsymbol{a}=(2,1,-1)$,$\boldsymbol{b}=(1,-1,2)$,求下列各值.

(1)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 及 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$;

(2)$2\boldsymbol{a}\cdot(-3\boldsymbol{b})$及 $2\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$;

(3)$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 夹角的余弦.

2. 设$|\boldsymbol{a}|=3$,$|\boldsymbol{b}|=5$,$\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\dfrac{\pi}{3}$,求$(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot(3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})$.

3. 已知 $\boldsymbol{a}=(-1,1,2)$,$\boldsymbol{b}=(2,-1,1)$,求同时垂直于 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 的单位向量.

4. 求以 $A(3,4,1)$,$B(2,3,0)$,$C(3,5,1)$,$D(2,4,0)$为顶点的四边形的面积.

5. 求垂直于向量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$ 和 x 轴的单位向量.

6. 求下列各向量的模、方向余弦以及与它们同方向的单位向量.

(1)$\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$;

(2)$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$.

7. 已知点 $M_1(0,1,2)$,$M_2(-1,2,1)$,求向量$\overrightarrow{M_1M_2}$及其方向余弦.

第四节　平面及其方程

一、平面的点法式方程

在空间给定一点和一个非零向量,那么通过该点且与已知向量垂直的平面就唯一地被确定. 我们把与平面垂直的非零向量叫作平面的法向量. 显然,平面上的任一向量都与该平面的法向量垂直. 下面我们来建立过定点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$,以向量 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$为法向量的平面 π 的方程.

在图 9 – 14 中,设点 $M(x,y,z)$为平面 π 上任一点,则向量$\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$在平面 π 上,所以 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{M_0M}$,从而 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{M_0M}=0$, 即

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \qquad (9.7)$$

显然,平面 π 上任一点 $M(x,y,z)$的坐标都满足式(9.7).

反之,如果点 $M(x,y,z)$不在平面 π 上,那么向量$\overrightarrow{M_0M}$与法向量 $\boldsymbol{n}$ 就不垂直,从而 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{M_0M}\neq0$,即

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)\neq0.$$

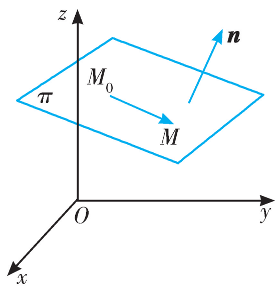

图 9 – 14

这说明，不在平面上的点的坐标就不满足式(9.7)，所以平面 π 上的点的坐标与方程(9.7)的解之间有着一一对应的关系. 我们把方程(9.7)称为平面 π 的方程，而平面 π 称为方程(9.7)的图形. 因为方程(9.7)是由平面 π 上的定点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 和它的法向量 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$ 所确定的，所以方程(9.7)称为平面 π 的点法式方程.

例 1 求过点(1,2,−1)且与向量 $\boldsymbol{n}=(-2,1,3)$ 垂直的平面方程.

解 由平面法向量的概念知，向量 $\boldsymbol{n}=(-2,1,3)$ 为所求平面的一个法向量，于是，由式(9.7)可得所求平面的方程为

$$-2(x-1)+(y-2)+3(z+1)=0,$$

即 $2x-y-3z-3=0$.

例 2 求过点(0,−2,3)且与平面 $3x-y+2z-2=0$ 平行的平面方程.

解 由平面的点法式方程(9.7)知，平面 $3x-y+2z-2=0$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(3,-1,2)$. 所求的平面与该平面平行，所以它们的法向量也平行，$\boldsymbol{n}=(3,-1,2)$ 也是所求平面的法向量. 因此，所求平面方程为

$$3(x-0)-(y+2)+2(z-3)=0,$$

即 $3x-y+2z-8=0$.

例 3 求经过三点 $M_1(1,-1,2)$，$M_2(2,1,0)$，$M_3(0,2,7)$ 的平面方程.

解 由于点 M_1,M_2,M_3 在平面上，则向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$，$\overrightarrow{M_1M_3}$ 都在平面上，由向量积的定义知，向量 $\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3}$ 与向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$，$\overrightarrow{M_1M_3}$ 都垂直，从而垂直于所求的平面，所以它是所求平面的一个法向量.

因为 $\overrightarrow{M_1M_2}=(1,2,-2)$，$\overrightarrow{M_1M_3}=(-1,3,5)$，

所以 $$\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}\boldsymbol{i}+\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}\boldsymbol{k}$$
$$=16\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}.$$

故所求的平面为 $16(x-1)-3(y+1)+5(z-2)=0$，即 $16x-3y+5z-29=0$.

二、平面的一般方程

在平面的点法式方程(9.7)中，如果令 $D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$，则可以改写为

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

由此可知，任何一个平面的方程都是 x,y,z 的三元一次方程；反过来，设有三元一次方程

$$Ax+By+Cz+D=0, \tag{9.8}$$

式中 A,B,C,D 为常数，且 A,B,C 不全为零. 由于 A,B,C 不全为零，所以方程一定有解，任取满足该方程的一组解 x_0,y_0,z_0，即有

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0.$$

用式(9.8)减去该式，可得与式(9.8)同解的方程

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0,$$

而这个方程是经过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 且以向量 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$ 为法向量的平面的方程. 由此可见，任何一个三元一次方程都表示一个平面的方程. 我们把式(9.8)称为平面的一般方程. 它的 3 个一次项系数构成的向量 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$ 是该平面的一个法向量.

例 4　求经过 y 轴与点 $(-1,2,4)$ 的平面方程.

解　设所求平面的一般方程为 $Ax+By+Cz+D=0$.

因为平面经过 y 轴,从而平面经过原点,即点 $O(0,0,0)$ 满足平面方程,所以 $D=0$.

由于 y 轴在平面上,则平面的法向量 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$ 垂直于向量 $\boldsymbol{j}=(0,1,0)$,所 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{j}=0$,从而 $B=0$.

又因为平面经过点 $(-1,2,4)$,所以 $-A+4C=0$,即 $A=4C$.

故所求的平面方程为 $4x+z=0$.

例 5　设一平面与 x,y,z 轴的交点依次为 $P(a,0,0)$,$Q(0,b,0)$,$R(0,0,c)$(其中 $abc\neq0$),求该平面的方程.

解　把点 P,Q,R 的坐标分别代入平面的一般方程,有

$$\begin{cases}Aa+D=0,\\Bb+D=0,\\Cc+D=0,\end{cases}$$

由此得 $A=-\dfrac{D}{a}$,$B=-\dfrac{D}{b}$,$C=-\dfrac{D}{c}$.

代入平面的一般方程得 $-\dfrac{D}{a}x-\dfrac{D}{b}y-\dfrac{D}{c}z+D=0$,

即 $D\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}\right)=D$.

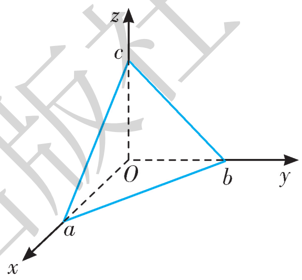

图 9－15

由题设可知,平面不经过原点,所以 $D\neq0$,于是所求平面的方程为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,$$

我们把该方程叫作平面的截距式方程,其中的 a,b,c 分别叫作该平面在 x,y,z 轴上的截距,如图 9－15 所示.

