主编　唐晓玲　宿　昱

高等数学
——应用案例实践教程

Advanced mathematics

教育科学出版社
ESPH Educational Science Publishing House

高等数学——应用案例实践教程

主编　唐晓玲　宿　昱

教育科学出版社
ESPH

高等数学
——应用案例实践教程

Advanced mathematics

定价：55.00元

ISBN 978-7-5191-3235-4

9 787519 132354 >

出 版 人：郑豪杰
责任编辑：王玉栋
封面设计：刘文东

高等数学

——应用案例实践教程

主　编　唐晓玲　宿　昱
副主编　文秋利
参　编　邵伟如　李桂亭
　　　　宋爱荣　杨　玲
　　　　王志英　班云飞
主　审　赖秀兰

教育科学出版社
·北　京·

出 版 人　郑豪杰
责任编辑　王玉栋
责任校对　贾静芳
责任印制　叶小峰

图书在版编目（CIP）数据

高等数学：应用案例实践教程 / 唐晓玲，宿昱主编. — 北京：教育科学出版社，2022.9（2025.1 重印）
ISBN 978-7-5191-3235-4

Ⅰ.①高…　Ⅱ.①唐… ②宿…　Ⅲ.①高等数学　Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2022）第 159619 号

高等数学——应用案例实践教程
GAODENG SHUXUE——YINGYONG ANLI SHIJIAN JIAOCHENG

出版发行	教育科学出版社		
社　　址	北京·朝阳区安慧北里安园甲 9 号	邮　　编	100101
总编室电话	010-64981290	编辑部电话	010-64981329
出版部电话	010-64989487	市场部电话	010-64989009
传　　真	010-64891796	网　　址	http：//www.esph.com.cn
经　　销	各地新华书店		
印　　刷	三河市龙大印装有限公司		
制　　作	华腾教育排版中心		
开　　本	850 毫米×1 168 毫米 1/16	版　　次	2022 年 9 月第 1 版
印　　张	18.5	印　　次	2025 年 1 月第 2 次印刷
字　　数	480 千	定　　价	55.00 元

前言 PREFACE

高等数学是高等职业院校各专业学生的公共基础课，其思想和方法广泛应用于科学技术、社会经济等领域，是学生学习各专业知识的重要基础和解决各种专业问题的重要工具，能够培养学生的分析能力，锻炼学生的理性思维，对学生的专业学习、能力提高和职业发展有着极其重要的作用.

本书依据教育部印发的《高等学校课程思政建设指导纲要》的要求，结合信息时代的特点和数学教育发展的需求进行编写. 本书不刻意强调内容的专业性，尽量避免枯燥或繁杂的数学推导，充分展示数学与生活及专业密切相关的案例，使学生能够享受数学之美，厚积数学文化，提升数学素养. 本书既可供高等职业院校各专业的高等数学课程教学使用，也可作为相关人士学习数学的参考用书.

本书共分为八章，主要包括函数、极限和连续，导数与微分，导数的应用，不定积分，定积分，常微分方程，多元函数微积分，线性代数. 全书建议讲授 120～140 学时.

本书具有以下编写特色.

1. 立德树人，有效融入思政元素

为贯彻执行《高等学校课程思政建设指导纲要》的要求，推进习近平新时代中国特色社会主义思想进课程教材，本书在编写过程中融入了思政相关元素，通过鲜活的实例传递中国力量、文化自信和科学精神. 本书不仅在知识点的讲解过程中穿插思政点，而且在每章的后面设置了“思政园地”栏目，将科学精神与人文精神相融合，让数学中的德育元素成为学生做人做事的动力源泉，培养学生的家国情怀、人文精神和美好道德情操等.

2. 内容安排坚持知识传授、价值塑造、能力培养相结合的原则

本书充分考虑学生的认知规律，由浅入深、由易到难、由具体到一般，在不同层次上反复循环讲解知识，着重阐明重要的数学方法和数学思想.

3. 结构安排合理，注重实际应用

本书每节都设置了“案例引入”“案例分析”“案例解决”栏目，案例内容贴近生活，可以在调动学生主观能动性的同时激发学生深入学习数学知识的兴趣，从而获得解决问题的能力. 在例题和习题的安排上，本书着重体现数学的应用性和实用性，拓宽学生的数学视野，强化学生学以致用的能力，突出学生的科学创新意识，逐步锻炼学生的数学思维能力和应用数学能力；采取多梯度安排习题的方式，每章习题和复习题均分 A(基础题)、B(提高题)两套，可供学生进行自我检测和复习.

4. 体现时代特征，将数学与现代信息技术相结合

本书在每章的后面都设置了“数学实验”栏目，依托 MATLAB 平台将计算机软件作为学习、

研究和应用数学的工具，系统介绍数学软件的使用方法，以及实际问题的建模和计算方法，引导学生运用信息化手段加强对数学理论的理解.

5. 教学资源丰富，打造融媒体教材

借助先进技术，将本书打造成为融媒体教材. 本书不仅含有微课二维码资源，而且配有内容丰富的教学资料包，可以为师生提供混合式教学服务；通过运用多媒体等现代化的教学手段，有效提高教学质量. 同时，为了辅助教学和做好与初等数学的衔接，我们还对常用初等数学公式进行了总结.

