

巍巍交大 百年书香
www.jiaodapress.com.cn
bookinfo@sjtu.edu.cn

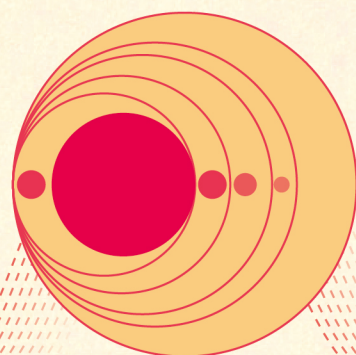


策划编辑 金颖杰
责任编辑 胡思佳 柳卫清
封面设计 刘文东

第2版

高等数学

下册



扫描二维码
关注上海交通大学出版社
官方微信

ISBN 978-7-313-28789-2



定价:49.90元



上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

第2版

高等数学

下册

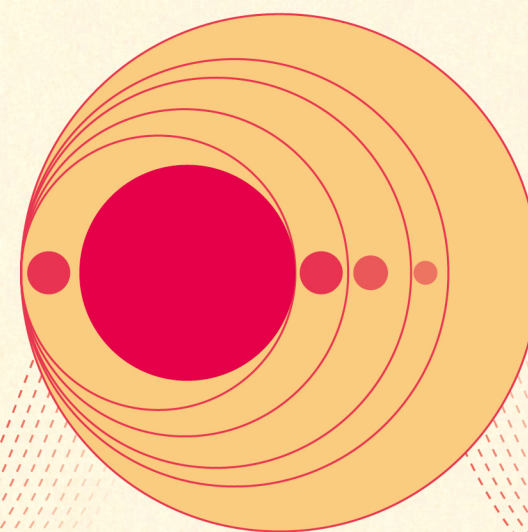
主编 王志平

高等数学

第2版

下册

主编 王志平



上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

免费提供

精品教学资料包

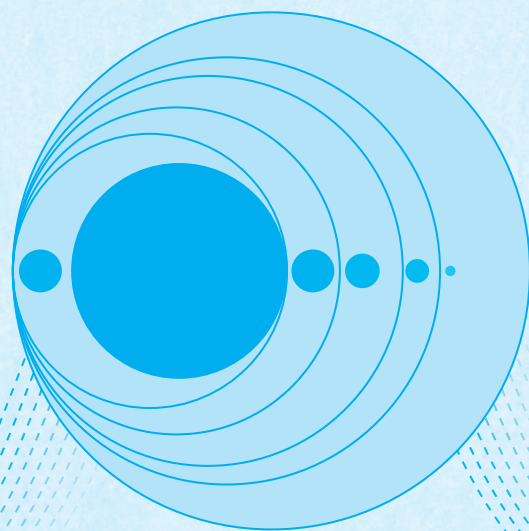
服务热线: 400-615-1233
www.huatengedu.com.cn

第2版

高等数学

下册

主编 王志平



上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

内容提要

本书从培养学生运用理论知识解决实际问题的角度出发,由浅入深、由易到难、由具体到抽象,将教学内容逐步展开并融入育人元素、信息技术等,使教材更符合现今的教情、学情.本书共分为5章,内容包括向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数.附录中包含 Mathematica 数学实验.

本书既可作为普通高等院校各专业高等数学课程的教材,也可供其他相关工作者参考使用.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.下册 / 王志平主编. —2版. —上海:
上海交通大学出版社, 2023.8 (2025.2 重印)

ISBN 978-7-313-28789-2

I. ①高… II. ①王… III. ①高等数学 IV. ①O13

中国国家版本馆 CIP 数据核字(2023)第 148193 号

高等数学(下册)(第2版)

GAODENG SHUXUE(XIACE) (DI-ER BAN)

主 编:王志平

出版发行:上海交通大学出版社

邮政编码:200030

印 制:大厂回族自治县聚鑫印刷有限责任公司

开 本:787 mm×1 092 mm 1/16

字 数:346 千字

版 次:2023 年 8 月第 2 版

书 号:ISBN 978-7-313-28789-2

定 价:49.90 元

地 址:上海市番禺路 951 号

电 话:021-64071208

经 销:全国新华书店

印 张:16.75

印 次:2025 年 2 月第 8 次印刷

版权所有 侵权必究

告读者:如发现本书有印装质量问题请与印刷厂质量科联系

联系电话:0316-8836866

第2版前言

2022年教育部启动新时代高等教育育人质量工程,实施卓越拔尖人才培养计划,深化新工科、新医科、新农科、新文科建设,全面推进高等教育教学数字化等,为高等院校教学改革指明了方向.党的二十大报告指出,“教育是国之大计、党之大计.培养什么人、怎样培养人、为谁培养人是教育的根本问题.育人的根本在于立德”.落实立德树人根本任务,培养学生的应用意识,加强数字化资源建设,这必将成为教学中要解决的问题.在此背景下,我们对本书进行了修订.

本次修订延续了第1版的风格,保留了原来的主体内容,共分为5章,内容包括向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数.附录中包含 Mathematica 数学实验.

本书修订后的特色如下.

1. 立德树人,融入育人元素

为落实《高等学校课程思政建设指导纲要》的要求,推进习近平新时代中国特色社会主义思想进课堂、进教材、进头脑,本书以党的二十大精神为指导,融入课程思政,如每章介绍了中外数学家的生平和成就,在相应章节处融入了育人元素等,可激发学生学习数学的热情,培养学生的家国情怀和做事精益求精的作风.

2. 问题驱动,逐步展开教学内容

通过一个具体问题引入相关的定义与知识点,由浅入深、由易到难、由具体到抽象,将教学内容逐步展开,有助于学生从问题中去理解和掌握概念.每章末都对本章的知识点进行了总结.

3. 习题丰富,难易适中

本书所设习题既有适合巩固复习的基础题,又有适合提升能力的拔高题,可以满足各个层次学生的需求.

4. 加入 Mathematica 应用,培养学生的应用意识

以 Mathematica 软件为平台,将数学知识与现代信息技术相结合,展现数学实验结果,有利于培养学生解决实际问题的能力.

5. 配套资源丰富

本书配有微课,以二维码的形式呈现在书中,同时本书也配有丰富的电子教学资料包,为师生提供服务,能有效提高教学质量.

本书由大连海事大学王志平任主编,大连海事大学杨思博、徐丽君、杨云龙参与了编写.全书由王志平统稿.

本书在编写过程中得到了大连海事大学高等数学教学中心其他教师的帮助和支持,在此表示衷心的感谢.

由于编者水平有限,书中存在的疏漏和不妥之处,恳请广大读者批评指正.

编者

第1版前言

本书是编者在总结多年教学经验的基础上编写而成的,可作为普通高等院校理工科高等数学课程的教材或参考书.

本书从培养学生运用理论知识解决实际问题的角度出发,由浅入深、由易到难、由具体到抽象,将教学内容逐步展开,并根据学生的认知水平,设置了大量的例题,涉及了各种不同的解题技巧和方法,能满足不同层次学生的需要.

本书共分为上、下两册.上册内容包括函数、极限与连续,导数与微分,微分中值定理及导数的应用,不定积分,定积分,定积分的应用,微分方程等七章.下册内容包括向量代数与空间解析几何,多元函数微分学,重积分,曲线积分、曲面积分、数量场与向量场,无穷级数等五章.

本书的部分章节通过一个具体问题引入相关的定义与知识点,有助于学生从问题中去理解和掌握概念.每一章末都对本章的知识点进行了小结.

另外,本书中带有“*”的内容,读者可根据实际需要选学.

本书由大连海事大学王志平教授任主编,王人连任副主编.编写人员及分工如下:周若虹编写第一章、第二章、第三章、第四章,王人连编写第五章、第六章、第七章,王科伦编写第八章、第九章,王志平编写第十章、第十一章、第十二章.全书由赵连昌主审,最后由王志平统稿整理.

在本书编写过程中,始终得到大连海事大学数学系其他老师的帮助和支持,在此表示衷心的感谢.由于编者的水平有限,书中难免会有疏漏和错误,恳请广大读者批评指正.

编 者

第一章 向量代数与空间解析几何	1
第一节 向量的线性运算与空间直角坐标系	1
第二节 数量积 向量积 混合积	13
第三节 平面及其方程	21
第四节 空间直线及其方程	27
第五节 曲面方程	35
第六节 空间曲线方程	44
本章小结	48
第一章复习题	51
第二章 多元函数微分学	53
第一节 多元函数	53
第二节 偏导数	60
第三节 全微分	65
第四节 多元复合函数的微分法	69
第五节 隐函数的微分法	75
第六节 多元函数微分学在几何中的应用	81
第七节 方向导数与梯度	86
第八节 多元函数的极值与最值	92
本章小结	98
第二章复习题	99
第三章 重积分	101
第一节 二重积分	101
第二节 直角坐标系中二重积分的计算	106
第三节 极坐标系中二重积分的计算	115
第四节 二重积分的应用	121
第五节 三重积分(一)	125
第六节 三重积分(二)	131



本章小结	137
第三章复习题	139
第四章 曲线积分与曲面积分	143
第一节 第一类曲线积分	143
第二节 第二类曲线积分	150
第三节 格林公式 平面上曲线积分与路径无关的条件	158
第四节 第一类曲面积分	168
第五节 第二类曲面积分	173
第六节 高斯公式	180
本章小结	183
第四章复习题	186
第五章 无穷级数	189
第一节 常数项级数	189
第二节 正项级数的收敛判别法	194
第三节 一般常数项级数的收敛判别法	201
第四节 幂级数	206
第五节 函数的幂级数展开	214
第六节 以 2π 为周期的傅里叶级数	220
本章小结	226
第五章复习题	227
附录	230
附录 I 向量代数运算与空间图形绘制实验	230
附录 II 多元函数微积分及其应用实验	239
附录 III 无穷级数探索实验	253
参考文献	260

第一章

向量代数与空间解析几何

中学时曾学习过平面解析几何,它是由法国数学家笛卡儿和费马等于 17 世纪开创的.平面解析几何通过建立一个平面直角坐标系,将平面上的点与一个有序数组对应起来,从而将平面上的曲线或图形与代数方程对应起来,这样就可以用代数方法来研究几何问题.空间解析几何是平面解析几何从二维平面向三维空间的进一步拓展.本章首先介绍向量的概念及其线性运算,并由此建立空间坐标系,然后利用坐标讨论向量的运算,并介绍空间解析几何的相关内容.

第一节 向量的线性运算与空间直角坐标系

一、向量的概念

在日常生活中,经常接触的量主要有两类.以天气预报为例,所得到的信息是“今天气温 $10 \sim 20^{\circ}\text{C}$,西南风 $2 \sim 3$ 级”.其中气温是由按适当的单位度量的数值所完全确定的,像这样只有大小、没有方向的量称为**数量**(也称**标量**),如温度、质量、体积、压强等;而关于风的信息则既包括风的速率,也包括风的方向,像这样既有大小、又有方向的量称为**向量**(也称**矢量**),如力、速度、位移、电场等.

在数学上,用有方向的线段来表示向量,其起点和终点表示向量的起点和终点,其长度表示向量的大小,方向表示向量的方向.如图 1-1 所示,以 A 为起点、 B 为终点的有向线段所表示的向量记为 $\overrightarrow{AB}$. 向量可用黑体字母表示,也可用字母上面加箭头表示,如 $\mathbf{a}, \mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{F}$ 或 $\vec{a}, \vec{r}, \vec{s}, \vec{F}$.

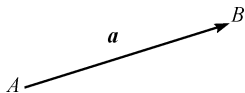


图 1-1

向量的大小称为向量的**模**,向量 $\mathbf{a}, \vec{a}, \overrightarrow{AB}$ 的模分别记为 $|\mathbf{a}|, |\vec{a}|, |\overrightarrow{AB}|$. 模为 1 的向量称为**单位向量**;模为零的向量称为**零向量**,记为 $\mathbf{0}$ 或 $\vec{0}$. 零向量的起点与终点是重合的,所以



其方向可看作是任意的. 不是零向量的向量就称为**非零向量**. 对于两个非零向量 a 和 b , 若它们的方向相同或相反, 则称这两个向量**平行**, 记为 $a \parallel b$. 这里应该注意到, 由于零向量的方向是任意的, 所以可认为零向量与任何向量都平行.

当把实际问题抽象成数学问题时, 对很多向量而言, 其属性可完整地由大小与方向表示出来, 而与其起点、终点的空间位置无关, 如前面提到的风向, 无论在哪个点观测, 其强度和方向都是一样的. 像这样, 与起点无关的向量, 称为**自由向量**. 自由向量可以任意平行移动, 移动后的向量仍然代表原来的向量. 由于在数学上着重研究自由向量, 所以今后自由向量简称为向量, 当研究的向量与起点有关时, 将做特别说明.

在自由向量的概念下, 只要两个向量大小相等, 方向相同, 就称两向量**相等**, 记为 $a = b$. 从几何角度来讲, 经过平移后能完全重合的向量就是相等的. 与之对应, 大小相等但方向相反的向量称为**负向量**, 记为 $-a$. 显然, $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BA}$ 互为负向量.

将一组平行向量的起点放在同一点, 其终点与公共起点在同一条直线上, 称其**共线**. 将一组向量(向量的个数大于等于 3)的起点放在同一点, 其所有终点和公共起点在同一个平面上, 称其**共面**.

由向量平行的定义可知, 两向量相等或互为负向量时必平行, 同时向量平行也可称向量共线.

二、向量线性运算的几何表达

为了在向量之间建立联系, 规定了向量的线性运算, 包括向量间的加减法与数乘.

1. 向量的加减法

向量的加法与物理学中求合力的方法一样, 其规则称为**平行四边形法则**: 当向量 a 与 b 不平行时, 平移向量使 a 与 b 的起点重合, 以 a, b 为邻边作一平行四边形, 从公共起点到对角的向量 c 称为向量 a 与 b 的**和**, 记为 $a + b$, 即 $c = a + b$ (见图 1-2).

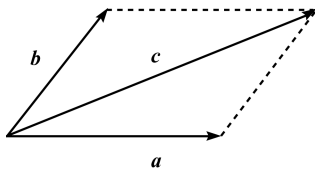


图 1-2

由上述法则容易验证, 向量的加法符合下列运算规律.

- (1) **交换律** $a + b = b + a$.
- (2) **结合律** $(a + b) + c = a + (b + c)$.

在自由向量的概念下, 平行四边形法则还可归纳为**三角形法则**: 设有两个向量 a 与 b , 平移向量使 b 的起点与 a 的终点重合, 此时从 a 的起点到 b 的终点的向量 c 称为向量 a 与 b 的**和** (见图 1-3).

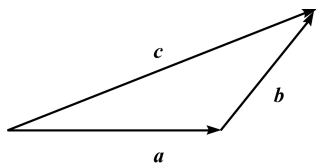


图 1-3

由于向量的加法满足交换律与结合律,所以无论它们的先后顺序如何,它们的和总是相同的,从而 n 个向量 $a_1, a_2, \dots, a_n (n \geq 3)$ 相加可按任意顺序写成

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n,$$

再由向量相加的三角形法则,可得 n 个向量相加的**多边形法则**:使前一向量的终点作为下一向量的起点,相继作向量 $a_1, a_2, \dots, a_n$,再以第一向量的起点为起点,最后一个向量的终点为终点作一向量,这个向量即为所求的和.如图 1-4 所示,有 $s = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$.

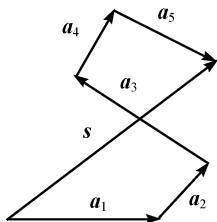


图 1-4

结合负向量的概念,可以将向量的减法变为加法运算.差向量可以理解为把向量 $-b$ 加到向量 a 上,即为 $a - b = a + (-b)$ (见图 1-5).由此可以得到向量减法的运算规则:设有两个向量 a 与 b ,平移向量使 b 的起点与 a 的起点重合,此时连结两向量终点且指向被减向量的有向线段就是差向量,记为 $a - b$ (见图 1-6).特别地,当 $b = a$ 时,有 $a - a = a + (-a) = 0$.

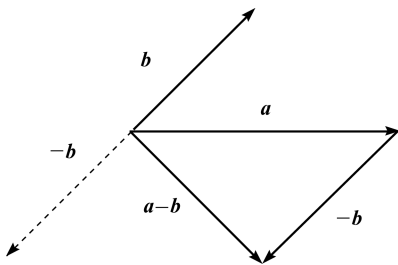


图 1-5

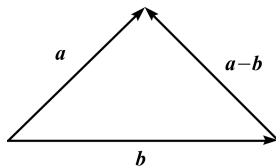


图 1-6

此外还要指出,由三角形两边之和大于第三边的原理,有

$$|a + b| \leq |a| + |b|, |a - b| \leq |a| + |b|,$$

其中等号在 b 与 a 同向或反向时成立.

2. 向量与数的乘法

已知物理公式 $s = vt$, 其中 v 表示速度,是向量; t 表示时间,是数量;而 s 表示位移,是向



量,是向量与数量之间的结合,这种结合称为**向量与数的乘法**,也称向量的**数乘**.定义如下.

向量 $\boldsymbol{a}$ 与实数 λ 的乘积记为 $\lambda\boldsymbol{a}$,规定 $\lambda\boldsymbol{a}$ 是一个向量,它的模 $|\lambda\boldsymbol{a}| = |\lambda| |\boldsymbol{a}|$,它的方向当 $\lambda > 0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相同,当 $\lambda < 0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相反.

当 $\lambda = 0$ 时, $|\lambda\boldsymbol{a}| = 0$,即 $\lambda\boldsymbol{a}$ 为零向量,这时它的方向可以是任意的.

当 $\lambda = 1$ 时,有 $1\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$;当 $\lambda = -1$ 时,有 $(-1)\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a}$,所得即前面所提到的负向量.

向量与数的乘法符合下列运算规律.

(1) **结合律** $\lambda(\mu\boldsymbol{a}) = \mu(\lambda\boldsymbol{a}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{a}$.

(2) **第一分配律** $(\lambda + \mu)\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{a}$;

第二分配律 $\lambda(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}$.