三、点与平面的距离

空间中的点与平面间的位置关系有两种情况,就是点在平面上或者点不在平面上. 点在平面上的条件是点的坐标满足平面的方程;点不在平面上时,我们来讨论点到平面间的距离.

设点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 是平面 π:$Ax+By+Cz+D=0$ 外一点,如图 9－16 所示,下面我们来求点 P_0 到平面 π 的距离.

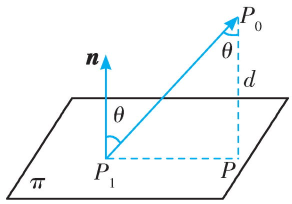

图 9－16

过点 P_0 作 P_0P 垂直于平面 π,垂足为 P,在平面 π 上任取一点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$,连接 P_0P_1,则向量 $\overrightarrow{P_1P_0}=(x_0-x_1,y_0-y_1,z-z_1)$. 设向量 $\overrightarrow{P_1P_0}$ 与平面的法向量 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$ 的夹角为 θ,由图 9－16 可知,点 P_0 到平面 π 的距离为

$$d=|\overrightarrow{P_1P_0}||\cos\theta|.$$

$$\begin{aligned}\text{由于}\overrightarrow{P_1P_0}\cdot\boldsymbol{n}&=A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)+C(z_0-z_1)\\&=Ax_0+By_0+Cz_0-(Ax_1+By_1+Cz_1),\end{aligned}$$

又点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 在平面 π 上,从而 $Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$,即 $Ax_1+By_1+Cz_1=-D$.

所以 $\overrightarrow{P_1P_0}\cdot\boldsymbol{n}=Ax_0+By_0+Cz_0+D$.

于是 $|\cos\theta| = \dfrac{|\overrightarrow{P_1P_0}\cdot \boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{P_1P_0}||\boldsymbol{n}|} = \dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{|\overrightarrow{P_1P_0}|\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$,

故 $d = |\overrightarrow{P_1P_0}||\cos\theta| = \dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$,

即点 P_0 到平面 π 的距离为 $d = \dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

例 6 求点 $P_0(-1,2-2)$ 到平面 $2x+y-2z+5=0$ 的距离.

解 $d = \dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \dfrac{|2\times(-1)+1\times2-2\times(-2)+5|}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}} = \dfrac{9}{3} = 3.$

四、两平面的位置关系

空间两平面的位置关系有相交、平行和重合 3 种情形,而且当且仅当两平面有一部分公共点时它们相交,当且仅当两平面没有公共点时它们平行,当且仅当一个平面上的所有点都是另一个平面的点时它们重合.

如果设两个平面的方程为

$$\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \tag{9.9}$$

$$\pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \tag{9.10}$$

那么平面 π_1 与 π_2 是相交还是平行或者重合就可以归结为方程(9.9)和(9.10)组成的方程组是有解还是无解或者一个方程的解都是另一个方程的解. 于是我们有下面的定理.

定理 9.4 两平面 π_1 与 π_2 相交的充分必要条件是

$$A_1:B_1:C_1 \neq A_2:B_2:C_2,$$

平行的充分必要条件是

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\neq\frac{D_1}{D_2},$$

重合的充分必要条件是

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}.$$

下面我们来讨论两平面的夹角.

我们规定:两个平面的法向量夹角中不超过$\dfrac{\pi}{2}$的角为两平面的夹角. 由此,设平面 π_1 与 π_2 夹角为 θ,因为它们的法向量分别为 $\boldsymbol{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$,$\boldsymbol{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$,则

$$\cos\theta = \frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|} = \frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}. \tag{9.11}$$

由此可得,平面 π_1 与 π_2 垂直的充分必要条件为 $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$.

例 7 求平面 $x+2y-z+3=0$ 与 $2x+y+z-1=0$ 的夹角.

解 因为 $\boldsymbol{n}_1=(1,2,-1)$,$\boldsymbol{n}_2=(2,1,1)$,所以,由两平面夹角公式得

$$\cos\theta = \frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|} = \frac{|1\times2+2\times1+(-1)\times1|}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}\sqrt{2^2+1^2+1^2}} = \frac{1}{2}.$$

故两平面的夹角 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$.

习题9–4

1. 求过点(0,1,2)且法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,-2,-3)$ 的平面方程.

2. 求过点(1,−2,3)且与平面 $3x+2y-z=7$ 平行的平面方程.

3. 已知点 $A(0,1,-1)$,$B(1,2,2)$,求过点 A 且垂直于$\overrightarrow{AB}$的平面方程.

4. 指出下列各平面的位置特点.

(1)$z=0$;　　(2)$y=1$;

(3)$x-2y=0$;　　(4)$3x+2y=7$;

(5)$2x+y-3z=0$;　　(6)$x+y+z=5$.

5. 写出满足所给条件的平面方程.

(1)过点 $A(-3,1,-2)$,垂直于 z 轴.

(2)过点 $A(1,-2,4)$,垂直于 y 轴.

(3)过点 $A(4,0,-2)$,$B(5,1,7)$,平行于 x 轴.

6. 已知一个平面过点 $A(1,0,-1)$,平面上有向量 $\boldsymbol{a}=(-2,3,7)$,$\boldsymbol{b}=(0,-1,2)$,求此平面方程.

7. 一平面通过三点 $A(1,-2,3)$,$B(-1,2,0)$,$C(2,3,5)$,求此平面的方程.

8. 求平面 $x-2y+z-5=0$ 与 $2x-y-z-9=0$ 的夹角.

9. 判断下列各平面的位置关系.

(1)$2x-2y+z-5=0$,$3x+2y-2z-7=0$;

(2)$x-y+z-3=0$,$2x-2y+2z-5=0$;

(3)$2x-3y+z-6=0$,$x+2y-2z+1=0$.

第五节　空间直线及其方程

一、空间直线的方程

空间任意一条直线总可以看成是两个平面的交线. 设直线 L 是平面

$$\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$

$$\pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

的交线,所以可以用方程组

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases} \tag{9.12}$$

来表示直线的方程. 我们把方程组(9.12)称为直线的一般方程.

直线的一般方程虽然使用起来比较方便,但是它看不清楚直线的位置. 为此我们介绍直线的参数式方程和对称式方程.

在空间给定一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$和一个非零向量 $\boldsymbol{v}=(l,m,n)$,那么通过点 M_0 且与向量 $\boldsymbol{v}$

平行的直线 L 就被唯一确定. 我们把向量 $\boldsymbol{v}$ 称为直线 L 的方向向量. 显然,任何一个与直线 L 平行的非零向量都可以作为直线 L 的方向向量. 下面我们来建立直线 L 的方程.

设点 $M(x,y,z)$ 为直线 L 上任一点,则向量 $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$ 在直线 L 上,可以作为直线 L 的一个方向向量,因此 $\overrightarrow{M_0M}/\!/\boldsymbol{v}$,根据向量平行的充要条件,存在实数 t,使得 $\overrightarrow{M_0M}=t\boldsymbol{v}$,即

$$\begin{cases}x=x_0+lt,\\ y=y_0+mt,\\ z=z_0+nt.\end{cases}\tag{9.13}$$

我们把式(9.13)称为直线 L 的参数式方程,其中 t 为参数. 从直线的参数方程(9.13)中消去参数 t,得到

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}.\tag{9.14}$$

我们把式(9.14)称为直线 L 的对称式方程. 因为该方程是由直线上的一点和它的一个方向向量所确定的,因此我们又把它称为直线 L 的点向式方程.