图文
常用初等数学公式

本书由北京交通运输职业学院唐晓玲、宿昱担任主编，由北京交通运输职业学院文秋利担任副主编，北京交通运输职业学院邵伟如、李桂亭、宋爱荣、杨玲、王志英、班云飞参与了编写工作. 全书由唐晓玲、文秋利统稿，由中国人民大学数学科学研究院赖秀兰副教授主审.

由于编者水平有限，书中难免存在疏漏和不足之处，敬请广大读者批评指正.

编　者

目录 CONTENTS

第一章

函数、极限和连续

知识结构图

- 函数、极限和连续
  - 函数
    - 函数的概念
      - 定义域
        - 求函数的定义域
      - 对应法则
        - 分段函数
      - 值域
        - 函数值
    - 函数的性质
      - 奇偶性
      - 单调性
      - 周期性
      - 有界性
    - 反函数
      - 求反函数
    - 初等函数
      - 复合函数
        - 复合与分解
      - 基本初等函数的概念
        - 分类与性质
      - 初等函数的概念
    - 建立函数模型
  - 极限
    - 数列的极限
      - 概念与判断
      - 收敛与发散
    - 函数的极限
      - 概念与性质
      - 左（右）极限的概念
    - 函数极限的求法
      - 极限运算法则的应用
      - 两个重要极限的应用
      - 未定式处理
    - 无穷小与无穷大
      - 定义、性质和关系
      - 无穷小的比较
  - 连续
    - 函数连续
      - 连续函数和初等函数的连续性
      - 分段函数连续性的判定
      - 闭区间上连续函数的性质
    - 间断点的类型
      - 第一类
        - 可去间断点
        - 跳跃间断点
      - 第二类

函数是微积分研究的对象，是刻画变量关系的数学模型，也是最重要的数学概念之一. 本章将在中学数学讲解的函数知识基础上，介绍函数的概念、函数的性质、反函数、复合函数、初等函数等，之后将进一步研究函数自变量在按某种方式变化的过程中，因变量的变化趋势，从而引出极限的概念. 极限不仅是微积分的基石，还是高等数学理论研究的基础，其思想和方法贯穿整个微积分的学习. 连续函数是微积分研究的主要对象.

学习目标

- 理解函数的概念，会求函数的定义域、函数值，能够判断函数是否具有奇偶性、单调性、周期性和有界性.
- 了解反函数、复合函数的概念，会求简单函数的反函数，能够分析复合函数的复合结构.
- 掌握基本初等函数的图像及性质，理解初等函数的概念，会建立简单实际问题的函数模型.
- 理解极限的概念，能够利用图像法和列表法判断极限是否存在.
- 掌握极限的四则运算法则，会用两个重要极限公式求极限.
- 了解无穷小、无穷大的概念及其相互关系和性质，能够利用等价无穷小求函数极限.
- 理解函数在一点处连续的概念，知道间断点的分类，了解初等函数的连续性及连续函数在闭区间上的性质.
- 了解 MATLAB 的基本命令，能够利用 MATLAB 解决函数与极限的相关问题.
- 能够认识到数学既来源于实践又服务于实践，树立辩证唯物主义世界观，形成做事脚踏实地、持之以恒、思维严谨、工作求实的作风，增强“四个自信”和爱国主义情怀，树立民族自豪感.

第一节 函 数

案例引入

有一种速度叫作中国速度，有一种奇迹叫作中国奇迹！中国近些年的发展速度在世界上是首屈一指的，如基础设施建设、军备研发、经济发展、科技创新等. 看速度，中国高铁领先全球. 2010 年 12 月 3 日，在京沪高铁枣庄至蚌埠间的先导段联调联试和综合试验中，国产“和谐号”CRH380A 新一代高速动车组的最高运行速度达到 486.1 km/h，再次刷新了世界铁路运营实验最高速度，演绎了“高铁奇迹”.

已知甲、乙两地准备开通全线长 1 750 km 的高铁，在运行中，高铁每小时所需的能源费用 W（万元）与速度 V(km/h)的立方成正比，当速度为 100 km/h 时，能源费用为 0.06 万元/h，其余费用（与速度无关）为 3.24 万元/h. 若该高铁的最高运行速度不超过 C(km/h)（C 为常数，$0<C\leqslant 400$），求全程总费用关于速度的函数关系式.

案例分析

设全程总费用为 F，它和速度 V 都是变量，F 随着 V 的变化而变化，它们之间的变化关系即函数. 自然界中没有绝对静止或孤立的事物，函数能准确刻画事物或各因素之间的相依关系，函数是揭示事物发展规律、对事物进行分析和研究的重要基础.

一、函数的概念

定义 1-1 若 D 是一个非空实数集合，设有一个对应法则 f，若每一个 $x(x\in D)$，都有一个确定的实数 y 与之对应，则称这个对应法则 f 为定义在 D 上的一个函数关系，或称变量 y 是变量 x 的函数，记作 $y=f(x),x\in D$. 其中 x 称为自变量，y 称为因变量（函数），集合 D 称为函数的定义域.

若 $x_0\in D$，则称函数 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处有定义. x_0 所对应的 y 值，记作 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$，称为当 $x=x_0$ 时，函数 $y=f(x)$ 的函数值. 全体函数值的集合 $\{y\,|\,y=f(x),x\in D\}$，称为函数 $y=f(x)$ 的值域，记作 M.

注意 函数的定义域和对应法则是确定函数关系的两个要素.