向量相加及向量数乘统称为向量的**线性运算**.

设 $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$,则向量 $\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$ 是与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量,一般记为 $\boldsymbol{e}_a$,于是有 $\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}| \boldsymbol{e}_a$.

例 1 设 $\boldsymbol{u} = 2\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} + 2\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a} + 4\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}$,试求 $4\boldsymbol{u} - 3\boldsymbol{v}$.

解 $4\boldsymbol{u} - 3\boldsymbol{v} = 4(2\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} + 2\boldsymbol{c}) - 3(\boldsymbol{a} + 4\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}) = 5\boldsymbol{a} - 16\boldsymbol{b} + 11\boldsymbol{c}$.

例 2 如果平面上一个四边形的对角线互相平分,试用向量证明这是平行四边形(见

图 1-7).

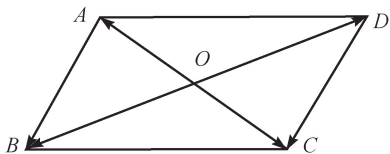


图 1-7

证明 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$, 而 $\overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OD} = -\overrightarrow{OB}$, 所以

$$\overrightarrow{DC} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB},$$

这说明四边形 $ABCD$ 的对边 $|AB| = |CD|$ 且 $AB \parallel CD$, 从而四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

三、空间直角坐标系与空间向量的坐标分解

1. 数轴

初中阶段的代数学中规定:给定一个点、一个方向及单位长度,就确定了一条数轴.在向量的概念下,一个单位向量既确定了方向,又确定了单位长度,所以只需给定一个点及一个单位向量就确定了一条数轴.例如,设点 O 及单位向量 $\boldsymbol{e}$ 确定了数轴 Ou (见图 1-8).建立数轴的理论依据就是如下定理.



图 1-8

定理 设有非零向量 $\mathbf{a}$, 则向量 $\mathbf{b} \parallel \mathbf{a}$ 的充分必要条件是存在唯一的实数 λ , 使 $\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}$.

证明 定理的充分性显然成立, 下面证明定理的必要性.

由 $\mathbf{b} \parallel \mathbf{a}$, 取 $|\lambda| = \frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}$, 当 $\mathbf{b}$ 与 $\mathbf{a}$ 同向时取 λ 正值, 当 $\mathbf{b}$ 与 $\mathbf{a}$ 反向时 λ 取负值, 于是 $\mathbf{b}$ 与 $\lambda \mathbf{a}$ 同向, 即有 $\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}$. 且

$$|\lambda \mathbf{a}| = |\lambda| |\mathbf{a}| = \frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|} |\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|.$$

再证数 λ 的唯一性. 设 $\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}$, 又设 $\mathbf{b} = \mu \mathbf{a}$, 两式相减, 得

$$(\lambda - \mu) \mathbf{a} = \mathbf{0}, \text{ 即 } |\lambda - \mu| |\mathbf{a}| = 0,$$

因 $|\mathbf{a}| \neq 0$, 故 $|\lambda - \mu| = 0$, 即 $\lambda = \mu$. 因此条件的必要性得证.

如图 1-8 所示的数轴 Ou 上, 任取一点 P , 对应一个向量 $\overrightarrow{OP}$, 由于 $\overrightarrow{OP} \parallel \mathbf{e}$, 由定理可知, 必有唯一的实数 x , 使 $\overrightarrow{OP} = x\mathbf{e}$, 并知向量 $\overrightarrow{OP}$ 与实数 x 一一对应. 于是

$$\text{数轴上点 } P \leftrightarrow \text{向量 } \overrightarrow{OP} = x\mathbf{e} \leftrightarrow \text{实数 } x,$$

从而轴上的点 P 与实数 x 有一一对应关系. 据此, 定义实数 x 为轴上一点 P 的坐标.

2. 空间直角坐标系

在空间任意取定一点 O , 并从点 O 引出三个两两垂直的单位向量 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, 由此就确定了三条数轴, 显然它们都以 O 为原点, 且两两垂直. 把这三条数轴依次记为 x 轴(横轴)、 y 轴(纵轴)、 z 轴(竖轴), 并统称坐标轴, O 称为坐标原点, 它们构成一个空间直角坐标系, 称为 $Oxyz$ 坐标系或 $[O; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}]$ 坐标系(见图 1-9). 通常还有如下规定.

(1) 三个数轴的长度单位相同.

(2) 把 x 轴和 y 轴配置在水平面上, 而 z 轴取垂线, 正向向上.

(3) 数轴的正向通常符合右手规则, 即以右手握住 z 轴, 当右手四指从 x 轴正向以 $\frac{\pi}{2}$ 角度转向 y 轴正向时, 大拇指的指向就是 z 轴的正向, 如图 1-10 所示.

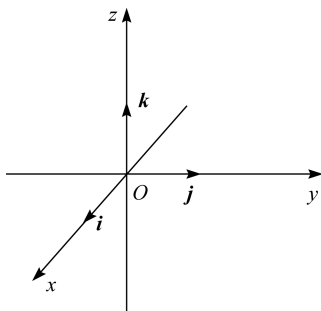


图 1-9

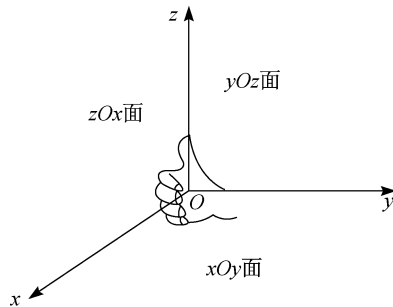


图 1-10

三条坐标轴中的任意两条可以确定一个平面, 这样定出的三个平面统称为坐标面. 按照坐标面所包含的坐标轴, 分别称为 xOy 面, yOz 面和 zOx 面. 三个坐标面将空间划分成八个区域, 称为八个卦限. 含有 x 轴、 y 轴与 z 轴正半轴的那个卦限称为第 I 卦限, 位于 xOy 面的上方. 此外, 在 xOy 面的上方, 按逆时针方向排列着第 II 卦限、第 III 卦限和第 IV 卦限. 在



xOy 面的下方,与第 I 卦限对应的是第 V 卦限,按逆时针方向还排列着第 VI 卦限、第 VII 卦限和第 VIII 卦限,如图 1-11 所示.

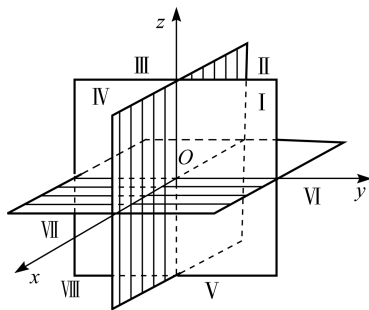


图 1-11

3. 空间向量的坐标分解

利用空间坐标系,可以定量地表现空间向量. 首先建立一个 $Oxyz$ 坐标系,则对任意给定的自由向量 $\boldsymbol{r}$,可以在坐标系中找到唯一的点 M ,使 $\overrightarrow{OM} = \boldsymbol{r}$,即 $\overrightarrow{OM}$ 的方向和大小都与 $\boldsymbol{r}$ 相同. 以 OM 为对角线、三条坐标轴为棱作长方体 $RHMK-OPNQ$,如图 1-12 所示. 由自由向量的特性与向量的加法运算,有

$$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}.$$

又由于 $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OR}$ 都在坐标轴上,由本节定理知,它们都可以唯一地表示为 $\overrightarrow{OP} = xi$, $\overrightarrow{OQ} = yj$, $\overrightarrow{OR} = zk$,于是有

$$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM} = xi + yj + zk,$$

此式称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的坐标分解式, xi , yj , zk 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 沿三个坐标轴方向的坐标分向量. 有序数 x, y, z 称为向量 $\boldsymbol{r}$ (在坐标系 $Oxyz$ 中) 的坐标,记为 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$.

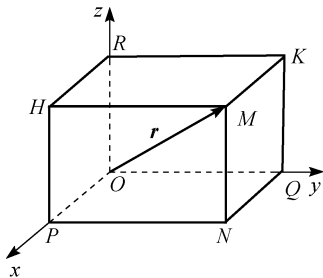


图 1-12

这里,向量 $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM}$ 称为点 M 关于原点 O 的向径. 由上面的内容可知,一个点与该点的向径有相同的坐标,于是用坐标 (x, y, z) 既表示点 M ,又表示向量 $\overrightarrow{OM}$. 点 M 、向量 $\boldsymbol{r}$ 与三个有序数 x, y, z 之间有一一对应的关系:

$$M \leftrightarrow \boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM} = xi + yj + zk \leftrightarrow (x, y, z).$$

注: 由于点 M 与向量 $\overrightarrow{OM}$ 有相同的坐标,因此,求点 M 的坐标,就是求向量 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标. 但同时,由于记号 (x, y, z) 既可表示点 M ,又可表示向量 $\overrightarrow{OM}$,而几何中点与向量是两个不同

的概念,因此在看到记号 (x,y,z) 时,须从上下文去认清它究竟表示点还是表示向量.当 (x,y,z) 表示向量时,可对它进行运算;当 (x,y,z) 表示点时,就不能进行运算.

坐标面上和坐标轴上的点,其坐标各有一定的特征.位于坐标面上的点必有一个坐标为0,如点 M 在 yOz 面上,则 $x=0$,坐标形式为 $M(0,y,z)$;位于坐标轴上的点必有两个坐标为0,如点 M 在 x 轴上,则 $y=z=0$,坐标形式为 $M(x,0,0)$.

在实际应用中,除了空间直角坐标系,为满足不同研究的需求,还引入了许多特殊类型的坐标系:角度坐标系、双极坐标系、抛物线坐标系、测地坐标系等.结合不同的几何体,本章会陆续再介绍两类比较常用的空间坐标系:柱面坐标系和球面坐标系.但无论哪种坐标系,都必须有三个有序数才能确定空间中一个点的位置.

四、向量线性运算的坐标表示

前面已经学习过向量的线性运算,但主要是应用几何方法.现在,结合向量的坐标表示,可以重新定义向量的线性运算,将其转化为代数问题.

任取两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$,设其坐标为 $\boldsymbol{a}=(a_x, a_y, a_z)$, $\boldsymbol{b}=(b_x, b_y, b_z)$,其坐标分解式为

$$\boldsymbol{a} = a_x \boldsymbol{i} + a_y \boldsymbol{j} + a_z \boldsymbol{k}, \boldsymbol{b} = b_x \boldsymbol{i} + b_y \boldsymbol{j} + b_z \boldsymbol{k},$$

于是可得向量的加减法与数乘的坐标表示式.

(1) 向量加法的坐标表示式.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} &= (a_x \boldsymbol{i} + a_y \boldsymbol{j} + a_z \boldsymbol{k}) + (b_x \boldsymbol{i} + b_y \boldsymbol{j} + b_z \boldsymbol{k}) \\ &= (a_x + b_x) \boldsymbol{i} + (a_y + b_y) \boldsymbol{j} + (a_z + b_z) \boldsymbol{k} \\ &= (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z). \end{aligned}$$

(2) 向量减法的坐标表示式.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} &= (a_x \boldsymbol{i} + a_y \boldsymbol{j} + a_z \boldsymbol{k}) - (b_x \boldsymbol{i} + b_y \boldsymbol{j} + b_z \boldsymbol{k}) \\ &= (a_x - b_x) \boldsymbol{i} + (a_y - b_y) \boldsymbol{j} + (a_z - b_z) \boldsymbol{k} \\ &= (a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z). \end{aligned}$$

(3) 向量数乘的坐标表示式.

$$\lambda \boldsymbol{a} = \lambda(a_x \boldsymbol{i} + a_y \boldsymbol{j} + a_z \boldsymbol{k}) = \lambda a_x \boldsymbol{i} + \lambda a_y \boldsymbol{j} + \lambda a_z \boldsymbol{k} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z).$$

由此可见,对向量进行加、减及与数相乘,只需对向量的各个坐标分别进行相应的数量运算即可.

事实上,本节定理还可表达为如下形式.

设 $\boldsymbol{a}=(a_x, a_y, a_z)$, $\boldsymbol{b}=(b_x, b_y, b_z)$,若 $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$,则

$$\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b} \Leftrightarrow (b_x, b_y, b_z) = \lambda(a_x, a_y, a_z),$$

其中 $(b_x, b_y, b_z) = \lambda(a_x, a_y, a_z)$,相当于向量的对应坐标成比例,即

$$\frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z}.$$

例3 已知两点 $A(x_1, y_1, z_1)$ 和 $B(x_2, y_2, z_2)$ 以及实数 $\lambda \neq -1$,在直线 AB 上求一点 M ,使 $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{MB}$.

解 如图1-13所示,由于



$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM},$$

因此 $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \lambda(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM})$, 从而

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{1+\lambda}(\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB}).$$

以 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ 的坐标(即点 A 、点 B 的坐标)代入, 得

$$\overrightarrow{OM} = \left(\frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda} \right),$$

这就是点 M 的坐标.

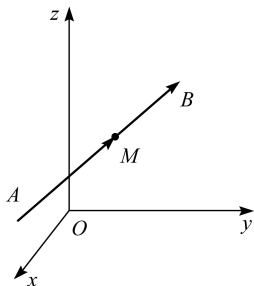


图 1-13

点 M 称为有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的**定比分点**. 特别地, 当 $\lambda = 1$ 时, 点 M 称为有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的**中点**, 其坐标为

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right).$$

例 4 已知三角形 ABC 的三个顶点分别为 $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2), C(x_3, y_3, z_3)$, 求此三角形重心的坐标.

解 如图 1-14 所示, 设 F, E, D 分别为 AB, AC, BC 边的中点, 则 AD, BE, CF 的交点 O 为重心.

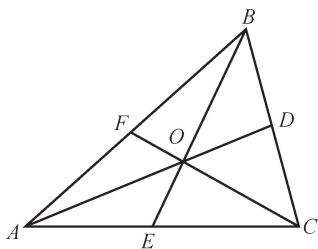


图 1-14

因为 F 是 AB 的中点, 所以 F 的坐标为

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right),$$

又由重心的定义可知

$$\frac{|CO|}{|OF|} = \frac{2}{1} = 2, \text{ 即 } \lambda = 2,$$

因此,由例3中定比分点公式可得,三角形 ABC 重心点 O 的坐标为

$$\left(\frac{x_3 + 2 \cdot \frac{x_1 + x_2}{2}}{1+2}, \frac{y_3 + 2 \cdot \frac{y_1 + y_2}{2}}{1+2}, \frac{z_3 + 2 \cdot \frac{z_1 + z_2}{2}}{1+2} \right),$$

即点 O 的坐标为 $\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} \right)$.

五、向量的模、方向余弦与投影

目前探讨的自由向量的特征只取决于它的大小和方向,这里考虑如何能够应用坐标形式定量地研究它们,并使其可以参与到运算当中.

1. 向量模的坐标表示

首先考虑向径. 在空间中任取一点 $M(x, y, z)$, 设 $\overrightarrow{OM} = \mathbf{r}$, 如图1-12所示, 则可得分解式 $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}$, 由勾股定理可得

$$|\mathbf{r}| = |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{|\overrightarrow{OP}|^2 + |\overrightarrow{OQ}|^2 + |\overrightarrow{OR}|^2}.$$

令 $\overrightarrow{OP} = xi, \overrightarrow{OQ} = yj, \overrightarrow{OR} = zk$, 即

$$|\overrightarrow{OP}| = |x|, |\overrightarrow{OQ}| = |y|, |\overrightarrow{OR}| = |z|,$$

于是得向径模的坐标表示式

$$|\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

再考虑任意自由向量. 设点 $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$, 如图1-15所示, 则向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 有

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = (x_2, y_2, z_2) - (x_1, y_1, z_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1),$$

这组坐标所示位置相当于将点 M_1 平移至坐标原点, 其终点 M_2 所在的位置对应的坐标, 即与 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 相等的向径 $\mathbf{r}$ 的坐标. 由向径模的坐标表示式可得向量模的坐标表示式.

$$|\mathbf{r}| = |\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2},$$

这个表示式显然也可表示点 M_1 与点 M_2 间的距离, 所以也称为空间中两点间距离公式.

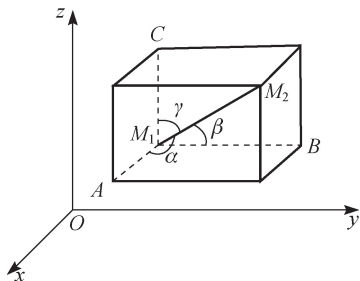


图 1-15

例 5 已知两点 $A(2, 1, 5)$ 和 $B(1, 2, 3)$, 求与 $\overrightarrow{AB}$ 方向相同的单位向量 $\mathbf{e}$.

解 因为 $\overrightarrow{AB} = (1, 2, 3) - (2, 1, 5) = (-1, 1, -2)$, 所以

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{6},$$



于是

$$\mathbf{e} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 1, -2).$$

例 6 在 yOz 面上, 求与三点 $A(3, 1, 2), B(4, -2, -2), C(0, 5, 1)$ 等距离的点.

解 所求点在 yOz 面上, 不妨设为 $P(0, y, z)$. 因为

$$|\overrightarrow{PA}| = \sqrt{3^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2},$$

$$|\overrightarrow{PB}| = \sqrt{4^2 + (y+2)^2 + (z+2)^2},$$

$$|\overrightarrow{PC}| = \sqrt{0^2 + (y-5)^2 + (z-1)^2},$$

$$|\overrightarrow{PA}| = |\overrightarrow{PB}| = |\overrightarrow{PC}|,$$

所以

$$\sqrt{3^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2} = \sqrt{4^2 + (y+2)^2 + (z+2)^2} = \sqrt{0^2 + (y-5)^2 + (z-1)^2},$$

即

$$\begin{cases} 3^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 4^2 + (y+2)^2 + (z+2)^2, \\ 3^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = (y-5)^2 + (z-1)^2, \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} y = 1, \\ z = -2, \end{cases}$ 故所求点的坐标为 $(0, 1, -2)$.

2. 方向角与方向余弦

为了表达向量的方向, 首先了解一下向量间的夹角.