注意:在式(9.14)中,当一个或两个分母为零时,我们约定分子也为零.

例 1 求通过空间两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 与 $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 的直线 L 的方程.

解 因为直线经过点 M_1 和 M_2,所以可以取向量

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$$

作为直线的方向向量. 因此,直线 L 可以看成经过点 M_1,且以 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 为方向向量的直线,所以直线 L 的点向式方程为

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.\tag{9.15}$$

我们把式(9.15)称为直线 L 的两点式方程.

例 2 求通过点 $A(2,0,-1)$ 且垂直于平面 $x-2y+3z+2=0$ 的直线方程.

解 由于所求直线垂直于已知平面,所以可以取平面的法向量 $\boldsymbol{n}=(1,-2,3)$ 作为直线的方向向量,故所求的直线方程为

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z+1}{3}.$$

例 3 化直线的一般方程

$$\begin{cases}x+3y-2z-2=0,\\ 2x-y+5z+3=0\end{cases}$$

为对称式方程.

解 因为直线同时在两个平面上,所以它的方向向量同时垂直于这两个平面的法向量. 而这两个平面的法向量分别为 $\boldsymbol{n}_1=(1,3,-2)$ 和 $\boldsymbol{n}_2=(2,-1,5)$,因此可以取直线的方向向量为

$$\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\begin{pmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 3 & -2\\ 2 & -1 & 5\end{pmatrix}=13\boldsymbol{i}-9\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k}.$$

由于方向向量的 3 个坐标都不为零,我们可以在直线上任取一点 (x_0,y_0,z_0),如取

$z_0=0$,代入直线的一般方程,得

$$\begin{cases}x_0+3y_0-2=0,\\2x_0-y_0+3=0.\end{cases}$$

解出 $x_0=-1,y_0=1$,则点$(-1,1,0)$在直线上.

故直线的对称式方程为

$$\frac{x+1}{13}=\frac{y-1}{-9}=\frac{z}{-7}.$$

二、空间两直线的夹角

我们规定:空间两条直线的方向向量夹角中不超过$\frac{\pi}{2}$的角为这两条直线的夹角.

设两条直线 L_1 和 L_2 的方向向量分别为 $\boldsymbol{v}_1=(l_1,m_1,n_1)$和 $\boldsymbol{v}_2=(l_2,m_2,n_2)$,则 L_1 和 L_2 夹角 φ 的余弦为

$$\cos\varphi=\frac{|\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2|}{|\boldsymbol{v}_1||\boldsymbol{v}_2|}=\frac{|l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2|}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}.\tag{9.16}$$

由此可得:直线 L_1 和 L_2 垂直的充分必要条件为

$$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0.$$

直线 L_1 和 L_2 平行(或重合)的充分必要条件为

$$\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}.$$

例 4　求直线

$$L_1:\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{-4}=\frac{z}{1}\text{与}L_2:\frac{x+1}{2}=\frac{y}{-2}=\frac{z-3}{-1}$$

的夹角 φ.

解　直线 L_1 和 L_2 的方向向量分别为 $\boldsymbol{v}_1=(1,-4,1)$和 $\boldsymbol{v}_2=(2,-2,-1)$,则

$$\cos\varphi=\frac{|\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2|}{|\boldsymbol{v}_1||\boldsymbol{v}_2|}=\frac{|1\times2+(-4)\times(-2)+1\times(-1)|}{\sqrt{1^2+(-4)^2+1^2}\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

故 $\varphi=\frac{\pi}{4}$.

三、直线与平面的夹角

我们规定:当直线 L 和平面 π 平行或 L 在平面 π 上时,它们的夹角为0;当直线 L 和平面 π 垂直时,它们的夹角为$\frac{\pi}{2}$;当直线 L 和平面 π 既不平行也不垂直时,它们的夹角为直线 L 和它在平面 π 上的投影直线所构成的锐角 φ,如图 9-17 所示.

设直线 L 的方向向量为 $\boldsymbol{v}=(l,m,n)$,平面 π 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$,它们的夹角为 θ,则

$$\varphi=\left|\frac{\pi}{2}-\theta\right|,$$

于是

$$\sin\varphi=|\cos\theta|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{v}|}=\frac{|Al+Bm+Cn|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}.$$

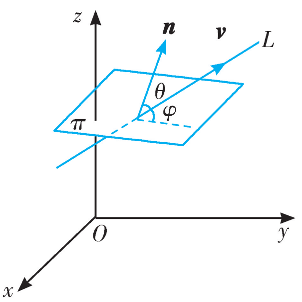

图 9-17

由此可知，直线 L 和平面 π 平行或 L 在平面 π 上的充分必要条件是

$$Al+Bm+Cn=0.$$

直线 L 和平面 π 垂直的充分必要条件是 $\boldsymbol{v}/\!/\boldsymbol{n}$，即

$$\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}.$$

例 5 求直线$\frac{x}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2}$与平面 $2x+y-z-3=0$ 的夹角.

解 $\boldsymbol{v}=(-1,1,2)$，$\boldsymbol{n}=(2,1,-1)$，

于是

$$\sin\varphi=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{v}|}=\frac{|-1\times2+1\times1+2\times(-1)|}{\sqrt{(-1)^2+1^2+2^2}\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}}$$

$$=\frac{|-3|}{6}=\frac{1}{2},$$

所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$.

习题9-5

1. 将直线方程化为参数方程及一般方程.

(1) $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{2}$； (2) $\frac{x+1}{2}=y-1=\frac{z-2}{3}$；

(3) $\frac{x+5}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-1}{3}$； (4) $\frac{x-2}{0}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+1}{0}$.

2. 将下列直线的一般方程化为点向式方程及参数方程.

(1) $\begin{cases}x-2y+z-2=0,\\3x+2y-z+22=0;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x+3y-2z-2=0,\\z=3y+2;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}z-2=0,\\x-3y=4;\end{cases}$ (4) $\begin{cases}x-3z-4=0,\\y-2z+2=0.\end{cases}$

3. 求过点 $M_1(0,-1,5)$ 和 $M_2(2,3,-2)$ 的直线方程.

4. 一直线通过点 $(1,-3,2)$ 且与直线$\frac{x-1}{-2}=y-1=\frac{z}{5}$平行，求此直线方程.

5. 一直线通过点 $(0,2,7)$ 且与直线$\begin{cases}x+y+2z-2=0,\\2x-3y+z+3=0\end{cases}$平行，求此直线方程.

6. 求过点 $(-2,3,-1)$ 且垂直于平面 $3x-y+4z+5=0$ 的直线方程.

7. 求直线 L_1：$\frac{x-4}{3}=\frac{y+2}{4}=\frac{z}{-1}$和 L_2：$\frac{x}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{2}$的夹角.

8. 确定下列每对直线的位置关系.