【例 1】 求函数 $f(x)=\dfrac{1}{\lg(3x-2)}$ 的定义域.

图文
函数的由来

分析 定义域为自变量 x 的取值范围. 一般情况下，当函数为偶次根式时，被开方式必须大于或等于零；当函数为分式时，分母不等于零；当函数为对数式时，真数必须大于零.

解 给定函数的定义域要求满足 $\begin{cases}3x-2>0,\\3x-2\neq 1,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x>\dfrac{2}{3},\\x\neq 1.\end{cases}$ 因此，$f(x)=\dfrac{1}{\lg(3x-2)}$ 的定义域为 $D=\left(\dfrac{2}{3},1\right)\cup(1,+\infty)$.

【例 2】 已知 $f(x)=x^2$，求 $f(0),f(a),f(x+2),f[f(x)]$.

分析 将自变量 x 的值代入函数解析式，即可求得函数值.

解 $f(0)=0^2=0,f(a)=a^2,f(x+2)=(x+2)^2=x^2+4x+4,f[f(x)]=[f(x)]^2=(x^2)^2=x^4$.

除以上函数外，还有一类函数会因为自变量的取值范围不同对应不同的解析式. 例如，我们熟悉的函数 $y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\-x, & x<0,\end{cases}$ 它的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，当 $x\in[0,+\infty)$ 时，对应的函数值由 $f(x)=x$ 确定；当 $x\in(-\infty,0)$ 时，对应的函数值由 $f(x)=-x$ 确定，我们将此类函数称作分段函数.

定义 1-2 在自变量的不同变化范围内，对应法则用不同解析式表示的函数叫作分段函数.

注意 分段函数是一个函数，而不是几个函数；分段函数的定义域是各段函数定义域的并集，值域是各段函数值域的并集.

【例 3】 已知 $f(x)=\begin{cases}2x-1, & x\leqslant 0,\\x^2, & x>0.\end{cases}$

(1)求函数的定义域；　(2)求 $f(2),f(0),f(-1)$ 的值；　(3)作出函数的图像.

解 (1)函数的定义域为 $(-\infty,0]\cup(0,+\infty)=(-\infty,+\infty)$.

(2)因为 $2\in(0,+\infty)$，所以 $f(2)=2^2=4$；因为 $0\in(-\infty,0]$，所以 $f(0)=2\times 0-1=-1$；因为 $-1\in(-\infty,0]$，所以 $f(-1)=2\times(-1)-1=-3$.

(3)如图 1-1 所示，在同一个直角坐标系中，在 $(-\infty,0]$ 内，作出函数 $y=2x-1$ 的图像；在 $(0,+\infty)$ 内，作出函数 $y=x^2$ 的图像.

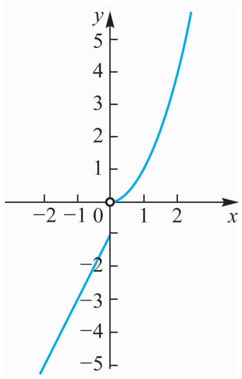

图 1-1

二、函数的性质

1. 奇偶性

定义 1-3 设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，对于任何 $x\in D$，如果 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数；如果 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数.

从几何意义上看，偶函数的图像关于 y 轴对称[图 1-2(a)]，奇函数的图像关于原点对称[图 1-2(b)].

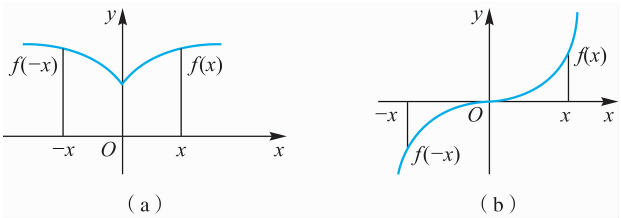

图 1-2

微课
函数的奇偶性和单调性

如果一个函数是奇函数或偶函数，则称这个函数具有奇偶性. 不具有奇偶性的函数叫作非奇非偶函数.

2. 单调性

定义 1-4　设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有意义，对于任意的 $x_1,x_2\in(a,b)$，如果当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)<f(x_2)$ 成立，那么函数 $f(x)$ 叫作区间 (a,b) 内的增函数，区间 (a,b) 叫作函数 $f(x)$ 的单调增区间，如图 1-3(a)所示；如果当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)>f(x_2)$ 成立，那么函数 $f(x)$ 叫作区间 (a,b) 内的减函数，区间 (a,b) 叫作函数 $f(x)$ 的单调减区间，如图 1-3(b)所示.

如果函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内是增函数(或减函数)，那么称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内具有单调性，区间 (a,b) 叫作函数 $f(x)$ 的单调区间.

注意　函数的单调性可以通过观察函数的图像来判定，也可以用单调性的定义来判定.

3. 周期性

定义 1-5　对于函数 $y=f(x)$，如果存在正数 T，使 $f(x)=f(x+T)$ 恒成立，则称函数 $y=f(x)$ 为周期函数，函数图像如图 1-4 所示. 满足这个等式的最小正数 T 称为函数的周期.