将两个非零向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的起点平移至同一点, 则两个向量之间不超过 π 的夹角称为向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角, 记为 $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})$ 或 $(\widehat{\mathbf{b}, \mathbf{a}})$, 且 $(\widehat{\mathbf{b}, \mathbf{a}}) \in [0, \pi]$. 特别地, 当向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 中至少有一个是零向量时, 规定它们的夹角可取 0 与 π 之间的任意值.

由此可以进一步定义向量与坐标轴的夹角, 即将非零向量起点平移至坐标原点后, 与坐标轴正向所形成的夹角.

设非零向量 $\mathbf{r} = \overrightarrow{M_1 M_2}$ (即 $|\mathbf{r}| \neq 0$) 与三坐标轴正向的夹角分别为 α, β, γ , 则称为向量 $\mathbf{r}$ 的方向角, 如图 1-15 所示. 由此可知, 若设 $\mathbf{r} = (x, y, z)$, 则其坐标与方向角有如下关系:

$$x = |\mathbf{r}| \cos \alpha, y = |\mathbf{r}| \cos \beta, z = |\mathbf{r}| \cos \gamma,$$

其中 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 称为向量 $\mathbf{r}$ 的方向余弦. 由向量 $\mathbf{r} = \overrightarrow{M_1 M_2}$ 非零, 即 $|\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \neq 0$, 可得

$$\cos \alpha = \frac{x}{|\mathbf{r}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$\cos \beta = \frac{y}{|\mathbf{r}|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$\cos \gamma = \frac{z}{|\mathbf{r}|} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

从而可以看出 $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = \frac{1}{|\mathbf{r}|} \mathbf{r} = \mathbf{e}_r$, 这表明以向量 $\mathbf{r}$ 的方向余弦为坐标的向量就

是与 $\mathbf{r}$ 同向的单位向量 $\mathbf{e}_r$, 因此

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

这个表达式还表明, 只要已知向量的两个方向角, 第三个方向角也将被确定下来, 但不唯一, 请读者从几何的角度进一步理解这个问题.

例 7 已知两点 $A(2, 2, \sqrt{2})$ 和 $B(1, 3, 0)$, 计算向量 $\overrightarrow{AB}$ 的模、方向余弦和方向角以及与 $\overrightarrow{AB}$ 同向的单位向量.

解 因为

$$\overrightarrow{AB} = (1-2, 3-2, 0-\sqrt{2}) = (-1, 1, -\sqrt{2}),$$

所以 $\overrightarrow{AB}$ 的模为

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-\sqrt{2})^2} = 2,$$

$\overrightarrow{AB}$ 的方向余弦为

$$\cos \alpha = -\frac{1}{2}, \cos \beta = \frac{1}{2}, \cos \gamma = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$\overrightarrow{AB}$ 的方向角为

$$\alpha = \frac{2\pi}{3}, \beta = \frac{\pi}{3}, \gamma = \frac{3\pi}{4}.$$

设 $\mathbf{e}$ 为与 $\overrightarrow{AB}$ 同向的单位向量, 由于 $\mathbf{e} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$, 即得 $\mathbf{e} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

例 8 设有向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$, 已知 $|\overrightarrow{P_1P_2}| = 2$, 它与 x 轴和 y 轴的夹角分别为 $\frac{\pi}{4}$ 和 $\frac{\pi}{3}$, 如果 P_1 的坐标为 $(1, 0, 3)$, 求 P_2 的坐标.

解 设向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的方向角为 α, β, γ . 已知 $\alpha = \frac{\pi}{3}, \beta = \frac{\pi}{4}$, 故 $\cos \alpha = \frac{1}{2}, \cos \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 又因为 $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$, 所以 $\cos \gamma = \pm \frac{1}{2}$, 于是

$$\overrightarrow{P_1P_2} = |\overrightarrow{P_1P_2}| (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = 2\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \pm \frac{1}{2}\right) = (1, \sqrt{2}, \pm 1).$$

设 P_2 的坐标为 (x, y, z) , 有 $\overrightarrow{P_1P_2} = (x-1, y, z-3)$, 故

$$(x-1, y, z-3) = (1, \sqrt{2}, \pm 1),$$

即 $(x, y, z) = (2, \sqrt{2}, 2)$ 或 $(2, \sqrt{2}, 4)$.

3. 向量在轴上的投影

向量在轴上的投影是一个数值, 它集中反映了轴与向量的相对位置关系, 与向量的大小与方向都关系密切. 设点 O 及单位向量 $\mathbf{e}$ 确定 u 轴 (见图 1-16). 对任意给定向量 $\mathbf{a}$, 作 $\overrightarrow{OM} = \mathbf{a}$, 再过点 M 作与 u 轴垂直的平面交 u 轴于点 M' , 则向量 $\overrightarrow{OM'}$ 称为向量 $\mathbf{a}$ 在 u 轴上的分向量. 设 $\overrightarrow{OM'} = \lambda \mathbf{e}$, 则数 λ 称为向量 $\mathbf{a}$ 在 u 轴上的投影, 记为 $\text{Prj}_u \mathbf{a}$ 或 $(\mathbf{a})_u$, 其中点 M' 称为点 M 在 u 轴上的投影.

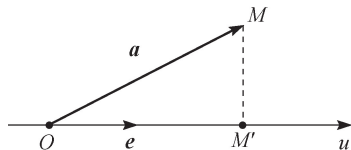


图 1-16

按此定义,向量 $\boldsymbol{a}$ 在直角坐标系 $Oxyz$ 中的坐标 a_x, a_y, a_z 就是 $\boldsymbol{a}$ 在三条坐标轴上的投影,即

$$a_x = \text{Prj}_x \boldsymbol{a}, a_y = \text{Prj}_y \boldsymbol{a}, a_z = \text{Prj}_z \boldsymbol{a}.$$

由此可知,向量的投影具有与坐标相同的性质.

(1) $\text{Prj}_u \boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}| \cos \varphi$, 其中 φ 为向量与 u 轴的夹角.

(2) $\text{Prj}_u (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \text{Prj}_u \boldsymbol{a} + \text{Prj}_u \boldsymbol{b}$.

(3) $\text{Prj}_u (\lambda \boldsymbol{a}) = \lambda \text{Prj}_u \boldsymbol{a}$.

例 9 设正四面体的两条棱分别为 OA 和 AB , 且 $|\overrightarrow{OA}| = a$, 求 $\overrightarrow{OA}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 方向上的投影 $\text{Prj}_{\overrightarrow{AB}} \overrightarrow{OA}$.

解 如图 1-17 所示, 记 $\angle OAB = \varphi$, 有 $\cos \varphi = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, 于是

$$\text{Prj}_{\overrightarrow{AB}} \overrightarrow{OA} = |\overrightarrow{OA}| \cos \varphi = \frac{a}{2}.$$

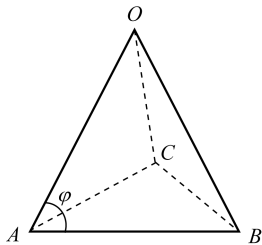


图 1-17



习题 1.1

1. 化简 $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} + 5\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{b} + \frac{\boldsymbol{b} - 3\boldsymbol{a}}{5}\right)$.

2. 已知 $\boldsymbol{a} = (2, -3, 5)$, $\boldsymbol{b} = (-3, 1, -4)$, 求 $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$, $|\boldsymbol{a}|$, $8\boldsymbol{a}$.

3. 求解以向量为未知元的线性方程组 $\begin{cases} 5\boldsymbol{x} + 3\boldsymbol{y} = \boldsymbol{a}, \\ 3\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}, \end{cases}$ 其中 $\boldsymbol{a} = (2, 1, 2)$,

$\boldsymbol{b} = (-1, 1, -2)$.

4. 在平行四边形 $ABCD$ 中, 设 $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AD} = \boldsymbol{b}$, 试用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{MD}$, 其中 M 是平行四边形对角线的交点.

5. 求点 $A(2, -3, -1)$ 关于 xOy 面, zOx 面及原点 O 的对称点.

6. 求点 $M(4, -3, 5)$ 与原点及各坐标轴、坐标面间的距离.

7. 设 P 在 x 轴上, 它到 $P_1(0, \sqrt{2}, 3)$ 的距离为到点 $P_2(0, 1, -1)$ 的距离的 2 倍, 求点 P 的坐标.

8. 在 z 轴上求一点 M , 使点 M 到点 $A(1, 0, 2)$ 和到点 $B(1, -3, 1)$ 的距离相等.

9. 设 $m = 3i + 5j + 8k, n = 2i - 4j - 7k, p = 5i + j - 4k$, 求向量 $a = 4m + 3n - p$ 在各轴上的投影及在各轴上的分向量.

10. 设点 A 位于第 V 卦限, 向径 $\overrightarrow{OA}$ 与 x 轴、 y 轴的夹角依次为 $\frac{\pi}{3}$ 和 $\frac{\pi}{4}$, 且 $|\overrightarrow{OA}| = 8$, 求点 A 的坐标.

11. 一向量的终点在点 $B(2, -1, 7)$, 它在 x 轴、 y 轴和 z 轴上的投影依次为 4, -4 和 7, 求这个向量的起点 A 的坐标.

第二节 数量积 向量积 混合积

一、两向量的数量积

向量与向量的运算一定是向量吗? 高中物理中常常涉及常力做功的问题. 设一质点在常力 F 的作用下沿直线从点 M_1 移动到点 M_2 , 产生的位移 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 用 s 表示. 力 F 可以分解为在位移方向的投影 F_1 和垂直于位移方向的投影 F_2 两部分 (见图 1-18), 其中仅 F_1 对质点做功. 若记 θ 为 F 与 s 的夹角, 则 $F_1 = F \cos \theta$, 而力 F 所做的功为

$$W = |F_1| |s| = |F| |s| \cos \theta,$$

显然, 这里 W 是个数量, 但它的值由两个向量 F 与 s 运算所得. 类似的情况在其他问题中也常遇到, 把这种向量运算形式抽取出来, 即为两个向量的数量积.

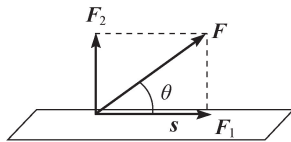


图 1-18

1. 数量积的定义及其运算性质

对于两个向量 a 和 b , 它们的模 $|a|$, $|b|$ 及它们的夹角 θ 的余弦的乘积称为向量 a 和 b 的数量积 (也称点积或内积), 记为 $a \cdot b$, 即

$$a \cdot b = |a| \cdot |b| \cos \theta.$$

由数量积的定义容易得出如下运算性质.

(1) $a \cdot a = |a|^2$.

(2) 对于任意两个向量 a 和 b , 若 $a \cdot b = 0$, 则 $a \perp b$; 反之, 若 $a \perp b$, 则 $a \cdot b = 0$,



即 $a \perp b \Leftrightarrow a \cdot b = 0$.

注: 当 a, b 中含有零向量时, 由于零向量的方向可以看作是任意的, 故可以认为零向量与任何向量都垂直, 因此上述结论仍然成立.

(3) 两个非零向量的数量积等于其中一个向量的模与另一个向量在该向量的方向上的投影的乘积.

事实上, 当 $a \neq 0$ 时, $|b| \cos(\widehat{a, b})$ 即为向量 b 在向量 a 的方向上的投影, 于是可得 $a \cdot b = |a| \cdot \text{Prj}_a b$. 同理, 当 $b \neq 0$ 时, $a \cdot b = |b| \cdot \text{Prj}_b a$.

2. 数量积的运算律

(1) 交换律 $a \cdot b = b \cdot a$.

(2) 分配律 $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

证明 因为当 $c = 0$ 时, 上式显然成立; 当 $c \neq 0$ 时, 如图 1-19 所示, 有

$$\begin{aligned} (a + b) \cdot c &= |c| \text{Prj}_c(a + b) = |c| (\text{Prj}_c a + \text{Prj}_c b) = |c| \text{Prj}_c a + |c| \text{Prj}_c b \\ &= a \cdot c + b \cdot c. \end{aligned}$$

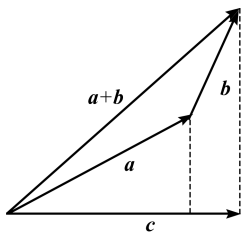


图 1-19

(3) 若 λ, μ 为实数, 则

$$(\lambda a) \cdot b = a \cdot (\lambda b) = \lambda(a \cdot b),$$

$$(\lambda a) \cdot (\mu b) = \lambda\mu(a \cdot b).$$

例 1 设 $|a| = 5, |b| = 2, (\widehat{a, b}) = \frac{\pi}{3}$, 求 $a \cdot b$ 及向量 $u = a - 2b$ 的模.

解 $a \cdot b = |a| \cdot |b| \cos(\widehat{a, b}) = 5 \times 2 \times \cos \frac{\pi}{3} = 5,$

$$\begin{aligned} |u|^2 &= u \cdot u = (a - 2b) \cdot (a - 2b) = a \cdot a - 2a \cdot b - 2b \cdot a + 4b \cdot b \\ &= |a|^2 - 4a \cdot b + 4|b|^2 = 5^2 - 4 \times 5 + 4 \times 2^2 = 21, \end{aligned}$$

所以 $|u| = \sqrt{21}$.

例 2 设 $|a| = \sqrt{7}, |b| = 2$, 若 $(a + \sqrt{m}b) \perp (a - \sqrt{m}b)$, 试求 m 的值.

解 因为 $(a + \sqrt{m}b) \perp (a - \sqrt{m}b)$, 所以

$$(a + \sqrt{m}b) \cdot (a - \sqrt{m}b) = |a|^2 - m|b|^2 = 7 - 4m = 0,$$

因此 $m = \frac{7}{4}$.

例 3 如图 1-20(a) 所示, 设液体流过平面 S 的一个区域, 其面积为 A , 液体匀速流动, 流速为常向量 v . 若设 n 为垂直于 S 的单位向量, 试计算单位时间内经过此区域流向 n 所指方

向的液体的质量,其中液体的密度为常值 ρ .

解 如图 1-20(b) 所示,单位时间内流过此区域的液体恰可形成一个斜柱体,其底面积为 A 、斜高为 $|\mathbf{v}|$.

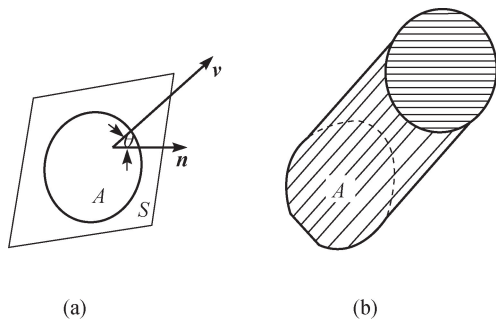


图 1-20

设 $\mathbf{v}$ 与 $\mathbf{n}$ 的夹角为 θ ,则此斜柱体的高为 $|\mathbf{v}| \cos \theta$,故体积为 $A|\mathbf{v}| \cos \theta = A\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$. 由此可得,单位时间内经过此区域流向 $\mathbf{n}$ 所指方向的液体的质量为

$$M = \rho A \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}.$$

本书第四章将涉及通量的概念,其流体的模型可按例 3 中的形式进行分析.

3. 数量积的坐标表示式

由于向量可以用坐标表示,所以向量的数量积也可用坐标来表示. 若设 $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$, 则

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

事实上,上式可依据数量积的运算规律得到:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) \cdot (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}) \\ &= a_x b_x \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} + a_y b_y \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} + a_z b_z \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} + a_x b_y \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} + a_y b_x \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} + a_x b_z \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} + \\ &\quad a_z b_x \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} + a_y b_z \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} + a_z b_y \mathbf{k} \cdot \mathbf{j} \\ &= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \end{aligned}$$

由向量的数量积的坐标表示式,得

(1) $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ 的充要条件还可记为 $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$.

(2) 两个非零向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角 θ 满足的公式 $\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|}$ 可记为

$$\cos \theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}},$$

这就是两向量夹角余弦的坐标表示式. 由于 $\cos \theta = \frac{a_x}{|\mathbf{a}|} \frac{b_x}{|\mathbf{b}|} + \frac{a_y}{|\mathbf{a}|} \frac{b_y}{|\mathbf{b}|} + \frac{a_z}{|\mathbf{a}|} \frac{b_z}{|\mathbf{b}|}$, 故两向量夹角余弦的坐标表示式也可整理成

$$\cos \theta = \cos \alpha \cos \alpha' + \cos \beta \cos \beta' + \cos \gamma \cos \gamma',$$

其中 α, β, γ 为 $\mathbf{a}$ 的方向角, α', β', γ' 为 $\mathbf{b}$ 的方向角.

例 4 设 $\mathbf{a} = (1, 1, -4)$, $\mathbf{b} = (1, -2, 2)$, 求: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$; $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角 θ ; $\mathbf{a}$ 在 $\mathbf{b}$ 上的投影;



b 在 a 上的投影.

解 (1) $a \cdot b = 1 \times 1 + 1 \times (-2) + (-4) \times 2 = -9$.

(2) 因为

$$|a| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-4)^2} = 3\sqrt{2}, \quad |b| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3,$$

所以

$$\cos \theta = \frac{a \cdot b}{|a||b|} = \frac{-9}{3\sqrt{2} \times 3} = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\text{故 } \theta = \frac{3\pi}{4}.$$

(3) 由 $a \cdot b = |b| \cdot \text{Prj}_b a$ 可得 $\text{Prj}_b a = \frac{a \cdot b}{|b|} = \frac{-9}{3} = -3$.

(4) 由 $a \cdot b = |a| \cdot \text{Prj}_a b$ 可得 $\text{Prj}_a b = \frac{a \cdot b}{|a|} = \frac{-9}{3\sqrt{2}} = -\frac{3}{\sqrt{2}}$.

例 5 一质点在力 $F = 4i + 2j + 2k$ 的作用下, 从点 $A(2, 1, 0)$ 移动到点 $B(5, -2, 6)$, 求 F 所做的功及 F 与 $\overrightarrow{AB}$ 间的夹角.