(1) $\frac{x-2}{1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-1}{-2}$与$\begin{cases}2x+y-2z-3=0,\\x-y+2z-5=0;\end{cases}$

(2) $\begin{cases}3x+z-4=0,\\y+2z-9=0\end{cases}$与$\begin{cases}6x-y+1=0,\\y+2z-9=0;\end{cases}$

(3) $\dfrac{x}{-3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{1}$与$\begin{cases}x=4-6t,\\y=-2+4t,\\z=t.\end{cases}$

9. 确定直线与平面的位置关系.

(1) $\dfrac{x+3}{-2}=\dfrac{y+4}{-7}=\dfrac{z}{3}$与 $4x-2y-2z-3=0$;

(2) $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z}{7}$与 $3x-2y-7z-8=0$;

(3) $\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-4}{-4}$与 $x+y+z-5=0$.

10. 求下列各平面的方程.

(1) 过点$(2,0,-3)$且与直线 $x-5=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z+2}{2}$垂直;

(2) 过点$(1,2,1)$且与直线 $L_1:\begin{cases}x=1+t,\\y=2-2t,\\z=-1-3t\end{cases}$ 及 $L_2:\begin{cases}x=3,\\y=1-t,\\z=2-t\end{cases}$ 平行;

(3) 过点$(3,1,-2)$及直线$\dfrac{x-4}{5}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z}{1}$.

11. 求点 $A(0,-1,1)$到直线$\begin{cases}y+1=0,\\x+2z-7=0\end{cases}$的距离.

第六节　曲面和空间曲线

前两节我们分别讨论了最简单的曲面——平面和最简单的曲线——直线,建立了它们的一些常见的方程形式,并讨论了与其相关的一些问题. 在这一节,我们来讨论一般的曲面和空间曲线方程,并介绍几种常见的曲面.

一、曲面方程的概念

在平面解析几何中,我们把平面曲线看成是平面上按照一定的规律运动的点的轨迹. 类似地,在空间解析几何中,我们把曲面看成是空间中按照一定的规律运动的点的轨迹. 空间中的点按一定的规律运动,它的坐标(x,y,z)就要满足某个关系式,这个关系式就是曲面的方程,记为 $F(x,y,z)=0$,于是有下面的定义.

定义 9.6　如果曲面 Σ 上任意一点的坐标都满足方程 $F(x,y,z)=0$,不在曲面 Σ 上的点的坐标都不满足方程 $F(x,y,z)=0$,则称方程 $F(x,y,z)=0$ 为曲面 Σ 的方程,而曲面 Σ 称为方程 $F(x,y,z)=0$ 的图形.

例 1　求到两定点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$,$M_2(x_2,y_2,z_2)$距离相等的点的轨迹方程.

解 设点 $M(x,y,z)$ 为轨迹上的任一点,则 $|\overrightarrow{M_1M}|=|\overrightarrow{M_2M}|$,即

$$\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}=\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(z-z_2)^2},$$

化简得

$$(x_2-x_1)x+(y_2-y_1)y+(z_2-z_1)z+\frac{1}{2}[x_1^2+y_1^2+z_1^2-(x_2^2+y_2^2+z_2^2)]=0.$$

轨迹上的点的坐标都满足上述方程,不在轨迹上的点的坐标都不满足该方程,所以它就是所求点的轨迹方程. 这是一个关于 x,y,z 的一次方程,它表示一个平面,这就是连接两点的线段的垂直平分面.

二、几种常见曲面及其方程

1. 球面

现在我们来求球心在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$,半径为 R 的球面方程.

设点 $M(x,y,z)$ 为球面上任意一点,则 $|\overrightarrow{M_0M}|=R$,于是有

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=R,$$

即

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2.$$

显然,球面上的点的坐标都满足上述方程,不在球面上的点的坐标都不满足该方程,所以它就是所求的球面方程. 特别地,球心在原点 $O(0,0,0)$,半径为 R 的球面方程为

$$x^2+y^2+z^2=R^2.$$

2. 母线平行于坐标轴的柱面

动直线 L 沿定曲线 C 平行移动所形成的曲面称为柱面. 定曲线 C 称为柱面的准线,动直线 L 称为柱面的母线,如图 9-18 所示.

下面我们只讨论准线在坐标面上,而母线垂直于该坐标面的柱面. 先看一个例子.

设一个圆柱面的母线平行于 z 轴,准线 C 是 xOy 平面上以原点为圆心,R 为半径的圆. 在平面直角坐标系中,准线 C 的方程为 $x^2+y^2=R^2$,现在我们来求这个圆柱面的方程.

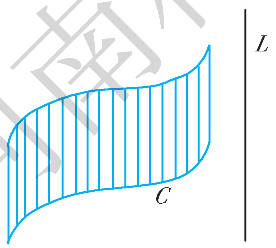

图 9-18

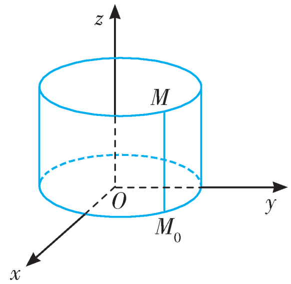

图 9-19

设点 $M(x,y,z)$ 为圆柱面上任意一点,过点 M 的母线与 xOy 平面的交点 $M_0(x_0,y_0,0)$ 一定在准线 C 上,如图 9-19 所示. 因此,不论点 M 的坐标中 z 取什么值,坐标 x_0 和 y_0 必满足方程 $x^2+y^2=R^2$;反之,不在圆柱面上的点的坐标不满足该方程,所以所求的圆柱面的方程为 $x^2+y^2=R^2$.

由此可知,在平面直角坐标系中,方程 $x^2+y^2=R^2$ 表示一个圆,而在空间直角坐标系中,方程 $x^2+y^2=R^2$ 表示一个母线平行于 z 轴的圆柱面.

一般地,如果柱面的准线是 xOy 平面上的曲线 C,它在平面直角坐标系中的方程为 $f(x,$

$y)=0$，那么以 C 为准线，母线平行于 z 轴的柱面方程就是 $f(x,y)=0$. 类似地，方程 $g(y,z)=0$ 表示母线平行于 x 轴的柱面，方程 $h(x,z)=0$ 表示母线平行于 y 轴的柱面.

由此可见，在空间直角坐标系中，只含两个变量的方程表示母线平行于所缺坐标轴的柱面.

例 2　在空间直角坐标系中方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，$y^2=2px$ 表示的柱面与 xOy 平面的交线分别是椭圆、双曲线和抛物线，所以它们依次叫作椭圆柱面（如图 9－20 所示）、双曲柱面（如图 9－21 所示）和抛物柱面（如图 9－22 所示）. 由于这些方程都是二次的，所以统称为二次柱面.

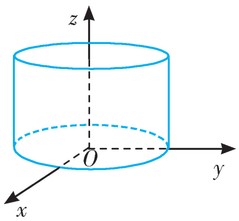

图 9－20

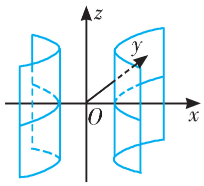

图 9－21

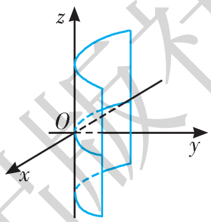

图 9－22

3. 以坐标轴为旋转轴的旋转曲面

一条曲线 C 绕一定直线 L 旋转所生成的曲面称为旋转曲面. 曲线 C 称为旋转曲面的母线，定直线 L 称为旋转曲面的旋转轴（或者称为轴）.