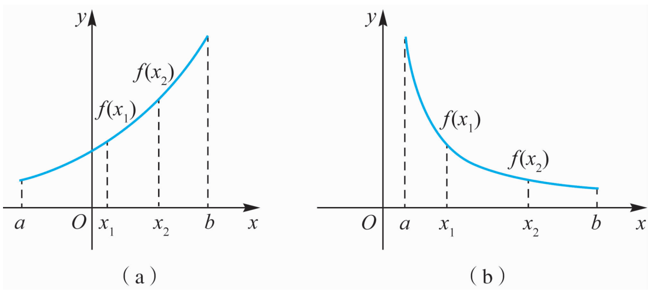

图 1-3

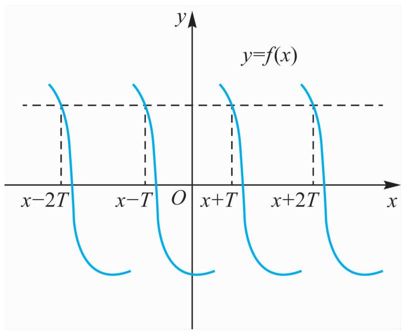

图 1-4

例如，函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 是以 2π 为周期的周期函数，函数 $y=\tan x$，$y=\cot x$ 是以 π 为周期的周期函数. 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$，$y=A\cos(\omega x+\varphi)$ 是以 $\frac{2\pi}{|\omega|}$ 为周期的周期函数，函数 $y=A\tan(\omega x+\varphi)$，$y=A\cot(\omega x+\varphi)$ 是以 $\frac{\pi}{|\omega|}$ 为周期的周期函数.

4. 有界性

定义 1-6　设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，(a,b) 可以是函数 $f(x)$ 的整个定义域，也可以是函数 $f(x)$ 定义域的一部分. 如果存在一个正数 M，对于所有的 $x\in(a,b)$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内有界. 否则，则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内无界.

例如，函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界函数，因为对于任意实数 x，恒有 $|\sin x|\leqslant 1$，$|\cos x|\leqslant 1$；函数 $y=\frac{1}{x}$ 在 $(0,2)$ 内无界，在 $[1,+\infty)$ 内有界.

图文
函数性质的典型例题

三、反函数

微课
反函数

如果某种商品的销售总收益为 y，销售量为 x. 已知该商品的单价为 a，对每一个给定的销售量 x，可以通过 $y=ax$ 确定销售总收益 y，这种由销售量确定销售总收益的关系称为销售总收益是销售量的函数. 反过来，对每一个给定的销售总收益 y，可以由 $x=\frac{y}{a}$ 确定销售量 x，这种由销售总收益确定销售量的关系称为销售量是销售总收益的函数. 我们称函数 $x=\frac{y}{a}$ 是函数 $y=ax$ 的反函数，或者说它们互为反函数.

定义 1-7 设 $y=f(x)$ 是定义在 D 上的函数，它的值域是 M. 如果对于每一个 $y\in M$，都有一个确定的 $x\in D$ 与之对应，其对应法则记作 f^{-1}，这个定义在 M 上的函数 $x=f^{-1}(y)$ 称为 $y=f(x)$ 的反函数，或称它们互为反函数.

对于函数 $y=f(x)$，x 为自变量，y 为因变量，定义域为 D，值域为 M.

对于函数 $x=f^{-1}(y)$，y 为自变量，x 为因变量，定义域为 M，值域为 D.

由于习惯上用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，因此，我们将 $x=f^{-1}(y)$ 改写成以 x 为自变量，y 为因变量的函数关系 $y=f^{-1}(x)$，这时称 $y=f^{-1}(x)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数.

注意 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图像是关于直线 $y=x$ 对称的，如图 1-5 所示.

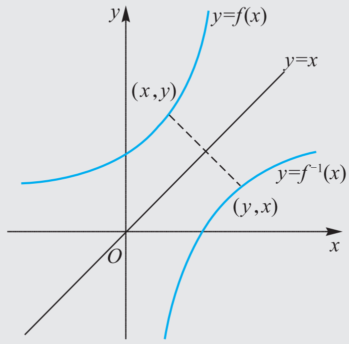

图 1-5

四、初等函数

微课
复合函数

1. 复合函数

在许多问题中，常常遇到由几个较简单的函数组合成较复杂函数的情况. 例如，函数 $y=e^u$，$u=-x^2$，用 $u=-x^2$ 代替 $y=e^u$ 中的 u，得到 $y=e^{-x^2}$，这样函数 $y=e^{-x^2}$ 就可以看成由函数 $y=e^u$ 和 $u=-x^2$ 复合而成的函数.

定义 1-8 设 y 是变量 u 的函数 $y=f(u)$，而 u 又是变量 x 的函数 $u=\varphi(x)$，且 $\varphi(x)$ 的函数值的全部或部分使 $f(u)$ 有意义，那么 y 通过 u 的联系而成为 x 的函数，叫作由 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 复合而成的函数，简称复合函数，记作 $y=f[\varphi(x)]$. 其中，u 叫作中间变量.

【例 4】 将 y 表示成 x 的函数，并且求出函数的定义域.

(1) $y=\sqrt{u}$，$u=1-x$； (2) $y=\ln u$，$u=1+x$； (3) $y=e^u$，$u=\frac{1}{x}$； (4) $y=u^2$，$u=\sin v$，$v=\frac{x}{2}$.

解 (1) 由 $y=\sqrt{u}$，$u=1-x$，得复合函数 $y=\sqrt{1-x}$. 由 $1-x\geqslant 0$，得 $x\leqslant 1$，所以函数的定义域为 $(-\infty,1]$.