解 F 所做的功是 $W = F \cdot s$, 其中 $s = \overrightarrow{AB} = 3i - 3j + 6k$ 是位移向量, 故

$$W = F \cdot s = (4i + 2j + 2k) \cdot (3i - 3j + 6k) = 18.$$

设 F 与 s 的夹角为 θ , 因为

$$\cos \theta = \frac{F \cdot s}{|F||s|} = \frac{18}{\sqrt{4^2 + 2^2 + 2^2} \sqrt{3^2 + (-3)^2 + 6^2}} = \frac{1}{2},$$

所以 F 与 s 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$.

二、两向量的向量积

在学习向量积前, 不妨先回顾一下力学中学习过的力矩. 如图 1-21 所示, 设有杠杆 L , 则作用在点 P 处的力 F 关于支点 O 的力矩为一向量. 若设此向量为 M , 它的模为

$$|M| = |\overrightarrow{OP}| |F| \sin \theta,$$

其中 θ 为 F 与 $\overrightarrow{OP}$ 的夹角. 而力矩 M 的方向(按右手规则确定)垂直于 $\overrightarrow{OP}$ 和 F 所确定的平面. 将计算力矩这种向量的运算形式抽象出来即为两向量的向量积.

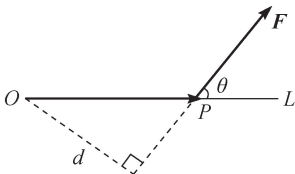


图 1-21

1. 向量积的定义及其运算性质

设向量 c 由向量 a 与 b 决定, 其中

- (1) 向量 c 的模 $|c| = |a||b|\sin\theta$, θ 为向量 a 与 b 的夹角.
- (2) 向量 c 的方向垂直于 a 与 b 所确定的平面, 且 a, b, c 符合右手规则, 即四指从 a 转向 b , 拇指指向的方向即为 c 的方向 (见图 1-22).

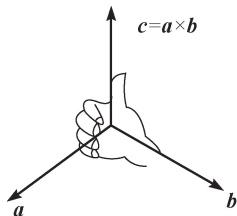


图 1-22

那么, 向量 c 就称为向量 a 与 b 的向量积 (也称叉积或外积), 记为 $a \times b$, 即

$$c = a \times b.$$

根据向量积的定义, 还可以从几何的角度来理解向量积: $a \times b$ 的方向既垂直于 a 又垂直于 b , 向量积的模 $|a \times b|$ 恰好为 a 与 b 所构成的平行四边形的面积 (见图 1-23). 向量积的物理解释则可以理解为力矩, 因此, 上面的力矩 M 等于 $\overrightarrow{OP}$ 与 F 的向量积, 即 $M = \overrightarrow{OP} \times F$.

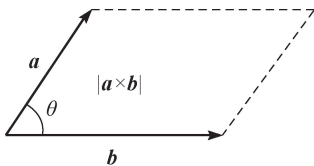


图 1-23

由向量积的定义容易得出如下运算性质.

- (1) $a \times a = 0$.
- (2) 对于两个向量 a, b , 若 $a \times b = 0$, 则 $a \parallel b$; 反之, 若 $a \parallel b$, 则 $a \times b = 0$, 即 $a \parallel b \Leftrightarrow a \times b = 0$.

注: 若向量 a, b 中含有零向量, 由于零向量的方向可看作是任意的, 故可视为与任何向量都平行, 因此上述结论仍然成立.

2. 向量积的运算律

- (1) 反交换律 $a \times b = -(b \times a)$.

由于向量积运算服从右手规则, $a \times b$ 为从 a 转向 b , 而 $b \times a$ 为从 b 转向 a , 指向刚好与 $a \times b$ 相反.

- (2) 分配律 $(a + b) \times c = a \times c + b \times c$.

- (3) 结合律 设 λ 为常数, $(\lambda a) \times b = a \times (\lambda b) = \lambda(a \times b)$.

3. 向量积的坐标表示式

设 $a = (a_x, a_y, a_z)$, $b = (b_x, b_y, b_z)$, 按上述运算律, 得向量积的坐标表示式为



$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) \times (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}) \\
 &= a_x b_x (\mathbf{i} \times \mathbf{i}) + a_y b_y (\mathbf{j} \times \mathbf{j}) + a_z b_z (\mathbf{k} \times \mathbf{k}) + a_x b_y (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) + a_y b_x (\mathbf{j} \times \mathbf{i}) + \\
 &\quad a_x b_z (\mathbf{i} \times \mathbf{k}) + a_z b_x (\mathbf{k} \times \mathbf{i}) + a_y b_z (\mathbf{j} \times \mathbf{k}) + a_z b_y (\mathbf{k} \times \mathbf{j}) \\
 &= (a_y b_z - a_z b_y) \mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \mathbf{k}.
 \end{aligned}$$

利用三阶行列式的表达方法,上式还可写成如下形式:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

或

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \mathbf{k}.$$

例 6 求与向量 $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ 都垂直的单位向量 $\mathbf{e}$.

解 由向量积的定义知, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 与 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 都是垂直的, 而

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 10\mathbf{j} + 5\mathbf{k},$$

又

$$|\mathbf{c}| = \sqrt{10^2 + 5^2} = 5\sqrt{5},$$

所以

$$\mathbf{e} = \pm \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|} = \pm \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{5}} \mathbf{k} \right).$$

例 7 求以 $A(3, 0, 2)$, $B(5, 3, 1)$, $C(0, -1, 3)$ 三点为顶点的三角形的面积.

解 由向量积的定义知, 三角形 ABC 的面积为

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \sin \angle A = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|.$$

由于 $\overrightarrow{AB} = (2, 3, -1)$, $\overrightarrow{AC} = (-3, -1, 1)$, 因此

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 7\mathbf{k},$$

于是

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 7\mathbf{k}| = \frac{1}{2} \times \sqrt{2^2 + 1^2 + 7^2} = \frac{3}{2} \sqrt{6}.$$

三、向量的混合积

1. 向量混合积的定义

混合积是研究三个向量的乘积, 其中既包含向量积也包含数量积. 如果先作两个向量 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ 的数量积, 再与第三个向量 $\mathbf{c}$ 相乘, 这相当于对向量 $\mathbf{c}$ 作数乘, 这种情况不必再讨论.

设有三个向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$, 先作两向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的向量积 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$, 再将所得向量与第三个向量 $\boldsymbol{c}$ 作数量积 $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}$, 这样得到的数量称为三向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 的混合积(或数量三重积), 记为 $[\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}]$.

由混合积的定义可得 $[\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}] = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| |\boldsymbol{c}| \cos \alpha$ (α 为 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的夹角). 当向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 组成右手系(即 $\boldsymbol{c}$ 的指向按右手规则由 $\boldsymbol{a}$ 转向 $\boldsymbol{b}$ 来确定)时, α 为锐角, $[\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}]$ 的符号为正; 当向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 组成左手系(即 $\boldsymbol{c}$ 的指向按左手规则由 $\boldsymbol{a}$ 转向 $\boldsymbol{b}$ 来确定)时, α 为钝角, $[\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}]$ 的符号为负.

2. 向量混合积的几何意义

设向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 为非零向量, 则它们的混合积的绝对值 $|[\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}]|$ 恰好表示以向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体的体积.

事实上, 将 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 移至共同的起点, 以它们为棱可作一个平行六面体, 如图 1-24 所示. 设 $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}, \overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}, \overrightarrow{OC} = \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{f}$. 由向量积的定义可知, $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|$ 等于以向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为边所作平行四边形 $OADB$ 的面积, 即平行六面体的底面积 $S = |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|$; 平行六面体的高 h 恰为向量 $\boldsymbol{c}$ 在向量 $\boldsymbol{f}$ 上投影的绝对值, 若设 $\boldsymbol{f}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的夹角为 α , 则 $h = |\text{Prj}_{\boldsymbol{f}} \boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{c}| |\cos \alpha|$. 由此可得, 平行六面体的体积为

$$V = Sh = |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| |\boldsymbol{c}| |\cos \alpha| = |[\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}]|.$$

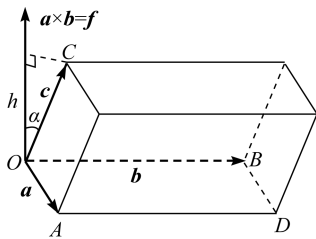


图 1-24

注: 由于不明确向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 组成左手系还是右手系, 所以 h 要取 $\text{Prj}_{\boldsymbol{f}} \boldsymbol{c}$ 的绝对值.

3. 向量混合积的坐标表示式

设 $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z), \boldsymbol{b} = (b_x, b_y, b_z), \boldsymbol{c} = (c_x, c_y, c_z)$. 因为

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \boldsymbol{k},$$

再按两向量的数量积的坐标表示式, 便得三向量的混合积的坐标表示式.

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = c_x \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - c_y \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + c_z \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

由混合积的几何意义可知, 若混合积 $[\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}] \neq 0$, 则能以 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 三向量为棱构成平行六面体, 从而 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 三向量不共面; 反之, 若 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 三向量不共面, 则必能以 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 为棱构成平行六面体, 从而 $[\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}] \neq 0$. 从而有下述结论:

三向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 共面的充分必要条件是它们的混合积 $[\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}] = 0$, 即



$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0.$$

例 8 已知四面体的四个顶点 $A(-1, 0, 4), B(3, -2, 7), C(0, 2, -5), D(2, 8, 3)$, 求该四面体的体积.

解 四面体的体积等于以向量

$$\overrightarrow{AB} = (4, -2, 3), \overrightarrow{AC} = (1, 2, -9), \overrightarrow{AD} = (3, 8, -1)$$

为棱的平行六面体的体积的 $\frac{1}{6}$. 由混合积的几何意义知, 平行六面体的体积为

$$V = |[\overrightarrow{AB} \ \overrightarrow{AC} \ \overrightarrow{AD}]| = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -9 \\ 3 & 8 & -1 \end{vmatrix} = 338,$$

故四面体的体积为

$$V' = \frac{1}{6}V = \frac{1}{6} \times 338 = \frac{169}{3}.$$



习题 1.2

1. 已知三点 $M(1, 2, 3), A(2, 3, 3), B(1, 2, 4)$, 求 $\angle AMB$.
2. 求向量 $\mathbf{a} = (4, -3, 4)$ 在向量 $\mathbf{b} = (2, 2, 1)$ 上的投影.
3. 设 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 为单位向量, 且满足 $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$, 求 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{a}$.
4. 设 $\mathbf{a} = (3, 5, -2), \mathbf{b} = (2, 1, 4)$, 则 λ 与 μ 有怎样的关系, 才能使得 $\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$ 与 z 轴垂直?
5. 设 $\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{k}, \mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$, 求 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
6. 设 $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}, \mathbf{b} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$, 求
 - (1) $(-2\mathbf{a}) \cdot 3\mathbf{b}$ 及 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$;
 - (2) $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 夹角的余弦.
7. 已知四点 $A(1, 2, 3), B(5, -1, 7), C(1, 1, 1), D(3, 3, 2)$, 求
 - (1) $\text{Prj}_{\overrightarrow{AB}} \overrightarrow{AB}$;
 - (2) 与 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ 同时垂直的单位向量.
8. 向量 $\mathbf{d}$ 垂直于向量 $\mathbf{a} = (2, 3, -1)$ 和 $\mathbf{b} = (1, -2, 3)$, 且与 $\mathbf{c} = (2, -1, 1)$ 的数量积为 -6 , 求向量 $\mathbf{d}$.
9. 向量 $7\mathbf{a} - 5\mathbf{b}$ 与 $7\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$ 分别垂直于向量 $\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$ 与 $\mathbf{a} - 4\mathbf{b}$, 求向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角.
10. 在顶点为 $A(1, -1, 2), B(5, -6, 2)$ 和 $C(1, 3, -1)$ 的三角形中, 求 AC 边上的高 BD .
11. 设 $[abc] = 2$, 试求 $[(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{b} + \mathbf{c})] \cdot (\mathbf{c} + \mathbf{a})$.
12. 已知 $A(1, 2, 0), B(2, 3, 1), C(4, 2, 2), M(x, y, z)$ 四点共面, 求点 M 的坐标 x, y, z 所满足的坐标关系式.

第三节 平面及其方程

平面是空间曲面中最简单,也是最重要的一种.本节及下节将以向量为工具来讨论最简单的曲面和曲线,即平面和直线及其方程.

一、平面方程

1. 平面的点法式方程

由立体几何的知识知,过空间一点有且仅有一个平面与已知直线相垂直.据此,当已知一点 M_0 和一个非零向量 $\boldsymbol{n}$ 时,可以唯一地确定一个平面 π ,使之过点 M_0 且与向量 $\boldsymbol{n}$ 垂直.这里的向量 $\boldsymbol{n}$ 称为平面的法向量,其定义如下.

任意垂直于一平面的非零向量,称为该平面的法线向量,简称法向量.显然平面上的任一向量均与该平面的法向量垂直.

当已知平面 π 上一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 和其法向量 $\boldsymbol{n} = (A, B, C)$ 时,下面建立平面 π 的方程(见图 1-25).

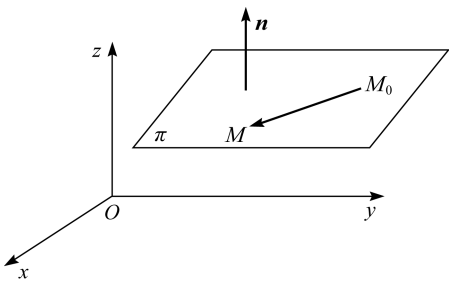


图 1-25

首先,设 $M(x, y, z)$ 是平面 π 上的任意一点,则

$$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0),$$

且向量 $\overrightarrow{M_0M}$ 必与法向量 $\boldsymbol{n}$ 垂直,因此它们的数量积等于零,即

$$\boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0,$$

由数量积的坐标表示式可得

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

这就是平面 π 上任意一点 $M(x, y, z)$ 所满足的方程.

反之,不在平面 π 上的点必不满足此方程.假定 $M_1 = (x_1, y_1, z_1)$ 不在平面 π 上,若满足上述方程,必有 $\boldsymbol{n} \perp \overrightarrow{M_0M_1}$. 取平面 π 上的任一不同于 M_0 的点 $M_2 = (x_2, y_2, z_2)$, 必有 $\boldsymbol{n} \perp \overrightarrow{M_0M_2}$, 从而必有一平面 π_1 过 M_0, M_1 和 M_2 三点, 且 $\boldsymbol{n} \perp \pi_1$. 由 π_1 过点 M_1 , 故 π_1 必不同于 π , 即过点 M_0 有两个平面与向量 $\boldsymbol{n}$ 垂直, 不成立.

由此可知, $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ 就是平面 π 的方程, 而平面 π 即是此方程的图形. 由于此方程是由平面 π 上的一点 M_0 及它的一个法向量 $\boldsymbol{n}$ 确定的, 所以称此方程



为平面的点法式方程.

例 1 求过点 $(1, 1, -2)$ 且以 $\boldsymbol{n} = (1, -2, 5)$ 为法向量的平面的方程.

解 根据平面的点法式方程, 得所求平面的方程为

$$(x-1) - 2(y-1) + 5(z+2) = 0,$$

即 $x - 2y + 5z + 11 = 0$.

例 2 一平面过点 $(1, 0, -1)$ 且平行于向量 $\boldsymbol{a} = (2, 1, 1)$ 和 $\boldsymbol{b} = (1, -1, 0)$, 试求该平面的方程.

解 因所求平面平行于向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$, 故该平面的法向量为

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (1, 1, -3),$$

从而所求平面的方程为

$$1 \cdot (x-1) + 1 \cdot (y-0) - 3 \cdot (z+1) = 0,$$

即 $x + y - 3z - 4 = 0$.

2. 平面的一般方程

将平面的点法式方程 $A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$ 进行整理, 可得

$$Ax + By + Cz - (Ax_0 + By_0 + Cz_0) = 0,$$

令 $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$, 则点法式方程可写为一个关于 x, y, z 的三元一次方程:

$$Ax + By + Cz + D = 0. \quad (1)$$

反之, 对任意三元一次方程 $Ax + By + Cz + D = 0$, 任取一个满足此方程的数组 (x_0, y_0, z_0) , 即有 $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, 将这两个等式相减, 可得

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0,$$

这恰为过点 (x_0, y_0, z_0) 且以 $\boldsymbol{n} = (A, B, C)$ 为法向量的平面方程.

综上所述, 平面方程为一个三元一次方程, 而任意三元一次方程 $Ax + By + Cz + D = 0$ 的图形总是一个平面. 因此, 把三元一次方程 $Ax + By + Cz + D = 0$ 称为平面的一般方程, 其法向量为 $\boldsymbol{n} = (A, B, C)$.

包含 0 系数的三元一次方程表示特殊的平面, 下面讨论它们关于坐标轴的相对位置, 以及这样的平面通过的特殊点或线.

(1) 当 $D = 0$ 时, 方程 ① 成为 $Ax + By + Cz = 0$, 它表示一个过原点的平面.

(2) 当 $A = 0$ 时, 方程 ① 成为 $By + Cz + D = 0$, 其法向量 $\boldsymbol{n} = (0, B, C)$ 垂直于 x 轴, 它表示一个平行于 x 轴的平面; 当 $B = 0$ 时, 方程 ① 成为 $Ax + Cz + D = 0$, 其法向量 $\boldsymbol{n} = (A, 0, C)$ 垂直于 y 轴, 它表示一个平行于 y 轴的平面; 当 $C = 0$ 时, 方程 ① 成为 $Ax + By + D = 0$, 其法向量 $\boldsymbol{n} = (A, B, 0)$ 垂直于 z 轴, 它表示一个平行于 z 轴的平面.