下面我们只讨论母线在某个坐标平面上的平面曲线，而旋转轴是该坐标平面上的一条坐标轴的旋转曲面.

设在 yOz 平面上有一条曲线 C，它在平面直角坐标系中的方程为 $f(y,z)=0$，现在我们来求曲线 C 绕 z 轴旋转所生成的旋转曲面方程.

设点 $M(x,y,z)$ 为旋转曲面上任意一点，它是由母线上点 $M_1(0,y_1,z_1)$ 绕 z 轴旋转而得来的，如图 9－23 所示. 显然，$z=z_1$，且点 M 到 z 轴的距离等于点 M_1 到 z 轴的距离，即 $\sqrt{x^2+y^2}=|y_1|$，而点 M_1 在母线 C 上，所以 $f(y_1,z_1)=0$，于是有 $f\left(\pm\sqrt{x^2+y^2},z\right)=0$.

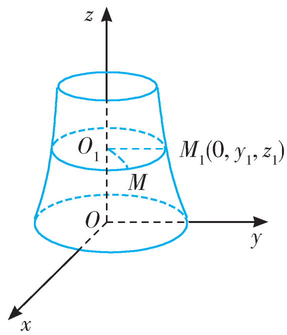

图 9－23

容易知道，旋转曲面上的点的坐标都满足方程 $f\left(\pm\sqrt{x^2+y^2},z\right)=0$，而不在旋转曲面上的点的坐标都不满足该方程，故此方程就是以曲线 C 为母线，z 轴为旋转轴的旋转曲面方程.

同理，曲线 C 绕 y 轴旋转所生成的旋转曲面方程为 $f\left(y,\pm\sqrt{x^2+z^2}\right)=0$.

对于其他坐标面上的曲线，绕它所在坐标面的一条坐标轴旋转所得的旋转曲面的方程可以类似求出，这样我们就得到如下规律.

当坐标平面上的曲线 C 绕此坐标平面里的一条坐标轴旋转时，为了求出这样的旋转曲面的方程，只要将曲线 C 在坐标面里的方程保留和旋转轴同名的坐标，而用其他两个坐标平方和的平方根来代替方程中的另一坐标即可.

例 3 求 yOz 平面上的直线 $z=ky(k>0)$ 绕 z 轴旋转所生成的旋转曲面方程.

解 在 $z=ky$ 中把 y 换成 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$,得

$$z=\pm k\sqrt{x^2+y^2},$$

即 $z^2=k^2(x^2+y^2)$.

这是一个顶点在原点,对称轴为 z 轴的圆锥面,如图 9-24 所示.

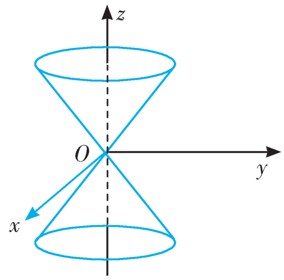

图 9-24

例 4 将 xOy 平面上的椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 分别绕长轴(即 x 轴)和短轴(即 y 轴)旋转,求所得的旋转曲面方程.

解 因为旋转轴是 x 轴,同名坐标为 x,在方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 中保留坐标 x 不变,用 $\pm\sqrt{y^2+z^2}$ 代替 y,即得将椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b)$ 绕其长轴旋转所得的旋转曲面方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}=1. \tag{9.17}$$

同样将椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b)$ 绕其短轴旋转所得的旋转曲面方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{a^2}=1. \tag{9.18}$$

式(9.17)表示的曲面叫作长形旋转椭球面,如图 9-25 所示. 式(9.18)表示的曲面叫作扁形旋转椭球面,如图 9-26 所示.

图 9-25

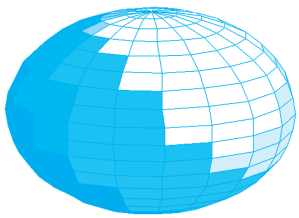

图 9-26

将 xOy 平面上的双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 绕虚轴(即 y 轴)旋转所得的旋转曲面方程为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{a^2}=1, \tag{9.19}$$

绕实轴(即 x 轴)旋转所得的旋转曲面方程为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{b^2}=1. \tag{9.20}$$

式(9.19)表示的曲面叫作单叶旋转双曲面,如图 9-27 所示. 式(9.20)表示的曲面叫作双叶旋转双曲面,如图 9-28 所示.

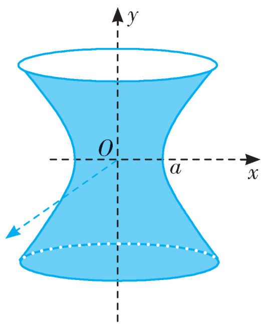

图 9－27

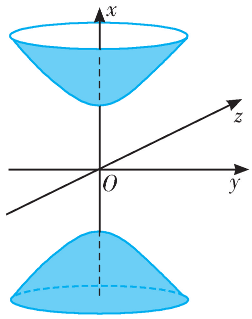

图 9－28

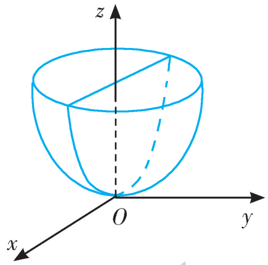

图 9－29

将 yOz 平面上的抛物线 $y^2=2pz$ 绕它的对称轴(即 z 轴)旋转所得的旋转曲面方程为

$$x^2+y^2=2pz, \tag{9.21}$$

那么式(9.21)表示的曲面叫作旋转抛物面,如图 9－29 所示.

三、空间曲线的方程

前面我们曾把空间直线看成是两平面的交线,类似地,空间曲线也可以看成是两个曲面的交线.

设两个曲面的方程分别为 $F_1(x,y,z)=0$ 和 $F_2(x,y,z)=0$,它们相交于曲线 Γ. 这样,曲线 Γ 上的任意点同时在这两个曲面上,它的坐标就同时满足这两个方程;反过来,同时满足这两个方程的任意一组解所决定的点同时在这两个曲面上,即在曲线 Γ 上. 因此,联立方程组

$$\begin{cases} F_1(x,y,z)=0, \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases}$$

即为空间曲线 Γ 的方程,我们把它称为空间曲线的一般方程. 代数上,任何方程组的解,也一定是与它等价的方程组的解,所以空间曲线的方程可以用不同形式的方程组来表示.

例 5　在空间直角坐标系下,方程组

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=9, \\ z=0 \end{cases}$$

表示什么曲线?

解　方程 $x^2+y^2+z^2=9$ 是球心在原点,半径为 3 的球面,$z=0$ 是 xOy 坐标平面,所以它们的交线是 xOy 坐标平面上的圆 $x^2+y^2=9$.

如果把方程组改写成同解方程组,则有

$$\begin{cases} x^2+y^2=9, \\ z=0, \end{cases}$$

它表示母线平行于 z 轴的圆柱面 $x^2+y^2=9$ 与 xOy 坐标平面的交线.