(2) 由 $y=\ln u$，$u=1+x$，得复合函数 $y=\ln(1+x)$. 由 $1+x>0$，得 $x>-1$，所以函数的定义域为 $(-1,+\infty)$.

(3)由 $y=e^u$，$u=\dfrac{1}{x}$，得复合函数 $y=e^{\frac{1}{x}}$. 显然 $x\neq 0$，所以函数的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

(4)由 $y=u^2$，$u=\sin v$，$v=\dfrac{x}{2}$，得复合函数 $y=\sin^2\dfrac{x}{2}$，易得函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$.

由例 4 可知，复合函数的中间变量可以是多个. 利用复合函数的概念可以将一个比较复杂的函数看成由几个简单函数复合而成，这样更便于对函数进行研究.

【例 5】 写出下列复合函数的复合过程.

(1)$y=(1+x)^2$；　(2)$y=\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)$；　(3)$y=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$；　(4)$y=e^{\sin\frac{1}{x}}$.

分析　准确分解复合函数成一系列简单函数是微积分计算的基础. 其基本方法是由外向内顺序拆开，使拆开后的函数都是基本初等函数，或是由基本初等函数经过四则运算构成的简单函数.

解　(1)函数 $y=(1+x)^2$ 是由 $y=u^2$，$u=1+x$ 复合而成的.

(2)函数 $y=\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)$是由 $y=\sin u$，$u=3x+\dfrac{\pi}{4}$复合而成的.

(3)函数 $y=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$是由 $y=\lg u$，$u=\dfrac{1-x}{1+x}$复合而成的.

(4)函数 $y=e^{\sin\frac{1}{x}}$是由 $y=e^u$，$u=\sin v$，$v=\dfrac{1}{x}$复合而成的.

2. 基本初等函数和初等函数的概念

定义 1-9　幂函数、指数函数、对数函数、三角函数及反三角函数统称基本初等函数.

定义 1-10　由基本初等函数与常数经过有限次的有理运算(加、减、乘、除、有理数次乘方、有理数次开方)及有限次复合运算得到的，并且能用一个解析式表示的函数叫作初等函数.

图文
基本初等函数的图像及性质

例如，$y=|x-1|=\sqrt{(x-1)^2}$，$y=2^x\sin x$，$y=\arccos\dfrac{1}{x}$，$y=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})$，$y=x\ln(1+x^2)$，$y=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$等都是初等函数.

注意　并非所有的函数都是初等函数，分段函数一般不是初等函数.

五、建立函数模型

微课
建立函数模型

运用数学工具解决实际问题，往往需要找出问题中变量之间的函数关系. 一般地，建立函数模型的具体步骤如下：

(1)分析问题中哪些是变量，哪些是常量，分别用字母表示.

(2)根据所给条件，运用数学、物理、经济及其他专业知识确定等量关系.

(3)写出具体解析式 $y=f(x)$，并指明其定义域.

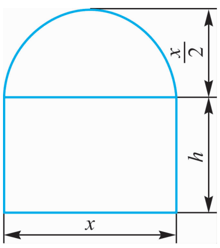

图 1-6

【例 6】 一下水道的截面是矩形加半圆形(图 1-6)，截面积为 A，A 是一常量，这个常量取决于预定的排水量. 设截面的周长为 s，底宽为 x，试建立 s 与 x 的函数模型.

解　设矩形的高为 h，根据等量关系写出关系式为

$$s=x+2h+\frac{1}{2}\pi x \tag{1-1}$$

显而易见，在式(1-1)中有 x，h 两个变量. 由于应把 s 表示为 x 的一元函数，因此需把变量 h 也表示成与 x 有关的量.

因为截面积为 A，所以可建立 x 与 h 的关系为 $A=xh+\dfrac{1}{2}\pi\left(\dfrac{x}{2}\right)^2$，即

$$h=\frac{A}{x}-\frac{1}{8}\pi x \tag{1-2}$$

将式(1-2)代入式(1-1)得到 s 与 x 的函数模型为 $s=\left(1+\frac{\pi}{4}\right)x+\frac{2A}{x}(x>0)$.

【例 7】 乘坐火车时收取行李费的规定:当行李重量不超过 50 kg 时,按基本运费计算,如从重庆到上海每千克收取 0.3 元;当超过 50 kg 时,超重部分按每千克 0.5 元收费. 试求行李费 y(元)与重量 x(kg)之间的函数关系式,并画出这个函数的图像.

解 当行李重量 $x\leqslant 50$ kg 时,行李费 $y=0.3x$;当行李重量 $x>50$ kg 时,行李费 $y=0.3\times50+(x-50)\times0.5=0.5x-10$.

所以行李费 y(元)与重量 x(kg)之间的函数关系为

$$y=\begin{cases}0.3x, & 0<x\leqslant 50,\\ 0.5x-10, & x>50\end{cases}$$

函数的图像如图 1-7 所示.

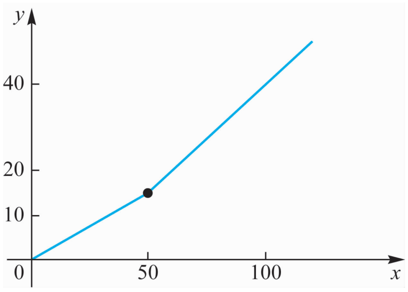

图 1-7

案例解决

已知每小时能源费用 W 和速度 V 的立方成正比,即 $W=kV^3$,其中 $k>0$. 当 $V=100$ km/h 时,$W=0.06$ 万元/h. 由 $0.06=k\cdot100^3$ 得 $k=6\times10^{-8}$. 因此,$W=6\times10^{-8}V^3$.