(3) 当 $A = B = 0$ 时, 方程 ① 成为 $Cz + D = 0$, 其法向量 $\boldsymbol{n} = (0, 0, C)$ 同时垂直于 x 轴和 y 轴, 它表示一个平行于 xOy 面的平面; 当 $B = C = 0$ 时, 方程 ① 成为 $Ax + D = 0$, 其法向量 $\boldsymbol{n} = (A, 0, 0)$ 同时垂直于 y 轴和 z 轴, 它表示一个平行于 yOz 面的平面; 当 $A = C = 0$

时,方程①成为 $By + D = 0$,其法向量 $\boldsymbol{n} = (0, B, 0)$ 同时垂直于 x 轴和 z 轴,它表示一个平行于 zOx 面的平面.

例 3 求过 x 轴和点 $(4, -3, -1)$ 的平面方程.

解 因为所求平面过 x 轴,所以可设此平面的方程为

$$By + Cz = 0.$$

又因此平面过点 $(4, -3, -1)$,因此有关系式

$$-3B - C = 0,$$

将其代入所设方程中并除以 B ,得所求平面方程为 $y - 3z = 0$.

3. 平面的截距式方程

若平面与 x, y, z 轴的交点依次为 $P(a, 0, 0), Q(0, b, 0), R(0, 0, c)$, 则 a, b, c 依次称为平面在 x, y, z 轴上的**截距**. 当 $abc \neq 0$ 时,可以由这三点坐标直接得到平面的方程.

为确定平面的方程,可先设所求平面的一般方程为 $Ax + By + Cz + D = 0$. 因为点 $P(a, 0, 0), Q(0, b, 0), R(0, 0, c)$ 都在此平面上,所以点 P, Q, R 的坐标都满足所设方程,即

$$\begin{cases} aA + D = 0, \\ bB + D = 0, \\ cC + D = 0, \end{cases}$$

由此得 $A = -\frac{D}{a}, B = -\frac{D}{b}, C = -\frac{D}{c}$, 将其代入所设方程,可得

$$-\frac{D}{a}x - \frac{D}{b}y - \frac{D}{c}z + D = 0.$$

由于平面显然不过坐标原点,即 $D \neq 0$,于是方程两侧同时除以 D ,得

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

此方程就称为平面的**截距式方程**.

例 4 写出平面 $3x - 4y + z - 5 = 0$ 的截距式方程.

解 设 $y = z = 0$,由方程得

$$3x - 5 = 0, \text{即 } x = \frac{5}{3},$$

从而平面在 x 轴上的截距为 $a = \frac{5}{3}$.

同理可得,平面在 y 轴上的截距为 $b = -\frac{5}{4}$,平面在 z 轴上的截距为 $c = 5$. 因此,平面的截距式方程为

$$\frac{x}{\frac{5}{3}} + \frac{y}{-\frac{5}{4}} + \frac{z}{5} = 1.$$

4. 平面的三点式方程

已知不共线的三点确定一个平面,下面由已知不在同一直线上的三点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$,



$M_2(x_2, y_2, z_2), M_3(x_3, y_3, z_3)$ 来确定平面方程.

设 $M(x, y, z)$ 是平面上的任意一点, 则三向量 $\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}$ 共面, 由向量共面的条件知

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0,$$

这就是所求平面的方程, 该方程称为平面的三点式方程.

例 5 求过三点 $(2, 3, 0), (-2, -3, -4), (0, 6, 0)$ 的平面方程.

解 由平面的三点式方程, 得

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-0 \\ -2-2 & -3-3 & -4-0 \\ 0-2 & 6-3 & 0-0 \end{vmatrix} = 0,$$

即所求平面方程为 $3x + 2y - 6z - 12 = 0$.

二、两平面的位置关系

设有两平面 $\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ 和 $\pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, 下面探讨两平面的位置关系.

两平面的位置关系只有两种: 平行(包括重合) 或相交(包括正交, 即垂直). 相交就有夹角问题, 把两平面的法向量的夹角 θ 称为 **两平面的夹角**, 由于法线有两个方向, 这里约定 $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, 其中两平面平行时 $\theta = 0$, 两平面垂直时 $\theta = \frac{\pi}{2}$, 其余情况下两平面的夹角为锐角.

平面 π_1 和 π_2 的法向量分别为 $\mathbf{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ 和 $\mathbf{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$, 那么 $(\widehat{\mathbf{n}_1}, \widehat{\mathbf{n}_2})$ 和 $(-\widehat{\mathbf{n}_1}, \widehat{\mathbf{n}_2}) = \pi - (\widehat{\mathbf{n}_1}, \widehat{\mathbf{n}_2})$ 之一必属于 $[0, \frac{\pi}{2}]$, 取其为平面 π_1 和 π_2 的夹角 θ (见图 1-26), 于是 $\cos \theta = |\cos(\widehat{\mathbf{n}_1}, \widehat{\mathbf{n}_2})|$. 由两向量夹角余弦的坐标表示式, 可得

$$\cos \theta = |\cos(\widehat{\mathbf{n}_1}, \widehat{\mathbf{n}_2})| = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \quad (2)$$

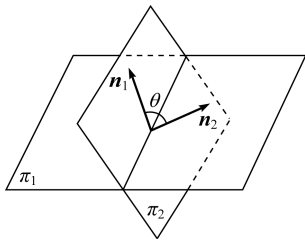


图 1-26

例 6 求两平面 $x - y - 11 = 0$ 和 $3x + 8 = 0$ 的夹角.

解 由公式②,得

$$\cos \theta = \frac{|1 \times 3 + (-1) \times 0 + 0 \times 0|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} \cdot \sqrt{3^2 + 0^2 + 0^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

故所求夹角 θ 为 $\frac{\pi}{4}$.

例 7 平面过 z 轴,且与平面 $2x + y - \sqrt{5}z = 0$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$,求此平面方程.

解 平面过 z 轴,则方程可设为 $Ax + By = 0$. 由题意知

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} = \frac{|2A + B|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 5} \cdot \sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|2A + B|}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{A^2 + B^2}},$$

即

$$|2A + B| = \frac{\sqrt{10}}{2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2},$$

解得 $A = \frac{B}{3}$ 或 $A = -3B$, 所以所求平面方程为

$$x + 3y = 0 \text{ 或 } -3x + y = 0.$$

两平面位置关系中比较特殊的情况是平行和垂直,而两平面平行就相当于其法向量相互平行,两平面垂直就相当于其法向量相互垂直. 设两平面 π_1 和 π_2 的法向量分别为 (A_1, B_1, C_1) 和 (A_2, B_2, C_2) , 故 π_1 和 π_2 平行、垂直的充要条件分别为

$$(1) \pi_1 // \pi_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} (A_2 B_2 C_2 \neq 0).$$

$$\text{特别地, } \pi_1 \text{ 和 } \pi_2 \text{ 重合} \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2} (A_2 B_2 C_2 D_2 \neq 0).$$

$$(2) \pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0.$$

注: 两平面相交的充要条件为 $\frac{A_1}{A_2}, \frac{B_1}{B_2}, \frac{C_1}{C_2}$ 不全相等.

例 8 求通过 x 轴,且垂直于平面 $5x + 4y - 2z + 14 = 0$ 的平面的方程.

解 设所求平面的法向量为 $\mathbf{n}$, 平面 $5x + 4y - 2z + 14 = 0$ 的法向量为 $\mathbf{n}_1 = (5, 4, -2)$. 由题意, $\mathbf{n} \perp \mathbf{n}_1, \mathbf{n} \perp \mathbf{i}$, 故

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{i} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 5 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, -2, -4).$$

又所求平面过原点, 所以其方程为

$$0 \cdot x - 2y - 4z = 0, \text{ 即 } y + 2z = 0.$$

三、点到平面的距离

下面讨论平面外一点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 到平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 的距离 d , 如图 1-27 所示.

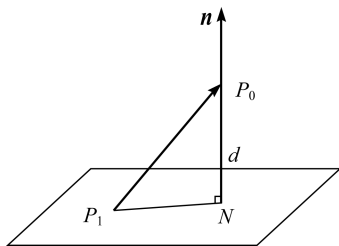


图 1-27

首先在平面上任取一点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$, 并设 $\mathbf{n} = (A, B, C)$ 为平面的法向量, 则 P_0 到此平面的距离为向量 $\overrightarrow{P_1P_0}$ 在 $\mathbf{n}$ 上的投影的绝对值, 即

$$d = |\operatorname{Prj}_{\mathbf{n}} \overrightarrow{P_1P_0}|.$$

由数量积与投影的关系可得 $\overrightarrow{P_1P_0} \cdot \mathbf{n} = |\mathbf{n}| \operatorname{Prj}_{\mathbf{n}} \overrightarrow{P_1P_0}$, 其中 $\overrightarrow{P_1P_0} = (x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1)$, $|\mathbf{n}| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, 于是

$$\begin{aligned} \operatorname{Prj}_{\mathbf{n}} \overrightarrow{P_1P_0} &= \frac{1}{|\mathbf{n}|} (\overrightarrow{P_1P_0} \cdot \mathbf{n}) = \frac{(x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1) \cdot (A, B, C)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} [A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1)] \\ &= \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 - (Ax_1 + By_1 + Cz_1)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \end{aligned}$$

又由于 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 在平面上, 故有 $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$, 因此, 上式化为

$$\operatorname{Prj}_{\mathbf{n}} \overrightarrow{P_1P_0} = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

于是, 平面外一点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 到平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 的距离为

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (3)$$

例 9 求两平行平面 $\pi_1: Ax + By + Cz + D_1 = 0$ 和 $\pi_2: Ax + By + Cz + D_2 = 0$ 的距离 d .

解 如图 1-28 所示. 在平面 π_1 上任取一点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$, 则点 P_0 到 π_2 的距离就是平行平面间的距离, 于是

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

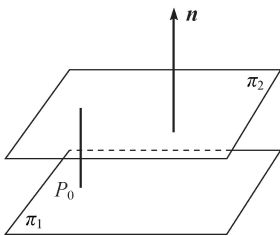


图 1-28

又由于 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 是平面 $\pi_1: Ax + By + Cz + D_1 = 0$ 上的点, 于是 $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D_1 = 0$, 即 $Ax_0 + By_0 + Cz_0 = -D_1$, 代入式 ③, 得

$$d = \frac{|D_2 - D_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$



习题 1.3

- 求过点 $(1, 0, -1)$ 且平行于平面 $x + 2y - z + 8 = 0$ 的平面方程.
- 指出下列平面的特殊性质, 并作图.
 - $3x - 2 = 0$;
 - $4y - 7z = 0$;
 - $2x + 3y - 6 = 0$;
 - $x + 2y - z = 0$.
- 求过三点 $A(1, 1, -1), B(-2, -2, 2), C(1, -1, 2)$ 的平面方程, 并求其在各坐标轴上的截距.
- 求通过 x 轴和点 $(4, -3, -1)$ 的平面的方程.
- 求平面 $2x + y + 2z - 9 = 0$ 与各坐标面的夹角的余弦.
- 试确定 k 的值, 使平面 $kx + y + z + k = 0$ 与 $x + ky + kz + k = 0$
 - 互相垂直;
 - 互相平行;
 - 重合.
- 讨论以下各组中两平面的位置关系.
 - $-x + 2y - z + 1 = 0, y + 3z - 1 = 0$;
 - $2x - y + z - 1 = 0, -4x + 2y - 2z - 1 = 0$;
 - $2x - y - z + 1 = 0, -4x + 2y + 2z - 2 = 0$.
- 试求系数 k , 使平面 $x + ky - 2z = 9$ 适合下列条件之一.
 - 经过点 $(5, -4, -6)$;
 - 与原点相距 3 个单位;
 - 与平面 $2x - 3y + z = 0$ 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$.
- 求点 $(2, 3, -2)$ 到平面 $2x - 3y + 5z - 8 = 0$ 的距离.

第四节 空间直线及其方程

一、空间直线方程

1. 空间直线的点向式方程

首先给出直线的方向向量的概念. 已知直线 L , 任意一个平行于 L 的非零向量称为这条直线的方向向量, 直线方向向量 s 的坐标 m, n, p 称为这条直线的方向数, 而向量 s 的方向余弦称为该直线的方向余弦. 显然, 直线上任一向量都可视为该直线的方向向量.



微课:
空间直线及其方程



在空间中给定直线 L 上一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 及它的一个方向向量 $s = (m, n, p)$, 就可以唯一地确定直线 L 的位置. 下面来建立直线 L 的方程, 如图 1-29 所示.

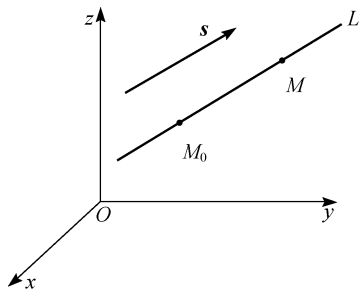


图 1-29

设 $M(x, y, z)$ 为直线 L 上的任意一点, 那么有 $\overrightarrow{M_0M}$ 与 s 平行, 所以两向量的对应坐标成比例, 即

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}, \quad (1)$$

这就是直线 L 的方程, 称为直线的点向式方程或对称式方程.

因为 $s \neq 0$, 所以 m, n, p 不全为零, 但当 m, n, p 中有一个为零, 如 $m = 0$ 时, 方程 (1) 成为

$$\begin{cases} x = x_0, \\ \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}, \end{cases} \text{ 表示一条平行于 } yOz \text{ 面的直线, 其上的点恒满足 } x = x_0; \text{ 而当 } m, n, p \text{ 中}$$

有两个为零, 如 $m = n = 0$ 时, 方程 (1) 成为 $\begin{cases} x = x_0, \\ y = y_0, \end{cases}$ 表示一条平行于 z 轴的直线, 其上的点恒满足 $x = x_0, y = y_0$.

例 1 求过点 $A(2, -3, 4)$ 且和 y 轴垂直相交的直线的方程.

解 因为直线和 y 轴垂直相交, 所以交点为 $B(0, -3, 0)$, 于是取方向向量

$$s = \overrightarrow{BA} = (2, 0, 4),$$

因此, 直线方程为

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y+3}{0} = \frac{z-4}{4},$$

$$\text{也可写为 } \begin{cases} \frac{x-2}{2} = \frac{z-4}{4}, \\ y = -3. \end{cases}$$

例 2 已知两点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2, z_2)$, 试求过 M_1, M_2 的直线的方程.

解 由直线过点 M_1 和 M_2 知, 其方向向量 $s = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, 于是直线的点向式方程为

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

2. 空间直线的参数方程

由直线的点向式方程, 可以得出直线的参数方程.

设 $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p} = t$, 则

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt, \end{cases}$$

此方程组就是直线的参数方程, 其中 t 为参数. 若 $s = (m, n, p)$ 为单位向量, 则 t 的绝对值代表动点 $M(x, y, z)$ 到定点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 的距离. $\overrightarrow{M_0M}$ 与 s 同向时, t 为正; 反向时, t 为负.

3. 空间直线的一般方程

更一般的情况下, 空间直线 L 可以看作是两个平面 π_1 和 π_2 的交线. 设直线 L 是平面 $\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ 与 $\pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ 的交线 (见图 1-30), 则直线 L 上任意一点的坐标应同时满足这两个平面的方程, 即

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \quad (2)$$

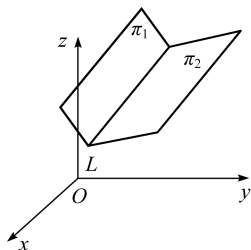


图 1-30

反之, 若点 M 不在直线 L 上, 显然它不可能同时在平面 π_1 和 π_2 上, 所以其坐标必不满足上述方程组.

由此可见, 直线 L 可用方程组 (2) 来表示, 此方程组就称为空间直线的一般方程.

通过空间一直线 L 的平面有无穷多个, 把通过该直线的所有平面的全体称为有轴平面束, 简称平面束, 直线 L 称为平面束的轴. 只要在平面束中任意选取两个平面, 将其方程联立起来, 所得方程组就表示空间直线 L .

例 3 已知直线的一般方程 $\begin{cases} 2x - 3y + z = 7, \\ 3x + 2y - z = -1, \end{cases}$ 试求其点向式方程及参数方程.

解 首先任意求出直线上的一点, 如令 $x = 1$, 可得到 $\begin{cases} -3y + z = 5, \\ 2y - z = -4, \end{cases}$ 解得 $y = -1, z = 2$,

于是点 $(1, -1, 2)$ 在直线上.

设两平面的法向量分别为 n_1, n_2 , 直线的方向向量为 s , 则

$$s = n_1 \times n_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = i + 5j + 13k,$$

因此, 直线的点向式方程为



$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-2}{13}.$$

令 $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-2}{13} = t$, 得所给直线的参数方程为

$$\begin{cases} x = t + 1, \\ y = 5t - 1, \\ z = 13t + 2. \end{cases}$$

例 4 设两条不平行的直线 $L_1: \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}$ 与 $L_2: \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$, 若在 L_1 与 L_2 上分别任取 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 两点, 试证明 L_1 与 L_2 的距离为

$$d = \frac{|\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2|}{|\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2|},$$

其中 $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2$ 分别为 L_1, L_2 的方向向量.

证明 由向量混合积的几何意义可知, $|\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2|$ 的绝对值为以这三个向量为棱的平行六面体的体积, 如图 1-31 所示.

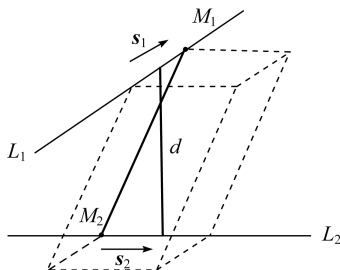


图 1-31

同时, 这个平行六面体的体积 V 还可表示为高与底面积的乘积, 即 $V = d \cdot |\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2|$, 从而有

$$V = d \cdot |\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2| = |\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2|,$$

由两直线不平行, 可知 $|\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2| \neq 0$, 故有

$$d = \frac{|\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2|}{|\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2|}.$$

二、两直线的夹角及位置关系

1. 两直线的夹角

把两直线的方向向量的夹角 φ 称为**两直线的夹角**. 由于方向向量有两个方向, 这里同样约定 $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

设直线 L_1 和 L_2 的方向向量分别为 $s_1 = (n_1, m_1, p_1)$ 和 $s_2 = (n_2, m_2, p_2)$, 则 L_1 和 L_2 的夹角 $\varphi = (\widehat{s_1, s_2})$ (或 $\pi - (\widehat{s_1, s_2})$), 因此, $\cos \varphi = |\cos(\widehat{s_1, s_2})|$. 根据两向量夹角余弦的坐标表示式可得

$$\cos \varphi = |\cos(\widehat{s_1, s_2})| = \frac{|m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

例 5 已知直线 $L_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z+8}{1}$, $L_2: \begin{cases} x-y=6, \\ 2y+z=3, \end{cases}$ 试求这两直线的夹角.