空间曲线也可以看成一动点在空间中运动的轨迹,动点的位置随着某一个参数而变化. 由此我们又可得空间曲线的参数方程,即

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), (t \text{ 为参数}). \\ z=z(t) \end{cases}$$

例 6　设空间一点 M 在圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 上以角速度 ω 绕 z 轴旋转,同时又以线速度 v 沿平行于 z 轴的正方向上升(其中 ω,v 都是常数),那么动点 M 的运动轨迹称为螺旋线,如图 9-30 所示,试建立该螺旋线的参数方程.

解　取时间 t 为参数,设 $t=0$ 时动点在 $A(a,0,0)$ 处,经过时间 t 运动到点 $M(x,y,z)$,记点 M 在 xOy 坐标平面上的投影为 $M'(x,y,0)$. 因为 $\angle AOM'$ 是动点在时间 t 内转过的角度,线段 $M'M$ 的长 $|M'M|$ 是在时间 t 内动点上升的高度,所以有

$$\angle AOM'=\omega t,\ |M'M|=vt,$$

于是螺旋线的参数方程为

$$\begin{cases}x=a\cos\omega t,\\ y=a\sin\omega t,\\ z=vt.\end{cases}$$

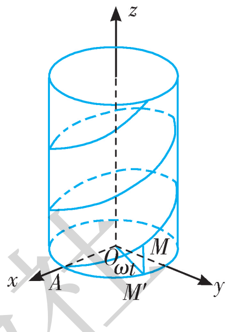

图 9-30

四、空间曲线在坐标面上的射影

设 Γ 为已知空间曲线,则以 Γ 为准线,以平行于 z 轴的直线为母线的柱面称为空间曲线 Γ 关于 xOy 坐标平面的射影柱面. 这个射影柱面与 xOy 坐标平面的交线称为曲线 Γ 在 xOy 坐标平面上的射影曲线. 类似地,我们也可以定义曲线 Γ 关于 yOz 坐标平面、xOz 坐标平面的射影柱面和射影曲线.

下面我们来讨论如何求空间曲线关于坐标平面的射影柱面和在坐标平面上的射影曲线.

设空间曲线 Γ 的方程为

$$\begin{cases}F_1(x,y,z)=0,\\ F_2(x,y,z)=0.\end{cases}$$

消去 z,得

$$F(x,y)=0.$$

满足曲线 Γ 方程的点一定满足方程 $F(x,y)=0$,而 $F(x,y)=0$ 是一个母线平行于 z 轴的柱面方程. 所以,$F(x,y)=0$ 就是曲线 Γ 关于 xOy 坐标平面的射影柱面方程,而

$$\begin{cases}F(x,y)=0,\\ z=0\end{cases}$$

就是曲线 Γ 在 xOy 坐标平面上的射影曲线.

类似地,从曲线 Γ 的方程中消去 x 或者 y,就可以得到曲线 Γ 关于 yOz 坐标平面或者 xOz 坐标平面的射影柱面,从而也可以得到曲线 Γ 在 yOz 坐标平面或者 xOz 坐标平面上的射影曲线.

例 7　求曲线

$$\Gamma:\begin{cases}z=\sqrt{x^2+y^2},\\ x^2+y^2+z^2=1\end{cases}$$

在 xOy 坐标平面上的射影曲线方程,并指出它在 xOy 坐标平面上是一条什么样的曲线.

解　消去 z,得曲线 Γ 关于 xOy 坐标平面的射影柱面方程为

$$x^2+y^2=\frac{1}{2},$$

所以曲线 Γ 在 xOy 坐标平面上的射影曲线为

$$\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{1}{2}, \\ z=0. \end{cases}$$

这是 xOy 坐标平面上的一个圆，如图 9－31 所示.

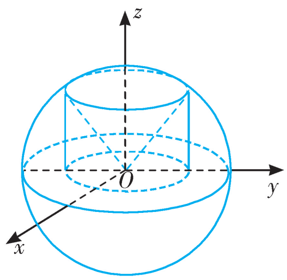

图 9－31

习题9–6

1. 求下列球面的方程.

(1)球心在点$(-1,-3,2)$处，且通过点$(1,-1,1)$；

(2)球面过点$(0,2,2)$，$(4,0,0)$，球心在 y 轴上.

2. 求下列球面的球心和半径.

(1)$x^2+y^2+z^2-6z-7=0$；　　(2)$36x^2+36y^2+36z^2-72x-36y+24z+13=0$.

3. 求旋转曲面的方程.

(1)$\begin{cases} \dfrac{x^2}{3}+\dfrac{z^2}{4}=1, \\ y=0 \end{cases}$绕 x 轴及 z 轴旋转；

(2)$\begin{cases} z=\sqrt{y}, \\ x=0 \end{cases}$绕 y 轴及 z 轴旋转；

(3)$\begin{cases} x^2-y^2=1, \\ z=0 \end{cases}$绕 x 轴及 y 轴旋转.

4. 下面的方程组各表示什么曲线?

(1)$\begin{cases} x^2-4y^2=8z, \\ z=8; \end{cases}$　　(2)$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=25, \\ x=3; \end{cases}$

(3)$\begin{cases} x^2+4y^2+9z^2=36, \\ y=1; \end{cases}$　　(4)$\begin{cases} x^2-4y^2=4z, \\ y=-2. \end{cases}$

5. 求下列各曲线在指定坐标面上的射影曲线的方程.

(1)$\begin{cases} x^2+y^2-z=0, \\ z=x+1 \end{cases}$在 xOy 坐标面；

(2)$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1 \end{cases}$在 xOy 坐标面；

(3)$\begin{cases} 2x^2+y^2+z^2=16, \\ x^2-y^2+z^2=0 \end{cases}$在 yOz 及 zOx 坐标面.

第七节 常见二次曲面的图形

在空间直角坐标系中，一般的三元方程 $F(x,y,z)=0$ 表示一个曲面. 如果方程 $F(x,y,z)=0$ 是一次的，它的图形是一个平面，所以我们把平面也称为一次曲面. 如果方程是二次的，我们把它的图形称为二次曲面. 本节我们用平行截割法来研究几种常见的三元二次方程所表示的二次曲面的形状和特征. 所谓平行截割法，就是用一组平行于坐标平面的平面去截曲面，所得的交线都是平面曲线，通过考察这些交线的形状，综合起来研究曲面的形状和特征.

一、椭球面

在空间直角坐标系下，方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\,(a>0,b>0,c>0) \tag{9.22}$$

表示的曲面称为椭球面，其中 a,b,c 称为椭球面的半轴.

由方程(9.22)可知，它的图形具有如下性质：

(1)对称性：由于方程中只含有坐标的平方项，可见当点 (x,y,z) 满足方程时，点 $(\pm x,\pm y,\pm z)$ 也都满足方程，其中正、负号可以任意选取，所以椭球面关于 3 个坐标平面、3 条坐标轴和坐标原点都对称，即 3 个坐标平面都是它的对称平面，3 条坐标轴都是它的对称轴，坐标原点是它的对称中心.

(2)有界性：从方程(9.22)可以看出，

$$\frac{x^2}{a^2}\leqslant 1,\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1,\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1,$$

即 $|x|\leqslant a,|y|\leqslant b,|z|\leqslant c$.