因为 $V\leqslant C$,$0<C\leqslant400$,所以 $0<V\leqslant400$.

由线路全长为 1 750 km,知高铁运行时间为 $\frac{1\,750}{V}$(h). 因此,能源费用为

$$W\frac{1\,750}{V}=6\times10^{-8}V^3\frac{1\,750}{V}=1.05\times10^{-4}V^2(\text{万元})$$

又知与速度无关的其他费用为 3.24 万元/h,所以其他费用为 $3.24\times\frac{1\,750}{V}=\frac{5\,670}{V}$(万元).

设全程总费用为 F,则有

$$\begin{aligned}F&=\text{能源费用}+\text{其他费用}\\&=1.05\times10^{-4}V^2+\frac{5\,670}{V}=\frac{5\,670+0.000\,105V^3}{V}(\text{万元})\end{aligned}$$

故全程总费用关于速度的函数关系式为 $F=\frac{5\,670+0.000\,105V^3}{V}$(万元),其中 $0<V\leqslant400$.

习题 1-1

A 组

1. 确定下列函数的定义域.

(1) $y=\sqrt{9-x^2}$; (2) $y=\frac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$;

(3) $y=\frac{-5}{x^2+4}$; (4) $y=\frac{\lg(3-x)}{\sqrt{|x|-1}}$.

2. 已知 $f(x)=x^2-3x+2$,求 $f(0)$,$f(2)$,$f\left(\frac{1}{x}\right)(x\neq0)$,$f(x+1)$.

3. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2-1, & 0\leqslant x<1,\\ x+3, & x\geqslant1.\end{cases}$

(1)求函数的定义域;(2)求 $f\left(\frac{1}{2}\right)$,$f(1)$,$f(2)$;(3)作出函数的图像.

4. 把下列各题中的 y 表示为 x 的函数,并且指明函数的定义域.

(1) $y=u^2$,$u=\sin x$; (2) $y=\sqrt{u}$,$u=1+2v$,$v=\ln x$;

(3) $y=\arcsin u$,$u=\sqrt{v}$,$v=1+x$.

5. 分解下列复合函数.

(1) $y=\cos\sqrt{x}$; (2) $y=\sqrt[3]{(1+2x)^2}$;

(3) $y=\log_3 \sin x$；　　(4) $y=\arcsin\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{3}\right)$；

(5) $y=\tan^2 x$；　　(6) $y=e^{3x-1}$.

6. 收音机每台售价 90 元，成本为 60 元. 厂家为鼓励销售商大量采购，规定凡是订购量超过 100 台以上的，每多订购一台，售价就降低 1 分，但最低价为 75 元/台. 例如，某商行订购了 300 台，订购量比 100 台多了 200 台，于是每台就降价 $0.01\times200=2$(元)，所以商行可以按 88 元/台的价格购进 300 台.

(1)将每台的实际售价 p 表示为订购量 x 的函数；(2)将厂家所获的利润 p 表示成订购量 x 的函数；(3)某一商行订购了 1 000 台，厂家可获利润多少？

7. 有一个边长为 a 的正方形铁片，从它的四个角截去同样的小方块，然后折起各边做成一个无盖的方盒子. 求它的容积与截去的小方块的边长之间的函数关系，并且指明定义域.

B　组

1. 脉冲发生器产生一个单三角脉冲，如图 1-8 所示. 写出电压 U 与时间 t 的函数关系式.

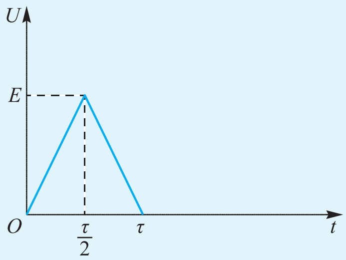

图 1-8

2. 将直径为 d 的圆木料锯成截面为矩形的木材，如图 1-9 所示. 试列出矩形截面两条边之间的函数关系.

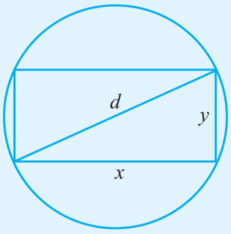

图 1-9

3. 一种曲柄连杆机构(图 1-10)，当主动轮转动时，连杆 AB 带动滑块 B 做往复直线运动. 设主动轮的半径为 r，转动角速度 ω 为常数，连杆的长度为 l. 求滑块 B 的运动方程(时间单位为 s，长度单位为 m).

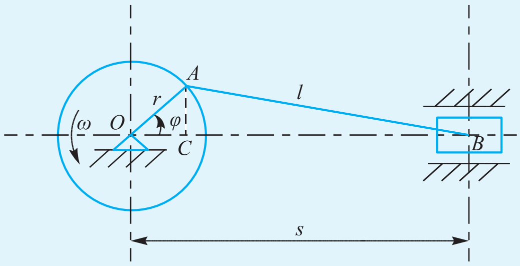

图 1-10

4. 某市出租汽车的计费方法：白天(早 5:00—晚 22:59)起步价 10 元(3 km 以内)，3 km～<15 km 的公里数按每公里 2 元计费；≥15 km 的公里数按每公里 3 元计费(每公里加收 50%空驶费). 夜间(晚 23:00—早 4:59)起步价 11 元(3 km 以内)，其他计费方法同上，但是每公里另加收 20%的夜间费用(不含起步价 11 元).