解 两直线的方向向量分别为

$$s_1 = (1, -2, 1), s_2 = n_1 \times n_2 = (-1, -1, 2),$$

其中 n_1, n_2 分别为 L_2 所对应的两平面的法向量.

因此, 两直线的夹角 φ 满足

$$\cos \varphi = \frac{|1 \times (-1) + (-2) \times (-1) + 1 \times 2|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{1}{2},$$

故两直线的夹角为 $\frac{\pi}{3}$.

2. 两直线的位置关系

设两直线分别为 $L_1: \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}$, $L_2: \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}$, 其位置关系有三种情况: 平行(包含重合)、相交(包含垂直) 和异面.

首先讨论两直线平行及垂直的条件. 由于两直线平行即其方向向量平行, 两直线垂直即其方向向量垂直, 故可得两直线平行与垂直的充分必要条件分别如下.

$$(1) L_1 // L_2 \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}.$$

$$(2) L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0.$$

当两直线不平行时, 由直线的位置关系知, 两直线可能相交, 也可能异面. 若两直线相交, 则两直线间的距离为 0, 异面则两直线间的距离不为 0, 结合例 4 可得如下结论.

$$(1) \text{ 若 } L_1 \text{ 与 } L_2 \text{ 相交, 则 } |s_1 \times s_2| \neq 0 \text{ 且 } [\overrightarrow{M_1 M_2}, s_1, s_2] = 0,$$

$$(2) \text{ 若 } L_1 \text{ 与 } L_2 \text{ 异面, 则 } |s_1 \times s_2| \neq 0 \text{ 且 } [\overrightarrow{M_1 M_2}, s_1, s_2] \neq 0,$$

其中 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 分别为 L_1 与 L_2 上的任意点, s_1 和 s_2 分别为 L_1 与 L_2 的方向向量.

三、直线与平面

1. 直线与平面的夹角

直线和它在平面上的投影直线间的夹角 $\varphi (0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2})$ 称为直线与平面的夹角 (见图 1-32).

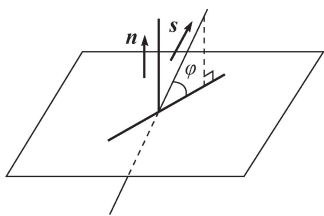


图 1-32

注:当直线与平面垂直时,直线在平面上的投影为点,此时规定直线与平面的夹角为 $\frac{\pi}{2}$.

设直线的方向向量为 $s = (m, n, p)$,平面的法向量为 $n = (A, B, C)$,直线与平面的夹角为 φ ,则 $\varphi = \left| \frac{\pi}{2} - (\hat{s}, \hat{n}) \right|$,所以 $\sin \varphi = |\cos(\hat{s}, \hat{n})|$.由两向量夹角余弦的坐标表示式,有

$$\sin \varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

例 6 设直线 $L: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{2}$,平面 $\pi: x-y+2z=3$,求直线与平面的夹角.

解 直线 L 的方向向量为 $s = (2, -1, 2)$,平面 π 的法向量为 $n = (1, -1, 2)$,则 L 与 π 的夹角 φ 满足

$$\sin \varphi = \frac{|1 \times 2 + (-1) \times (-1) + 2 \times 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{7}{3\sqrt{6}},$$

因此, L 与 π 的夹角 φ 为 $\arcsin \frac{7}{3\sqrt{6}}$.

2. 直线与平面的位置关系

直线与平面的位置关系有两种情况:相交(包含垂直)、平行(包含在平面上).设直线 L 的方向向量为 $s = (m, n, p)$,平面 π 的方程为 $Ax + By + Cz + D = 0$,其法向量为 $n = (A, B, C)$,则 L 与 π 垂直、平行的充要条件分别如下.

(1) 因为 $L \perp \pi$ 相当于直线的方向向量与平面的法向量平行,即 $s \parallel n$,故有

$$L \perp \pi \Leftrightarrow \frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}.$$

(2) 因为 $L \parallel \pi$ 相当于直线的方向向量与平面的法向量垂直,即 $s \perp n$,故有

$$L \parallel \pi \Leftrightarrow Am + Bn + Cp = 0.$$

特别地,直线 L 在平面 π 上的充要条件为 $Am + Bn + Cp = 0$,且对 $\forall M_0(x_0, y_0, z_0) \in L$,有 $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$.

例 7 求过点 $(1, -2, 4)$ 且与平面 $2x - 3y + z - 4 = 0$ 垂直的直线的方程.

解 平面的法向量 $(2, -3, 1)$,由于直线与平面垂直,故平面的法向量可作为所求直线的方向向量,因此,所求直线的方程为

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-4}{1}.$$

例 8 求过点 $(-1, 0, 4)$ 且平行于平面 $3x - 4y + z - 10 = 0$, 又与直线 $\frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{2}$ 相交的直线的方程.

解 设所求直线方程为

$$\frac{x+1}{m} = \frac{y-0}{n} = \frac{z-4}{p},$$

因为所求直线平行于平面 $3x - 4y + z - 10 = 0$, 所以

$$3m - 4n + p = 0.$$

又由于所求直线与直线 $\frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{2}$ 相交, 故有

$$\begin{vmatrix} -1 - (-1) & 0 - 3 & 4 - 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ m & n & p \end{vmatrix} = 0,$$

即 $10m - 4n - 3p = 0$.

$$\text{由} \begin{cases} 3m - 4n + p = 0, \\ 10m - 4n - 3p = 0, \end{cases} \text{得}$$

$$\frac{16}{m} = \frac{19}{n} = \frac{28}{p},$$

故所求直线方程为 $\frac{x+1}{16} = \frac{y}{19} = \frac{z-4}{28}$.

3. 平面束方程

有时应用平面束方程解题比较方便.

在已知直线 L 的情况下, 任取两个过该直线的平面 $\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ 和 $\pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, 即可得其一般方程.

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

现在来考察三元一次方程

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 (\lambda \text{ 为任意常数}),$$

整理可得

$$(A_1 + \lambda A_2)x + (B_1 + \lambda B_2)y + (C_1 + \lambda C_2)z + D_1 + \lambda D_2 = 0, \quad (3)$$

由于 π_1, π_2 两平面相交, 故系数 A_1, B_1, C_1 与 A_2, B_2, C_2 必不完全成比例, 所以对任意 λ 值, 上述方程的系数必不全为零, 从而这个三元一次方程可表示平面. 同时, 对于不同的 λ 值, 它对应的平面也不同, 而且这些平面显然都通过直线 L .

反之, 通过直线 L 的所有平面(除平面 π_2 外)都包含在方程(3)所表示的一族平面内, 于是把方程 $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$ 称为过直线 L 的平面束方程.



例 9 设平面外一点 $(1, -1, 0)$ 到平面的距离为 $\frac{1}{\sqrt{2}}$, 且该平面过直线 $L: \begin{cases} 7x - y - 2z = 8, \\ x - 9y + 8z = 20, \end{cases}$

求此平面的方程.

解 过直线 L 的平面束方程为

$$7x - y - 2z - 8 + \lambda(x - 9y + 8z - 20) = 0,$$

即

$$(\lambda + 7)x - (9\lambda + 1)y + (8\lambda - 2)z - 20\lambda - 8 = 0,$$

其中 λ 为待定常数. 由点 $(1, -1, 0)$ 到平面的距离为 $\frac{1}{\sqrt{2}}$, 得

$$\frac{|\lambda + 7 + 9\lambda + 1 - 20\lambda - 8|}{\sqrt{(\lambda + 7)^2 + (9\lambda + 1)^2 + (8\lambda - 2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

解得 $\lambda = \pm 1$, 代入平面束方程, 得所求平面的方程为

$$4x - 5y + 3z - 14 = 0 \text{ 或 } 3x + 4y - 5z + 6 = 0.$$



习题 1.4

1. 用点向式方程及参数方程表示直线 $\begin{cases} x + y + z + 1 = 0, \\ 2x - y + 3z + 4 = 0. \end{cases}$

2. 求过点 $(-3, 2, 5)$ 且与两平面 $x - 4z = 3$ 和 $2x - y - 5z = 1$ 的交线平行的直线的方程.

3. 求过点 $P(2, -1, 3)$ 且与直线 $L: \frac{x}{3} = \frac{y+7}{5} = \frac{z-2}{2}$ 垂直相交的直线的方程.

4. 求直线 $L_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-4} = \frac{z+3}{1}$ 与 $L_2: \frac{x}{2} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z}{-1}$ 的夹角.

5. 求点 $P(3, -1, 2)$ 到直线 $\begin{cases} x + y - z + 1 = 0, \\ 2x - y + z - 4 = 0 \end{cases}$ 的距离.

6. 试确定下列各组中的直线和平面间的位置关系.

(1) $\frac{x+3}{-2} = \frac{y+4}{-7} = \frac{z}{3}$ 和 $4x - 2y - 2z = 3$;

(2) $\begin{cases} x + 3y + 2z + 1 = 0, \\ 2x - y - 10z + 3 = 0 \end{cases}$ 和 $4x - 2y + z = 0$;

(3) $\frac{x-2}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{-4}$ 和 $x + y + z = 3$.

7. 求过点 $(2, 0, -3)$ 且与直线 $\begin{cases} x - 2y + 4z - 7 = 0, \\ 3x + 5y - 2z + 1 = 0 \end{cases}$ 垂直的平面的方程.

8. 求直线 $\begin{cases} x + y - z - 1 = 0, \\ x - y + z + 1 = 0 \end{cases}$ 在平面 $x + y + z = 0$ 上的投影直线的方程.

9. 求点 $(-1, 2, 0)$ 在平面 $x + 2y - z + 1 = 0$ 上的投影.

10. 设直线 $L: \frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}$, 直线外一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, 若取 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 为 L 上任意一点, 试证 M_0 到 L 的距离 $d = \frac{|\overrightarrow{M_0M_1} \times \mathbf{s}|}{|\mathbf{s}|}$, 其中 $\mathbf{s}$ 为直线 L 的方向向量.

第五节 曲面方程



微课:

曲面及其方程

空间解析几何实际上就是研究动点的几何轨迹. 仅在一个条件下运动的空间点的轨迹一般来说是一个曲面, 如到两定点距离和为常值的点的轨迹是椭球; 而同时在两个条件下运动的空间点的轨迹往往是空间曲线, 如当有三个不共线的点 M_1, M_2, M_3 , 与 M_1 的距离为定值, 而与 M_2 和 M_3 的距离相等的点的轨迹是圆. 本节和下一节将通过分析动点的轨迹特征, 建立关于动点坐标 (x, y, z) 的曲面或曲线的方程.

一、曲面方程的概念

如果曲面 S 上每一点的坐标都满足方程 $F(x, y, z) = 0$, 而不在曲面 S 上的点的坐标都不满足这个方程, 则称方程 $F(x, y, z) = 0$ 为曲面 S 的方程, 而称曲面 S 为此方程的图形.

下面举例说明怎样从曲面上点的特征得出曲面方程.

例 1 如图 1-33 所示, 求球心在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, 半径为 R 的球面方程.

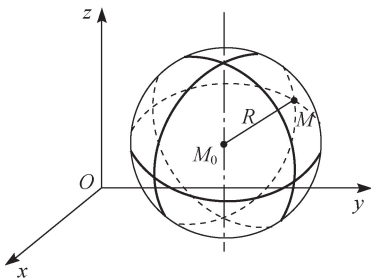


图 1-33

解 点 $M(x, y, z)$ 在以 M_0 为球心, 以 R 为半径的球面上的充要条件为

$$|M_0M| = R,$$

即

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} = R, \quad (1)$$

两边平方, 得

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2.$$

显然, 球面上的点的坐标都满足此方程, 不在球面上的点的坐标都不满足这个方程, 所以方程 ① 就是球心在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, 半径为 R 的球面的方程.

一般地, 设有三元二次方程



$$Ax^2 + Ay^2 + Az^2 + Dx + Ey + Fz + G = 0,$$

这个方程有两个特点:一是缺 xy, yz, zx 各交叉项;二是平方项系数相同. 一般来讲, 具有上述特点的三元二次方程的图形是一个球面. 需要注意的是, 此方程经配方后能还原为方程 ① 的形式, 否则可能为虚球面.

例 2 求与原点 O 及 $M_0(2, 3, 4)$ 的距离之比为 $1:2$ 的全体点组成的曲面的方程.

解 设 $M(x, y, z)$ 是曲面上任意一点, 根据题意有 $\frac{|MO|}{|MM_0|} = \frac{1}{2}$, 即

$$\frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2}} = \frac{1}{2},$$

$$\text{整理得} \left(x + \frac{2}{3}\right)^2 + (y+1)^2 + \left(z + \frac{4}{3}\right)^2 = \frac{116}{9}.$$

这就是所求曲面上的点的坐标满足的方程, 而不在该曲面上的点的坐标不满足此方程, 所以它就是所求曲面的方程.

以上表明作为点的几何轨迹的曲面可以用它的点的坐标间的方程来表示. 反之, 变量 x, y, z 间的方程通常表示一个曲面. 下面将以旋转曲面为例讨论问题: 已知一曲面作为点的几何轨迹时, 如何建立该曲面的方程? 以柱面和二次曲面为例讨论问题: 已知坐标 x, y, z 间的一个方程时, 研究此方程所表示的曲面的形状.

二、旋转曲面

设平面上有一条定直线和一条曲线, 则该曲线绕定直线旋转一周所成的曲面称为**旋转曲面**, 其中定直线称为旋转曲面的**轴**, 而旋转的动曲线称为旋转曲面的**母线**.

下面只讨论母线在某个坐标面上, 它绕某个坐标轴旋转所形成的旋转曲面.

设在 yOz 面上有一已知曲线 C , 它的方程为

$$f(y, z) = 0,$$

求此曲线 C 绕 z 轴旋转一周所形成的旋转曲面(见图 1-34) 的方程.

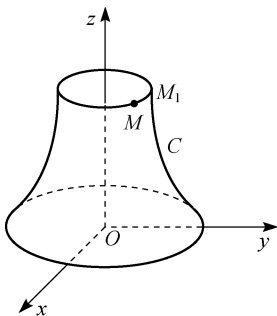


图 1-34

设 $M_1(0, y_1, z_1)$ 为曲线 C 上的任意一点, 于是 M_1 的坐标必满足 $f(y_1, z_1) = 0$. 当曲线 C 绕 z 轴旋转时, 点 M_1 绕 z 轴转到另一点 $M(x, y, z)$, 此时, 点 M 与 z 轴的距离等于点 M_1 到 z 轴的距离, 且有同一竖坐标, 即 $|y_1| = \sqrt{x^2 + y^2}, z = z_1$, 将其代入 $f(y_1, z_1) = 0$, 得

$$f(\pm \sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0,$$

即为所求旋转曲面的方程.

综上所述,当已知母线 C 的方程为 $f(y, z) = 0$ 时,保留 z 形式不变,将 y 改成 $\pm \sqrt{x^2 + y^2}$, 便得曲线 C 绕 z 轴旋转所成的旋转曲面的方程 $f(\pm \sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$.

同理,曲线 C 绕 y 轴旋转所成的旋转曲面的方程为 $f(y, \pm \sqrt{x^2 + z^2}) = 0$.

对于其他坐标面上的曲线,绕该坐标面上任何一条坐标轴旋转所生成的旋转曲面,其方程可以用上述类似方法求得.

例 3 如图 1-35 所示,取两条相交且夹角 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ 的直线,其中一条直线绕另一条直线旋转一周所得的旋转曲面称为圆锥面. 两直线的交点称为圆锥面的顶点,两直线的夹角 α 称为圆锥面的半顶角. 当将坐标原点 O 设在圆锥面的顶点处,并以 z 轴为旋转轴时,试建立圆锥面的方程.

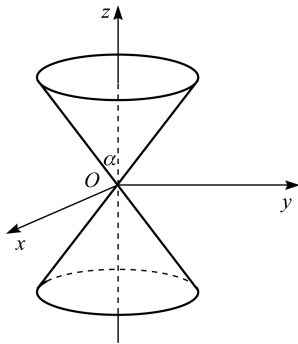


图 1-35

解 在 yOz 面内,直线 L 的方程为

$$z = y \cot \alpha, \quad (2)$$

由于旋转轴为 z 轴,将方程 (2) 中的 y 改成 $\pm \sqrt{x^2 + y^2}$, 便得到圆锥面的方程

$$z = \pm \sqrt{x^2 + y^2} \cot \alpha,$$

整理得

$$z^2 = a^2(x^2 + y^2),$$

其中 $a = \cot \alpha$.

事实上,以前学习过的椭圆、抛物线及双曲线都是由圆锥面得来的. 用一个平面截圆锥面,当截面与其所有母线都相交时,截线为椭圆;当截面与任意一条母线平行时,截线为抛物线;当截面与轴线平行时,截线为双曲线的一支.

例 4 将 zOx 面上的双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ 分别绕 x 轴和 z 轴旋转一周,求所生成的旋转曲面的方程.

解 绕 x 轴旋转所得的旋转曲面的方程为

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2 + z^2}{c^2} = 1,$$



绕 z 轴旋转所得的旋转曲面的方程为

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

这两种曲面分别称为**旋转双叶双曲面**和**旋转单叶双曲面**(见图 1-36).