可见，椭球面完全被封闭在 $x=\pm a,y=\pm b,z=\pm c$ 这 6 个平面所围成的长方体内部. 现在用平行截割法来讨论椭球面的形状.

椭球面与 3 个坐标平面的交线分别是：

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ z=0;\end{cases} \tag{9.23}$$

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ y=0;\end{cases} \tag{9.24}$$

$$\begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ x=0.\end{cases} \tag{9.25}$$

这是分别在 3 个坐标平面上的 3 个椭圆.

用平行于 xOy 坐标平面的平面 $z=h$ 去截椭球面(9.22)，所得交线方程为

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1-\dfrac{h^2}{c^2},\\ z=h.\end{cases}\tag{9.26}$$

当$|h|>c$时,式(9.26)无图形,这表示平面$z=h$与椭球面(9.22)不相交;当$|h|=c$时,式(9.26)表示的图形是平面$z=h$上的一个点$(0,0,c)$或$(0,0,-c)$;当$|h|<c$时,式(9.26)表示的图形是一个椭圆,它的两半轴长分别是$a\sqrt{1-\dfrac{h^2}{c^2}}$和$b\sqrt{1-\dfrac{h^2}{c^2}}$,两轴端点坐标分别是$\left(\pm a\sqrt{1-\dfrac{h^2}{c^2}},0,h\right)$和$\left(0,\pm b\sqrt{1-\dfrac{h^2}{c^2}},h\right)$. 容易验证,两轴的端点分别在式(9.24)和式(9.25)表示的椭圆上. 于是,椭球面(9.22)可以看成是由一个椭圆变动(大小位置都改变)而形成的,这个椭圆在变动过程中保持所在平面与xOy坐标平面平行,并且两轴端点分别在式(9.24)和式(9.25)表示的两个定椭圆上滑动. 用平行于另外两个坐标平面的平面去截椭球面,可以得到类似的结果.

综上可知,椭球面(9.22)的形状如图9-32所示.

如果$a=b=c$,(9.22)变成$x^2+y^2+z^2=a^2$,它是球心在原点,半径为a的球面. 如果a,b,c中有两个相等,例如$a=b\neq c$,(9.22)变为$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$,它是一个旋转椭球面. 由此可知,旋转椭球面和球面都是椭球面的特例.

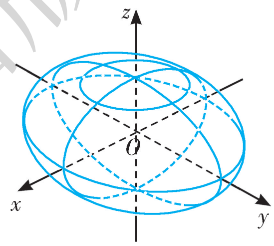

图9-32

二、双曲面

1. 单叶双曲面

在空间直角坐标系下,方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1(a>0,b>0,c>0)\tag{9.27}$$

表示的曲面称为单叶双曲面.

显然,单叶双曲面(9.27)和椭球面(9.22)一样,它也关于3个坐标平面、3条坐标轴和坐标原点都对称.

单叶双曲面与3个坐标平面的交线分别是:

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ z=0;\end{cases}\tag{9.28}$$

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ y=0;\end{cases}\tag{9.29}$$

$$\begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ x=0.\end{cases}\tag{9.30}$$

它们的图形分别是xOy平面上的椭圆,xOz平面上的双曲线和yOz平面上的双曲线.

用平行于xOy坐标平面的平面$z=h$去截单叶双曲面(9.27),所得交线方程为

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1+\dfrac{h^2}{c^2},\\ z=h.\end{cases}$$

这是平面 $z=h$ 上的一个椭圆,它的两半轴长分别是 $a\sqrt{1+\dfrac{h^2}{c^2}}$ 和 $b\sqrt{1+\dfrac{h^2}{c^2}}$,两轴端点坐标分别是 $\left(\pm a\sqrt{1+\dfrac{h^2}{c^2}},0,h\right)$ 和 $\left(0,\pm b\sqrt{1+\dfrac{h^2}{c^2}},h\right)$. 容易验证,两轴的端点分别在式(9.29)和式(9.30)表示的双曲线上. 于是,单叶双曲面(9.27)可以看成是由一个椭圆变动(大小位置都改变)而形成的,这个椭圆在变动过程中保持所在平面与 xOy 坐标平面平行,并且两轴端点分别在式(9.29)和式(9.30)表示的两条定双曲线上滑动.

用平行于 xOz 坐标平面的平面 $y=h$ 去截单叶双曲面(9.27),所得交线方程为

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{h^2}{b^2},\\ y=h.\end{cases}\tag{9.31}$$

当 $|h|<b$ 时,式(9.31)为双曲线,它的实轴平行于 x 轴,实半轴长为 $a\sqrt{1-\dfrac{h^2}{b^2}}$,虚轴平行于 z 轴,虚半轴长为 $c\sqrt{1-\dfrac{h^2}{b^2}}$,且顶点 $\left(\pm a\sqrt{1-\dfrac{h^2}{b^2}},h,0\right)$ 在式(9.28)表示的椭圆上.

当 $|h|>b$ 时,式(9.31)也是双曲线,它的实轴平行于 z 轴,实半轴长为 $c\sqrt{\dfrac{h^2}{b^2}-1}$,虚轴平行于 x 轴,虚半轴长为 $a\sqrt{\dfrac{h^2}{b^2}-1}$,且顶点 $\left(0,h,\pm c\sqrt{\dfrac{h^2}{b^2}-1}\right)$ 在式(9.30)表示的双曲线上.

当 $|h|=b$ 时,(9.27)变为

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0,\\ y=b\end{cases}\text{或}\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0,\\ y=-b.\end{cases}$$

这是两条相交于点(0,b,0)或(0,$-b$,0)的直线,即

$$\begin{cases}\dfrac{x}{a}\pm\dfrac{z}{c}=0,\\ y=b\end{cases}\text{或}\begin{cases}\dfrac{x}{a}\pm\dfrac{z}{c}=0,\\ y=-b.\end{cases}$$

用平行于 yOz 坐标平面的平面去截单叶双曲面(9.27),可以得到与用平行于 xOz 坐标平面的平面去截完全类似的结果.

综上可知,单叶双曲面(9.27)的形状如图 9-33 所示.

在(9.27)中,如果 $a=b$,它就变成单叶旋转双曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

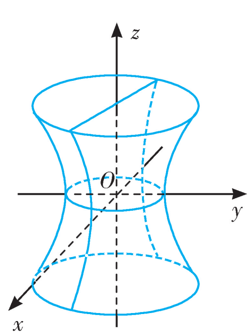

图 9 - 33

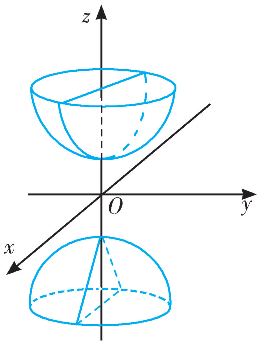

图 9 - 34

2. 双叶双曲面

在空间直角坐标系下，方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1(a>0,b>0,c>0) \tag{9.32}$$

表示的曲面称为双叶双曲面.

从方程(9.32)可知，双叶双曲面也关于 3 个坐标平面、3 条坐标轴和坐标原点都对称. 曲面上的点满足 $z^2 \geqslant c^2$，所以曲面被分成 $z \geqslant c$ 和 $z \leqslant -c$ 两叶. 类似地，我们也可以用平行截割法讨论它的形状，如图 9 - 34 所示.