(1)试建立白天乘客应付的费用 y(单位：元)与乘坐路程 x(单位：km)的函数关系；(2)求一位乘客白天乘坐 13 km 应付的费用；(3)求乘客白天付出 50 元对应的路程.

5. 某批发商店对批售某种商品的规定：起批量为 100 箱；批量在 500 箱以内的按每箱 120 元计价；达到或超过 500 箱但是不满 1 000 箱的按每箱 100 元计价；批量达到或超过 1 000 箱的按每箱 80 元计价. 试建立批量与付款金额之间的函数关系.

第二节　极限的概念

案例引入

一个圆的周长除以它的直径的商是一个固定的数，我们把它称作圆周率，用字母 π 表示. π 是一个无限不循环小数，$\pi=3.141\,592\,6\cdots$.

在过去很长的一段时间里,数学家们都在努力精确地求证圆周率的值. 在周朝,人们就从实践中认识到圆的周长大约是直径的 3 倍;在西汉初年,我国最古老的数学著作——《周髀算经》里就有了“周三径一”的记载. 随着生产的发展和文明的进步,人们对圆周率精确度的要求越来越高. 西汉末年,数学家刘歆提出把圆周率定为 3.154 7;东汉时期,张衡建议把圆周率定为 3.162 2. 公元 263 年,三国时期魏国的刘徽发现了计算圆周率的科学方法——割圆术,即用圆内接正多边形的周长来逼近圆周长. 用这种方法,刘徽将圆周率计算到小数点后 4 位数. 南北朝时期,祖冲之在前人的基础上刻苦钻研、反复演算,将圆周率推算至小数点后 7 位数(3.141 592 6~3.141 592 7),并得出了圆周率分数形式的近似值. 而外国数学家获得与祖冲之同样的结果已是 1 000 多年以后的事了. 为了纪念祖冲之的杰出贡献,有些外国数学史家也把圆周率 π 叫作“祖率”.

割圆术:割之弥细,所失弥少,割之又割,以至于不可割,则与圆周合体而无所失矣(图 1-11). 设有一圆,先作圆内接正六边形,面积记为 A_1;再作内接正十二边形,面积记为 A_2;再作内接正二十四边形,面积记为 A_3……. 一般地,把圆内接正 $6\times2^{n-1}$ 边形的面积记为 $A_n(n\in\mathbf{N}^+)$,这样就得到表示内接正多边形面积的一个数列 $A_1,A_2,A_3,\cdots,A_n,\cdots$. 当圆的半径为 1 时,请确定当 n 无限增大时这个数列的变化趋势.

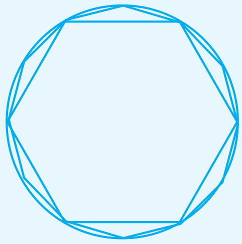

图 1-11

案例分析

先确定数列前面各项的取值,然后通过观察其取值的变化,可以较为直观地确定当 n 无限增大时这个数列的变化趋势,这便是数列的极限. 数列的极限诠释的是一个无限接近目标的过程,就如同我们的理想,不忘初心,砥砺前行,无限接近,方得始终.

函数的极限思想提供了从变量的无限变化中研究其变化趋势的数学方法,使人们从有限中认识无限、从近似中认识精确、从量变中认识质变成为可能. 在生活生产实践中,极限的思想与方法在各个学科的各个方面都有着广泛的应用价值.

一、数列的极限

我国古代哲学家庄周所著的《庄子 · 天下篇》中提到“一尺之棰,日取其半,万世不竭”,其含义是一根长为 1 尺(1 尺≈33.3 cm)的木棒,每天截去一半,这样的过程可以无限制地进行下去. 把每天截去部分的长度(单位:尺)列出:第 1 天截去$\frac{1}{2}$,第 2 天截去$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2^2}$,第 3 天截去$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2^2}=\frac{1}{2^3}$,…,第 n 天截去$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{1}{2^n}$,…,这样就得到一个数列$\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$:

微课
数列的极限

$$\frac{1}{2},\frac{1}{2^2},\frac{1}{2^3},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots$$

不难看出,数列$\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$随着 n 的无限增大,项$\frac{1}{2^n}$无限接近于 0. 又如数列$\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n}{n+1},\cdots$,随着 n 的无限增大,项$\frac{n}{n+1}$无限接近于 1.

定义 1-11 一般地,对于数列$\{a_n\}$,当项数 n 无限增大时,数列的项 a_n 无限趋近于某一个确定的常数 A,则称此数列存在极限,常数 A 为它的极限,记作$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$ 或 $a_n\to A(n\to\infty)$,读作“当 n 趋于无穷大时,a_n 的极限等于 A 或 a_n 趋于 A”.

前面例子中出现的数列,其极限可以表示为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$,$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$.

若数列$\{a_n\}$存在极限，则称数列$\{a_n\}$为收敛数列.

若数列$\{a_n\}$没有极限，则称数列$\{a_n\}$不收敛，或称$\{a_n\}$为发散数列.