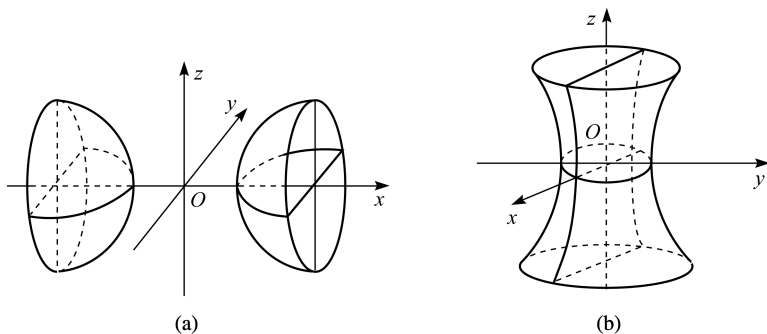


图 1-36

(a) 旋转双叶双曲面; (b) 旋转单叶双曲面

三、柱面

分别给定一条定直线 l 和定曲线 C , 则取平行于定直线 l 的动直线 L , 使之沿定曲线 C 移动, 由此形成的轨迹称为**柱面**, 其中定曲线 C 称为柱面的**准线**, 动直线 L 称为柱面的**母线**, 如图 1-37 所示.

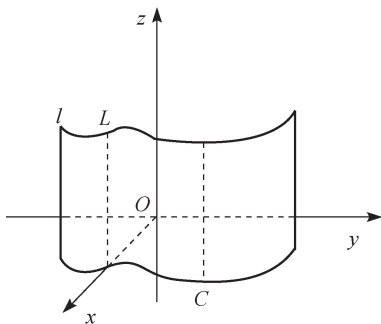


图 1-37

例 5 试讨论方程 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 表示什么样的曲面.

解 方程 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 在平面解析几何中表示 xOy 面上以原点 O 为中心的椭圆曲线. 但在空间直角坐标系中, 此方程表示的应为一个曲面.

事实上, 由于此方程不含竖坐标 z , 则对动点 $M(x, y, z)$, 无论 z 取何值, 只要其横坐标 x 和纵坐标 y 满足此方程, 那么这些点就在此曲面上. 从而可知, 过 xOy 面上的椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上一点 $M(x, y, 0)$ 且平行于 z 轴的直线一定在 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 表示的曲面上, 它相当于由平行于

z 轴的直线 l 沿 xOy 面上的椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 移动而形成, 这个曲面称为椭圆柱面(见图 1-38), xOy 面上的椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 称为它的准线, 平行于 z 轴的直线 l 称为它的母线.

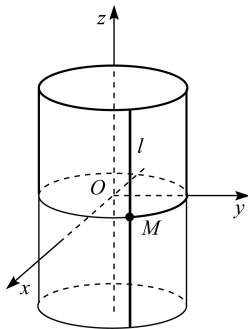


图 1-38

一般地, 只含 x, y 而缺 z 的方程 $F(x, y) = 0$ 在空间直角坐标系中表示母线平行于 z 轴的柱面, 其准线是 xOy 面上的曲线 $F(x, y) = 0$.

例 6 设 $\Gamma: \begin{cases} \varphi(x, y) = 0, \\ z = 0, \end{cases}$ 求以 Γ 作为准线, 母线平行于 z 轴的柱面的方程.

解 在柱面上任意取一点 $M(x, y, z)$, 则点 M 必在某条母线上, 它与 Γ 的交点为 $M_1(x, y, 0)$ (见图 1-39), 从而有 $\varphi(x, y) = 0$, 又由点 M 的任意性, 故曲面上任意一点都满足 $\varphi(x, y) = 0$; 另一方面, 若 $M(x, y, z)$ 满足 $\varphi(x, y) = 0$, 则点 M 必在经过 $(x, y, 0)$ 的母线上, 且 $z = 0$. 故所求柱面方程为 $\varphi(x, y) = 0$.

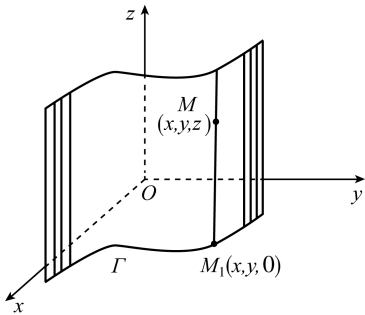


图 1-39

类似地, 只含 x, z 而缺 y 的方程 $G(x, z) = 0$ 和只含 y, z 而缺 x 的方程 $H(y, z) = 0$ 分别表示母线平行于 y 轴和 x 轴的柱面.

例如, $x^2 + y^2 = 4$ 在平面解析几何中表示圆心在原点, 半径为 2 的圆, 在空间解析几何中表示母线平行于 z 轴, 准线为 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ z = 0 \end{cases}$ 的圆柱面. 再如, $y = x + 1$ 在平面解析几何中表示斜率为 1, 截距也为 1 的一条直线, 在空间解析几何中表示平行于 z 轴的平面, 该平面实际上也是一种柱面, 称其为母线平行于 z 轴, 准线为 $\begin{cases} y = x + 1, \\ z = 0 \end{cases}$ 的平柱面.



四、二次曲面

在空间直角坐标系中,若 $F(x, y, z) = 0$ 是一次方程,则它的图形是一个平面,平面也称为一次曲面. 若 $F(x, y, z) = 0$ 是二次方程,则它的图形称为二次曲面.

了解方程 $F(x, y, z) = 0$ 所表示曲面的形状的方法有很多,这里主要应用的方法有两种. 一种方法称为**截痕法**,是用坐标面和平行于坐标面的平面与曲面相截,考察其交线的形状,然后加以综合,从而了解曲面的立体形状. 另一种方法称为**伸缩变形法**. 设 S 是一个曲面,其方程为 $F(x, y, z) = 0$,假如 S' 是将曲面 S 沿 x 轴方向伸缩 λ 倍所得的曲面,显然,若 $(x, y, z) \in S$, 则 $(\lambda x, y, z) \in S'$; 若 $(x, y, z) \in S'$, 则 $(\frac{1}{\lambda}x, y, z) \in S$. 因此,这个对于任意的 $(x, y, z) \in S'$, 有 $F(\frac{1}{\lambda}x, y, z) = 0$, 即 $F(\frac{1}{\lambda}x, y, z) = 0$ 是曲面 S' 的方程.

从几何角度分类,二次曲面共有九种,适当选取空间直角坐标系,可得它们的标准方程. 下面就其标准方程来讨论它们的形状.

1. 椭圆柱面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

表示母线平行于 z 轴的柱面(见图 1-38), 它的准线是 xOy 面上的椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

2. 双曲柱面 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

表示母线平行于 z 轴的柱面(见图 1-40), 它的准线是 xOy 面上的双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

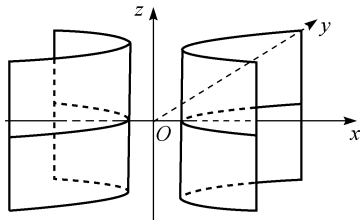


图 1-40

3. 抛物柱面 $x^2 = ay$

表示母线平行于 z 轴的柱面(见图 1-41), 它的准线是 xOy 面上的抛物线 $x^2 = ay$.

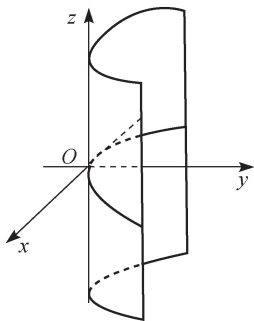


图 1-41

4. 椭圆锥面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2$

首先应用截痕法了解此曲面的特征. 以垂直于 z 轴的平面 $z = t$ 截此曲面, 得一椭圆

$$\frac{x^2}{(at)^2} + \frac{y^2}{(bt)^2} = 1 (t \neq 0),$$

该式表示一族椭圆, 但这些椭圆的长短轴比例不变. 当 $t = 0$ 时, 得一点 $(0, 0, 0)$. 当 $|t|$ 从大到小直至为 0 时, 这族椭圆将从大变到小直至缩为一点. 因此, 椭圆锥面的形状如图 1-42 所示.

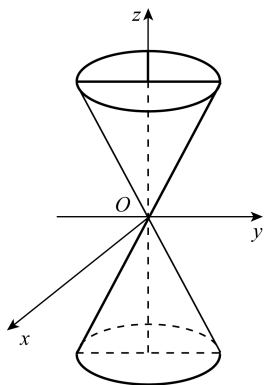


图 1-42

当然, 也可以用伸缩变形法来分析. 把圆锥面 $\frac{x^2 + y^2}{a^2} = z^2$ (见图 1-35) 沿 y 轴方向伸缩 $\frac{b}{a}$ 倍, 所得曲面是椭圆锥面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2$.

5. 椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

用截痕法来讨论这个曲面的形状. 用 xOy 面 $z = 0$ 和平行于 xOy 面的平面 $z = h$ ($|h| \leq c$) 去截曲面, 其截痕分别为椭圆, 且 $|h|$ 由 0 逐渐增大到 c 时, 椭圆由大变小, 逐渐缩为一点. 同样用 zOx 面与平行于 zOx 面的平面去截曲面和用 yOz 面与平行于 yOz 面的平面去截曲面, 它们的交线与上述结果类同. 综上所述, 椭球面的形状如图 1-43 所示.

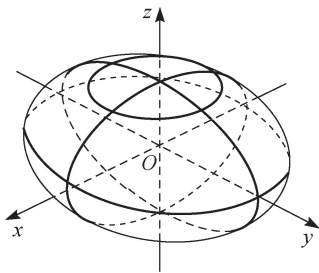


图 1-43



6. 单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

用伸缩变形法来分析. 先将 zOx 面上的双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ 绕 z 轴旋转, 可得旋转单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ [见图 1-36(b)]; 再沿 y 轴方向伸缩 $\frac{b}{a}$ 倍, 即得单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

7. 双叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

用伸缩变形法来分析. 先将 zOx 面上的双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ 绕 x 轴旋转, 可得旋转双叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ [见图 1-36(a)]; 再沿 y 轴方向伸缩 $\frac{b}{c}$ 倍, 即得双叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

8. 椭圆抛物面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$

用截痕法来分析. 用 xOy 面去截曲面, 截痕是一点 $(0, 0)$, 称为椭圆抛物面的顶点. 用平行于 xOy 面的平面 $z = h (h > 0)$ 截此曲面, 其交线为 $z = h$ 平面上的椭圆, 且当 h 增大时, 椭圆的半轴也随着增大. 若用平面 $x = h$ 或 $y = h$ 截曲面, 其交线分别为抛物线. 综上所述, 椭圆抛物面的形状如图 1-44 所示.

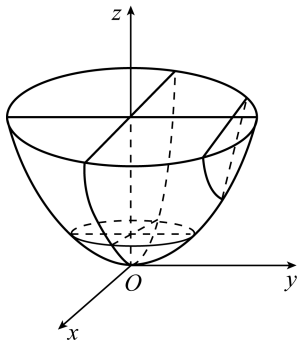


图 1-44

9. 双曲抛物面 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$

用截痕法分析其图形特征. 用平面 $x = t$ 截此曲面, 得一抛物线

$$-\frac{y^2}{b^2} = z - \frac{t^2}{a^2},$$

此抛物线顶点坐标为 $(t, 0, \frac{t^2}{a^2})$, 开口朝下. 当 t 变化时, 抛物线的形状保持不变, 只随顶点的位置变化做平移, 其中抛物线的顶点轨迹为平面 $y = 0$ 上的抛物线 $z = \frac{x^2}{a^2}$. 因此, 双曲面抛物

线的形状如图 1-45 所示,也称为马鞍面.

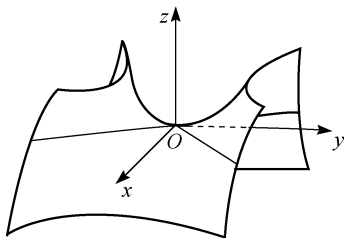


图 1-45

前面提及的旋转曲面中也有二次曲面,如圆锥面、旋转双叶双曲面和旋转单叶双曲面,它们分别是椭圆锥面、双叶双曲面和单叶双曲面的特例.



习题 1.5

1. 已知 $A(1, 2, 3), B(2, -1, 4)$, 求线段 AB 的垂直平分面的方程.

2. 方程 $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z = 0$ 表示什么曲面?

3. 求按如下方法所生成的旋转曲面的方程.

(1) 将 zOx 坐标面上的抛物线 $z^2 = 5x$ 绕 x 轴旋转一周;

(2) 将 zOx 坐标面上的圆 $x^2 + z^2 = 4$ 绕 z 轴旋转一周;

(3) 将 xOy 坐标面上的 $4x^2 - 9y^2 = 36$ 分别绕 x 轴和 y 轴旋转一周.

4. 说明下列旋转曲面是怎样形成的.

(1) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1;$

(2) $x^2 + y^2 - \frac{z^2}{9} = 1;$

(3) $x^2 - y^2 + z^2 = 1;$

(4) $(z - 2)^2 = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}.$

5. 画出下列方程所表示的曲面,并指出其名称.

(1) $9x^2 + y^2 - z^2 = 9;$

(2) $x^2 - 9y^2 - z^2 = 9;$

(3) $\frac{z}{2} = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4};$

(4) $4x^2 - 9y^2 - 16z^2 = -25.$

6. 画出下列方程所表示的曲面所围区域.

(1) 由曲面 $z = 2x^2 + y^2$ 和 $z = 3 - x^2$ 所围成的闭区域;

(2) 由曲面 $cz = xy (c > 0)$ 和 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 所围成的闭区域.

7. 画出下列各方程所表示的曲面,并说明在平面解析几何中和在空间解析几何中它们分别表示什么图形.

(1) $y = -2;$

(2) $x^2 + (y - 6)^2 = 36;$

(3) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1;$

(4) $-\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1;$

(5) $4z = 4 - y^2;$

(6) $y = \frac{1}{x}.$



第六节 空间曲线方程

一、空间曲线及其方程

1. 空间曲线的一般方程

若要确定一条空间曲线的方程,最简单的方法就是把它看作两个曲面的交线. 设

$$F(x, y, z) = 0, G(x, y, z) = 0$$

是两个曲面方程,交线 C 上的点的坐标都应同时满足这两个方程,不在 C 上的点的坐标不能同时满足这两个方程. 因此,联立方程组

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

即为空间曲线 C 的方程,方程组 (1) 称为空间曲线的一般方程.

例 1 方程组 $\begin{cases} z = \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}, \\ x^2 + y^2 = z^2 \end{cases}$ 表示怎样的曲线?

解 方程组中第一个方程表示球心在坐标原点 O 、半径为 $2a$ 的上半球面. 第二个方程表示以 z 轴为旋转轴的圆锥面. 因此方程组就表示上述半球面与圆锥面的交线,交线图形为圆,圆心在点 $(0, 0, \sqrt{2}a)$, 半径为 $\sqrt{2}a$.

2. 空间曲线的参数方程

空间曲线 C 的方程也可以用参数形式表示. 事实上,若动点的坐标 x, y, z 都可表示为参数 t 的函数

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases}$$

这个方程组就称为空间曲线的参数方程.

例 2 若空间一点 M 在圆柱面 $x^2 + y^2 = a^2$ 上以角速度 ω 绕 z 轴旋转,同时又以线速度 v 沿平行于 z 轴的正方向上升(其中 ω, v 都是常数),那么点 M 构成的图形称为螺旋线(见图 1-46). 试建立其参数方程.

解 取时间 t 为参数. 设当 $t = 0$ 时,动点位于 x 轴上的一点 $A(a, 0, 0)$ 处. 经过时间 t ,动点由 A 运动到 $M(x, y, z)$. 记 M 在 xOy 面上的投影为 M' , M' 的坐标为 $(x, y, 0)$. 由于动点在圆柱面上以角速度 ω 绕 z 轴旋转,所以经过时间 t , $\angle AOM' = \omega t$, 从而

$$x = |OM'| \cos \angle AOM' = a \cos \omega t,$$

$$y = |OM'| \sin \angle AOM' = a \sin \omega t.$$

由于动点同时以线速度 v 沿平行于 z 轴的正方向上升,所以

$$z = MM' = vt,$$

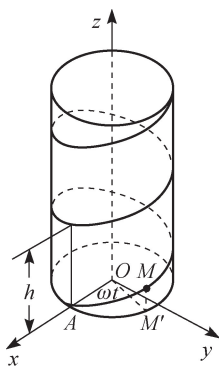


图 1-46

因此螺旋线的参数方程为

$$\begin{cases} x = a \cos \omega t, \\ y = a \sin \omega t, \\ z = vt. \end{cases}$$

也可以用其他变量做参数,如令 $\theta = \omega t$,则螺旋线的参数方程可写为

$$\begin{cases} x = a \cos \theta, \\ y = a \sin \theta, \\ z = b\theta, \end{cases}$$

其中 $b = \frac{v}{\omega}$,而参数为 θ .

下面顺便介绍一下曲面的参数方程.曲面的参数方程通常是含两个参数的方程,形如

$$\begin{cases} x = x(s, t), \\ y = y(s, t), \\ z = z(s, t). \end{cases}$$

比较常用的是旋转曲面的参数方程.已知空间曲线 Γ 的参数方程为

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), (\alpha \leq t \leq \beta), \\ z = \omega(t) \end{cases}$$

则 Γ 绕 z 轴旋转,所得旋转曲面的方程为

$$\begin{cases} x = \sqrt{[\varphi(t)]^2 + [\psi(t)]^2} \cos \theta, \\ y = \sqrt{[\varphi(t)]^2 + [\psi(t)]^2} \sin \theta, (\alpha \leq t \leq \beta, 0 \leq \theta \leq 2\pi). \\ z = \omega(t) \end{cases} \quad (2)$$

这是因为固定一个 t ,得 Γ 上一点 $M_1(\varphi(t), \psi(t), \omega(t))$,点 M_1 绕 z 轴旋转,得空间的一个圆,该圆在平面 $z = \omega(t)$ 上,其半径为点 M_1 到 z 轴的距离 $\sqrt{[\varphi(t)]^2 + [\psi(t)]^2}$,因此,固定 t 的方程 (2) 就是该圆的参数方程.再令 t 在 $[\alpha, \beta]$ 内变动,方程 (2) 便是旋转曲面的方程.



例 3 试将球面方程 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 化为参数方程.