在(9.32)中，如果 $a=b$，它就变成双叶旋转双曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$.

三、抛物面

1. 椭圆抛物面

在空间直角坐标系下，方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z(a>0,b>0) \tag{9.33}$$

表示的曲面称为椭圆抛物面.

从方程(9.33)可知，椭圆抛物面关于 xOz 和 yOz 坐标平面以及 z 轴对称，但它没有对称中心. 因为 $z=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right) \geqslant 0$，所以曲面全部落在 xOy 平面的一侧，即在 $z \geqslant 0$ 的那一侧.

用 xOy 坐标平面去截椭圆抛物面(9.33)，截得一点(0,0,0)，这点称为椭圆抛物面的顶点. 用 xOz 和 yOz 坐标平面来截椭圆抛物面(9.33)，所得交线方程分别为

$$\begin{cases} x^2=2a^2z, \\ y=0 \end{cases} \tag{9.34}$$

和

$$\begin{cases} y^2=2b^2z, \\ x=0. \end{cases} \tag{9.35}$$

这是两条抛物线，它们所在的平面相互垂直，有相同的顶点(原点)和对称轴(z 轴)，并且还有相同的开口方向(z 轴正方向).

用平行于 xOy 坐标平面的平面 $z=h(h>0)$ 去截椭圆抛物面(9.33)，所得交线方程为

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{2a^2h}+\dfrac{y^2}{2b^2h}=1,\\ z=h.\end{cases}\tag{9.36}$$

这是平面 $z=h$ 上的一个椭圆，它的两轴端点坐标分别是 $(\pm a\sqrt{2h},0,h)$ 和 $(0,\pm b\sqrt{2h},h)$. 容易验证，它们分别在式(9.34)和式(9.35)表示的抛物线上. 于是，椭圆抛物面(9.33)可以看成是由一个椭圆变动（大小位置都改变）而形成的，这个椭圆在变动过程中保持所在平面与 xOy 坐标平面平行，并且两轴端点分别在式(9.34)和式(9.35)表示的两条定抛物线上滑动.

用平行于 xOz 坐标平面的平面 $y=t$ 去截椭圆抛物面(9.33)，所得交线方程为

$$\begin{cases}x^2=2a^2\left(z-\dfrac{t^2}{2b^2}\right),\\ y=h.\end{cases}\tag{9.37}$$

这是一条抛物线，它与抛物线(9.34)全等（即有相同的焦参数），它所在的平面与抛物线(9.34)所在平面平行，并且还有相同的开口方向. 另外，它的顶点 $\left(0,t,\dfrac{t^2}{2b^2}\right)$ 落在抛物线(9.35)上.

可见，取两条所在平面相互垂直有相同顶点和对称轴以及有相同开口方向的抛物线，让其中一条抛物线平行于自身所在的平面，并使其顶点在另一条抛物线上滑动，那么第一条抛物线的运动轨迹就是一个椭圆抛物面.

综上可知，椭圆抛物面(9.33)的形状如图 9－35 所示. 在式(9.33)中，如果 $a=b$，它就变成旋转抛物面 $x^2+y^2=2a^2z$.

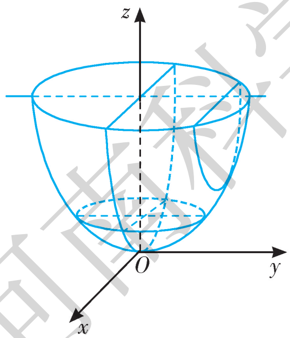

图 9－35

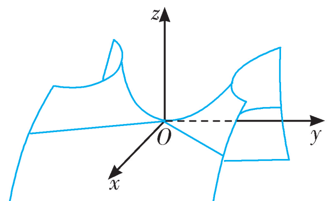

图 9－36

2. 双曲抛物面

在空间直角坐标系下，方程

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z\,(a>0,b>0)\tag{9.38}$$

表示的曲面称为双曲抛物面.

显然，和椭圆抛物面一样，双曲抛物面也关于 xOz 和 yOz 坐标平面以及 z 轴对称，但它没有对称中心.

类似地，我们也可以用平行截割法讨论双曲抛物面的形状，如图 9－36 所示. 从图形来看，双曲抛物面大致像一只马鞍子，所以双曲抛物面也叫作马鞍面.

综合测试题九

1. 设 $\boldsymbol{a}=(1,2,1)$,$\boldsymbol{b}=(-2,0,-3)$,$\boldsymbol{c}=(0,0,2)$,求 $3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+5\boldsymbol{c}$.

2. 设 $A(-1,2,3)$,$B(1,1,1)$,$C(0,0,5)$,求

(1)$\overrightarrow{AB}$的方向余弦,并求$\overrightarrow{AB^0}$;

(2)$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$,$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$.

3. 设球面的一般方程为 $x^2+y^2+z^2-2x+y-3z=0$,求其球心与半径.

4. 将平面方程 $2x+3y-4z-12=0$ 化为截距式.

5. 平面 π 在 x 轴上截距为 2,在 z 轴上的截距为 -2,且平行于 y 轴,求平面 π.

6. 将直线的一般方程 $L:\begin{cases}2x-y+1=0,\\ y-z+6=0\end{cases}$ 化为点向式方程及参数式方程.

7. 求过一点 $M(1,-1,2)$ 且垂直于平面 $\pi:3x-z=0$ 的直线方程.

8. 求过两个点 $A(1,-1,0)$,$B(0,1,1)$ 且与直线 $\begin{cases}x=t,\\ y=1+2t,\\ z=-1+t\end{cases}$ 平行的平面方程.

9. 求过一点 $P(-2,0,1)$ 且与 $\boldsymbol{a}=(3,1,-1)$,$\boldsymbol{b}=(1,-1,0)$ 均垂直的直线方程.

10. 求过一个点 $P(-1,2,-1)$ 和直线 $L:\begin{cases}x-y+z=0,\\ 2x+5y-z+4=0\end{cases}$ 的平面方程.

11. 求两个平行平面之间的距离:$\pi_1:2x-y+2z=0$ 与 $\pi_2:2x-y+2z+4=0$.

12. 已知在平面 $\pi:x-y+z+1=0$ 上有两个点 $A(0,1,0)$,$B(1,4,2)$,且有一条在 π 上的直线 L,在其上任意一点与 A,B 等距. 求此直线 L 的方程.

13. 求与两定点 $P(c,0,0)$,$Q(-c,0,0)$ 的距离之和为定值 $2a(a>c>0)$ 的点的轨迹,并说明表示什么图形.

数学史话　1637 年,笛卡儿(1596—1650,法国数学家)发表了著名的哲学著作《更好地指导推理和寻求科学真理的方法论》. 该书的附录中题为《几何学》的一篇公布了作者长期深思熟虑的坐标几何的思想,实现了用代数研究几何的宏伟梦想. 他用两条互相垂直且交于原点的数轴作为基准,将平面上的点位置确定下来,这就是后人所说的笛卡儿坐标系. 笛卡儿坐标系的建立,为人们用代数方法研究几何架设了桥梁.