解 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 可看成 zOx 面上的半圆周

$$\begin{cases} x = a \sin \varphi, \\ y = 0, \\ z = a \cos \varphi \end{cases} \quad (0 \leq \varphi \leq \pi)$$

绕 z 轴旋转所得,故球面方程为

$$\begin{cases} x = a \sin \varphi \cos \theta, \\ y = a \sin \varphi \sin \theta, \\ z = a \cos \varphi \end{cases} \quad (0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi).$$

二、空间曲线在坐标面上的投影

以曲线 C 为准线、母线平行于 z 轴的柱面称为曲线 C 关于 xOy 面的**投影柱面**,投影柱面与 xOy 面的交线称为空间曲线 C 在 xOy 面上的**投影曲线**,或简称**投影**.类似地可以定义曲线 C 在其他坐标面上的投影.

在重积分和曲面积分的计算中,常常要确定这样的投影曲线.事实上,往往通过投影柱面的方程来确定投影曲线.

设空间曲线 C 的一般方程为 $\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0, \end{cases}$ 将方程组消去变量 z ,得方程 $H(x, y) = 0$,

这就是曲线 C 关于 xOy 面的投影柱面.

一方面方程 $H(x, y) = 0$ 表示一个母线平行于 z 轴的柱面,另一方面方程 $H(x, y) = 0$ 是由方程组消去变量 z 后所得的方程,因此当 x, y, z 满足方程组时, x, y 必定满足方程 $H(x, y) = 0$,这就说明曲线 C 上的所有点都在方程 $H(x, y) = 0$ 所表示的曲面上,即曲线 C 在方程 $H(x, y) = 0$ 表示的柱面上,所以方程 $H(x, y) = 0$ 表示的柱面就是曲线 C 关于 xOy 面的投影柱面.

曲线 C 在 xOy 面上的投影曲线的方程为

$$\begin{cases} H(x, y) = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

类似地,消去方程组中的 x ,得到在 yOz 面上曲线的投影方程 $\begin{cases} R(y, z) = 0, \\ x = 0; \end{cases}$ 消去 y ,得

到在 zOx 面上曲线的投影方程 $\begin{cases} T(x, z) = 0, \\ y = 0. \end{cases}$

例 4 分别求曲线 $\begin{cases} 2x^2 + y^2 + z^2 = 16, \\ x^2 - y^2 + z^2 = 0 \end{cases}$ 关于 yOz 面和 zOx 面的投影柱面的方程.

解 (1) $\begin{cases} 2x^2 + y^2 + z^2 = 16, \\ x^2 - y^2 + z^2 = 0 \end{cases}$ 中消去 x ,得 $3y^2 - z^2 = 16$,这就是所求母线平行于 x 轴

且通过该曲线的柱面方程,即为 yOz 面上的投影柱面的方程.

$$(2) \begin{cases} 2x^2 + y^2 + z^2 = 16, \\ x^2 - y^2 + z^2 = 0 \end{cases} \text{ 中消去 } y, \text{ 得 } 3x^2 + 2z^2 = 16, \text{ 这就是所求母线平行于 } y \text{ 轴且通}$$

过该曲线的柱面方程,即为 zOx 面上的投影柱面的方程.

例 5 求螺旋线 $\begin{cases} x = a \cos \theta, \\ y = a \sin \theta, \\ z = b\theta \end{cases}$ 在三个坐标面上的投影曲线的方程.

解 (1) 由 $\begin{cases} x = a \cos \theta, \\ y = a \sin \theta \end{cases}$ 得 $x^2 + y^2 = a^2$, 则螺旋线在 xOy 面上投影曲线的方程为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ z = 0. \end{cases}$$

(2) 由 $\begin{cases} y = a \sin \theta, \\ z = b\theta \end{cases}$ 得 $y = a \sin \frac{z}{b}$, 则螺旋线在 yOz 面上的投影曲线的方程为

$$\begin{cases} y = a \sin \frac{z}{b}, \\ x = 0. \end{cases}$$

(3) 由 $\begin{cases} x = a \cos \theta, \\ z = b\theta \end{cases}$ 得 $x = a \cos \frac{z}{b}$, 则螺旋线在 zOx 面上的投影曲线的方程为 $\begin{cases} x = a \cos \frac{z}{b}, \\ y = 0. \end{cases}$

例 6 求上半球 $0 \leq z \leq \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 与圆柱体 $x^2 + y^2 \leq ax$ ($a > 0$) 的公共部分在 xOy 和 zOx 面上的投影(见图 1-47).

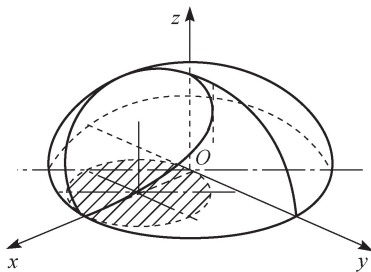


图 1-47

解 (1) 由 $\begin{cases} z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, \\ x^2 + y^2 = ax \end{cases}$ 知, 在 xOy 面上投影曲线的方程为 $\begin{cases} \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}, \\ z = 0, \end{cases}$

从而立体在 xOy 面上的投影为 $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 \leq \frac{a^2}{4}$.

(2) 由 $\begin{cases} z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, \\ x^2 + y^2 = ax \end{cases}$ 知, 在 zOx 面上投影曲线的方程为 $\begin{cases} z^2 + ax = a^2, \\ y = 0, \end{cases}$ 从而立体

在 zOx 面上的投影为 $z^2 + ax \leq a^2, x \geq 0, z \geq 0$.



习题 1.6

1. 以下方程组表示怎样的曲线?

$$(1) \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ 2x + 3y + 3z = 6; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, \\ (x - \frac{a}{2})^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}. \end{cases}$$

2. 试求螺旋线 $\begin{cases} x = a \cos \theta, \\ y = a \sin \theta, \\ z = b\theta \end{cases}$ 的一般方程.

3. 将下列曲线的一般方程化为参数方程.

$$(1) \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9, \\ y = x; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 4, \\ z = 0. \end{cases}$$

4. 求旋转抛物面 $z = x^2 + y^2$ ($0 \leq z \leq 4$) 在三个坐标面上的投影.

5. 求抛物面 $y^2 + z^2 = x$ 与平面 $x + 2y - z = 0$ 的截线在三个坐标面上的投影柱面的方程.

6. 求曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$ 在三个坐标面上的投影曲线的方程.



本章小结

一、基本内容

(1) 本章给出了空间解析几何中的主要概念,包括向量,向量的方向余弦,向量在轴上的投影以及相关的曲面、曲线、平面、直线的方程.平面、直线和曲面的方程如表 1-1 所示.



微课:
空间解析几何与向量代数习题课

表 1-1

平面方程	点法式方程	$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$, 其中 (x_0, y_0, z_0) 为平面上一定点, $\mathbf{n} = (A, B, C)$ 为平面的法向量
	一般方程	$Ax + By + Cz + D = 0$, $\mathbf{n} = (A, B, C)$ 为平面的法向量
	截距式方程	$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, 其中 a, b, c 依次为平面在 x, y, z 轴上的截距
	三点式方程	$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$, 其中 $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2), M_3(x_3, y_3, z_3)$ 为平面上的三点

(续表)

直线方程	点向(对称)式方程	$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$, 其中 (x_0, y_0, z_0) 为直线上一定点, $s = (m, n, p)$ 为直线的方向向量
	参数方程	$x = x_0 + mt, y = y_0 + nt, z = z_0 + pt$, 其中 (x_0, y_0, z_0) 为直线上一定点, $s = (m, n, p)$ 为直线的方向向量
	一般方程	$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases}$ 其中 $n_1 = (A_1, B_1, C_1), n_2 = (A_2, B_2, C_2)$ 分别为两个平面的法向量
曲面方程	旋转曲面方程	$f(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z) = 0$, 曲线 $f(y, z) = 0$ 绕 z 轴旋转; $f(y, \pm\sqrt{x^2+z^2}) = 0$, 曲线 $f(y, z) = 0$ 绕 y 轴旋转. 对于其他坐标面上的曲线, 绕该坐标面上任一坐标轴旋转所生成的旋转曲面方程可用类似方法求得
	柱面方程	$F(y, z) = 0$, 母线平行于 x 轴; $F(x, z) = 0$, 母线平行于 y 轴; $F(x, y) = 0$, 母线平行于 z 轴
	二次曲面方程	包括九种

(2) 掌握两个平面之间、两条直线之间及平面与直线之间的关系.

① 两个平面之间的关系(见表 1-2). 设平面 π_1 的法向量 $n_1 = (A_1, B_1, C_1)$, 平面 π_2 的法向量 $n_2 = (A_2, B_2, C_2)$.

表 1-2

两平面相交	$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ 不成立
两平面垂直	$n_1 \perp n_2 \Leftrightarrow n_1 \cdot n_2 = 0 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$
两平面平行	$n_1 = \lambda n_2 (\lambda \neq 0) \Leftrightarrow n_1 \times n_2 = 0 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} (A_2B_2C_2 \neq 0)$
两平面重合	$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2} (A_2B_2C_2D_2 \neq 0)$

② 两条直线之间的关系(见表 1-3). 设直线 L_1 的方向向量为 $s_1 = (m_1, n_1, p_1)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 为 L_1 经过的一点; 直线 L_2 的方向向量为 $s_2 = (m_2, n_2, p_2)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 为 L_2 经过的一点.

表 1-3

两直线不共面	$ s_1 \times s_2 \neq 0$ 且 $[\overrightarrow{M_1M_2}, s_1, s_2] \neq 0$, 其中 $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$
两直线不共面但相互垂直	$ s_1 \times s_2 \neq 0, [\overrightarrow{M_1M_2}, s_1, s_2] \neq 0, s_1 \cdot s_2 = 0$
两直线垂直相交	$ s_1 \times s_2 \neq 0, [\overrightarrow{M_1M_2}, s_1, s_2] = 0, s_1 \cdot s_2 = 0$
两直线平行	$s_1 \parallel s_2$, 即 $s_1 \times s_2 = 0$
两直线重合	$\overrightarrow{M_1M_2} \parallel s_1 \parallel s_2$



③ 平面与直线之间的关系(见表 1-4). 设平面 $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$, 直线 $L: \frac{x-x_0}{m} =$

$\frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$, 这里 $\mathbf{n} = (A, B, C)$ 为平面的法向量, $\mathbf{s} = (m, n, p)$ 为直线的方向向量.

表 1-4

平面与直线相交 但不垂直	$\mathbf{n} \perp \mathbf{s}, \mathbf{n} \nparallel \mathbf{s}$ 不成立
平面与直线垂直	$\mathbf{n} \parallel \mathbf{s}$, 即 $\mathbf{n} \times \mathbf{s} = \mathbf{0}$
平面与直线平行	$\mathbf{n} \perp \mathbf{s}$, 即 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{s} = 0$
直线在平面上	$\mathbf{n} \cdot \mathbf{s} = 0$ 且 $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, 其中 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 为直线 L 上任意一点

(3) 会求两平面之间、两直线之间及直线与平面间的夹角.

① 平面 π_1 与 π_2 之间的夹角 $\theta (0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$ 满足

$$\cos \theta = |\cos(\widehat{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2})| = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}},$$

其中 $\mathbf{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ 与 $\mathbf{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ 分别为平面 π_1 与 π_2 的法向量.

② 直线 L_1 与直线 L_2 之间的夹角 $\varphi (0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2})$ 满足

$$\cos \varphi = |\cos(\widehat{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2})| = \frac{|m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}},$$

其中 $\mathbf{s}_1 = (m_1, n_1, p_1)$ 与 $\mathbf{s}_2 = (m_2, n_2, p_2)$ 分别为直线 L_1 与直线 L_2 的方向向量.

③ 直线 L 与平面 π 的夹角 $\varphi (0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2})$ 满足

$$\sin \varphi = |\cos(\widehat{\mathbf{s}, \mathbf{n}})| = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}},$$

其中 $\mathbf{s} = (m, n, p)$ 与 $\mathbf{n} = (A, B, C)$ 分别为直线的方向向量与平面的法向量.

(4) 掌握点到平面的距离公式和点到直线的距离公式.

① 点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 到平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 的距离

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

(2) 点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 到直线 $L: \frac{x-x_1}{m} = \frac{y-y_1}{n} = \frac{z-z_1}{p}$ 的距离 $d = \frac{|\overrightarrow{M_0M_1} \times \mathbf{s}|}{|\mathbf{s}|}$,

其中 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 为 L 上任意一点, $\mathbf{s} = (m, n, p)$ 为直线 L 的方向向量.

二、重点

(1) 向量的线性运算、数量积、向量积的概念及坐标表示.

(2) 两个向量垂直和平行的条件.

- (3) 平面方程和直线方程.
 (4) 平面与平面、平面与直线、直线与直线之间位置关系的判定条件.
 (5) 常用二次曲面的方程及其图形.
 (6) 旋转曲面及母线平行于坐标轴的柱面方程.

三、难点

- (1) 向量积的概念及坐标表示.
 (2) 空间曲线在坐标面上的投影柱面和投影曲线的方程.
 (3) 二次曲面的图形.

第一章 复习题

1. 设 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 为非零向量, 下列各式在什么条件下成立?
 (1) $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$; (2) $(\mathbf{a} + \mathbf{b})(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2$;
 (3) $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|$; (4) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times \mathbf{a} - \mathbf{b} \times \mathbf{b}$.
2. 设 $(\mathbf{a} + 3\mathbf{b}) \perp (7\mathbf{a} - 5\mathbf{b}), (\mathbf{a} - 4\mathbf{b}) \perp (7\mathbf{a} - 2\mathbf{b})$, 求 $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})$.
3. 设 $\mathbf{a} = (1, 4, 5), \mathbf{b} = (1, 1, 2)$.
 (1) 求 $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b})$;
 (2) 求 λ , 使 $\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$ 垂直于 $\mathbf{a} - \lambda\mathbf{b}$.
4. 设 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 为非零向量, 且 $\mathbf{a} = \mathbf{b} \times \mathbf{c}, \mathbf{b} = \mathbf{c} \times \mathbf{a}, \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$, 求 $|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| + |\mathbf{c}|$.
5. 设 $|\mathbf{a}| = 4, |\mathbf{b}| = 3, (\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = \frac{\pi}{6}$, 求以 $\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$ 和 $\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$ 为边的平行四边形的面积.
6. 已知点 $A(1, 0, 0)$ 和点 $B(0, 2, 1)$, 试在 z 轴上求一点 C , 使 $\triangle ABC$ 的面积最小.
7. 设向量 $\mathbf{a} = (1, 1, 1), \mathbf{b} = (1, 2, 1), \mathbf{c} = (1, 1, 2), \mathbf{h} = (3, 2, 1)$. $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 是否共面? 并求 x, y, z , 使 $\mathbf{h} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c}$.
8. 求直线 $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$ 在平面 $x - y + 2z - 1 = 0$ 上的投影直线 L_0 的方程, 并求 L_0 绕 y 轴旋转一周所成的曲面的方程.
9. 求顶点在原点, 准线为 $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{8} + \frac{z^2}{3} = 1, \\ y = 2 \end{cases}$ 的锥面的方程.
10. 求过直线 $L_1: \frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{2}$ 和 $L_2: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{1}$ 的平面的方程.
11. 求曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ 的参数方程.
12. 求两球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 和 $x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$ 的交线 L 在 xOy 面上的投影.
13. 求 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 与 $x^2 + y^2 + (z-R)^2 = R^2$ 所围立体在 xOy 面上的投影.



14. 求直线 $\begin{cases} 2x - 4y + z = 0, \\ 3x - y - 2z - 9 = 0 \end{cases}$ 在平面 $4x - y + z = 1$ 上的投影直线的方程.

15. 求过点 $M(1, 2, 5)$ 且与直线 $L_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-5}{2}$ 相交, 并和向量 $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$ 成 $\frac{\pi}{4}$ 角的直线 L 的方程.

16. 平面过 z 轴, 且与平面 $2x + y - \sqrt{5}z = 0$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$, 求此平面的方程.

17. 设一平面垂直于平面 $z = 0$, 并通过从点 $(1, -1, 1)$ 到直线 $\begin{cases} y - z + 1 = 0, \\ x = 0 \end{cases}$ 的垂线, 求此平面的方程.

18. 在一切过直线 $L: \begin{cases} x + y + z + 1 = 0, \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$ 的平面中找出平面 π , 使原点到它的距离为最长.

19. 求过直线 $L: \begin{cases} x + 28y - 2z + 17 = 0, \\ 5x + 8y - z + 1 = 0 \end{cases}$ 且与球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 相切的平面的方程.

20. 求直线 $L_1: \frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-7}{1}$ 和 $L_2: \begin{cases} x = z, \\ y = -6z - 7 \end{cases}$ 之间的距离.

21. 已知直线 $L: \frac{x+2}{1} = \frac{y-2}{7} = \frac{z}{5}$, 求

(1) L 在平面 $z = 1$ 上的投影 L_1 的方程;

(2) 点 $M(1, 2, 1)$ 到 L_1 的距离.

22. 画出下列曲面所围的立体图形.

(1) $x = 0, y = 0, z = 0, x^2 + y^2 = R^2, y^2 + z^2 = R^2$ (在第 I 卦限内);

(2) 半径为 a 的球面与半顶角为 α 的锥面所围成的立体;

(3) 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 与抛物面 $x^2 + y^2 = 3z$ 所围成的在抛物面内的那一部分;

(4) 曲线 $y^2 = 2z, x = 0$ 绕 z 轴旋转一周而成的曲面与平面 $z = 2, z = 8$ 所围的立体.



数学家简介

华罗庚(1910—1985), 数学家, 中国科学院院士. 华罗庚主要从事解析数论、矩阵几何学、典型群、自守函数论、多复变函数论、偏微分方程、高维数值积分等领域的研究, 他解决了高斯完整三角和的估计难题、华林和塔里问题改进、一维射影几何基本定理证明、近代数论方法应用研究等问题, 国际上以华氏命名的数学科研成果有“华氏定理”“华氏不等式”“华-王方法”等.