【例 1】 写出数列 $a_n=\frac{1}{n^2}$的前五项，观察变化趋势，确定其极限.

解 $a_1=\frac{1}{1^2}=1,a_2=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4},a_3=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9},a_4=\frac{1}{4^2}=\frac{1}{16},a_5=\frac{1}{5^2}=\frac{1}{25}$. 可以看出，当 $n\to\infty$时，$a_n\to 0$. 所以$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$.

【例 2】 写出数列 $a_n=n^2$ 的前五项，观察变化趋势，确定其是否存在极限.

解 $a_1=1,a_2=4,a_3=9,a_4=16,a_5=25$. 可以看出，当项数 n 无限增大时，数列的项 a_n 并没有趋近于某一个确定的常数 A，而是无限增大，所以数列 $a_n=n^2$ 的极限不存在，它是一个发散数列.

注意 判断一个数列有无极限，应该分析：随着项数的无限增大，数列中相应的项是否无限趋近于某个确定的常数. 如果这样的数存在，那么这个数就是数列的极限，否则，数列的极限就不存在.

【例 3】 弹球模型问题. 一弹球从 100 m 高处落下，每次着地后又跳回到原来高度的 1/2 再落下. 当次数无限增大时，试判断弹球跳回高度的变化趋势.

解 这个弹球从 100 m 高处落下，每次着地后又跳回到原来高度的 1/2 再落下，这样下去，用球第 1，2，…，n，…次的高度来表示球的运动规律，则得到数列

$$100,100\times\frac{1}{2},100\times\left(\frac{1}{2}\right)^2,\cdots,100\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},\cdots$$

从数列的变化趋势可以看出，随着次数 n 的无限增大，数列无限接近于 0，即

$$\lim_{n\to\infty}\left[100\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]=0$$

由例 3 可以总结出$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0,|q|<1$.

二、函数的极限

根据数列极限的内容，对于一个以正整数为定义域的函数 $y=f(n)$，当自变量 n 按正整数 1，2，3，…，n，…增大的顺序依次取值时，所得到的有序函数值 $f(1),f(2),f(3),\cdots,f(n),\cdots$为数列. 因此，数列的极限也可以看作函数极限的特殊情形，从而将数列极限的概念推广到函数极限.

微课
当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

1. 当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

自变量 x 的绝对值$|x|$无限增大$(x\to\infty)$包括以下两种情况：x 取正值无限增大，记作 $x\to+\infty$；x 取负值而绝对值无限增大，记作 $x\to-\infty$. 若不指定 x 正负，只是$|x|$无限增大，则写成 $x\to\infty$.

例如，研究函数 $y=\frac{1}{x}$当$x\to\infty$时的变化趋势，将 x 的值与对应的 y 值列成表格并作出函数的图像.

x 取正值无限增大，如表 1-1 所示.

表 1-1

x	1	5	10	100	1 000	10 000	…
$y=\frac{1}{x}$	1	0.2	0.1	0.01	0.001	0.000 1	…

x 取负值而绝对值无限增大，如表 1-2 所示.

表 1-2

x	-1	-5	10	-100	$-1\ 000$	$-10\ 000$	…
$y=\frac{1}{x}$	-1	-0.2	-0.1	-0.01	-0.001	$-0.000\ 1$	…

作出函数的图像，如图 1-12 所示.

观察表 1-1 和表 1-2 中的数据(列表法)和图 1-12 中函数图像的变化趋势(图像法)，可以看出，当 x 取正值无限增大($x\to+\infty$)时，函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的值无限趋近于 0；当 x 取负值而绝对值无限增大($x\to-\infty$)时，函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的值也无限趋近于 0.

综合上述，当 x 趋向无穷大时，函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 无限趋近于常数 0. 对于函数的这种变化趋势，给出下面的定义.

定义 1-12 如果当 $|x|$ 无限增大，即 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 无限趋近于一个确定的常数 A，那么就称 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时存在极限 A，数 A 为当 $x\to\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限，记作 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to\infty)$.

根据定义 1-12 可知，当 $x\to\infty$ 时，函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的极限是 0，即 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

在某些问题中，只需考察 $x\to+\infty$ 或 $x\to-\infty$ 时的函数极限，即

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to+\infty)$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to-\infty)$$

【例 4】 观察函数 $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ 和 $y=3^x$ 的图像，并写出函数的极限.

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$；　　(2) $\lim\limits_{x\to-\infty}3^x$.

解 分别作出函数 $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ 和 $y=3^x$ 的图像，如图 1-13 所示.

观察图 1-13(a)可知，当 $x\to+\infty$ 时，$y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x\to0$，即 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^x=0$；观察图 1-13(b)可知，当 $x\to-\infty$ 时，$y=3^x\to0$，即 $\lim\limits_{x\to-\infty}3^x=0$.

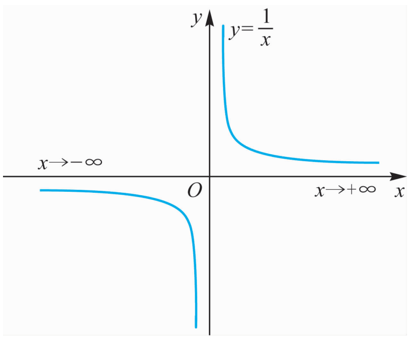

图 1-12

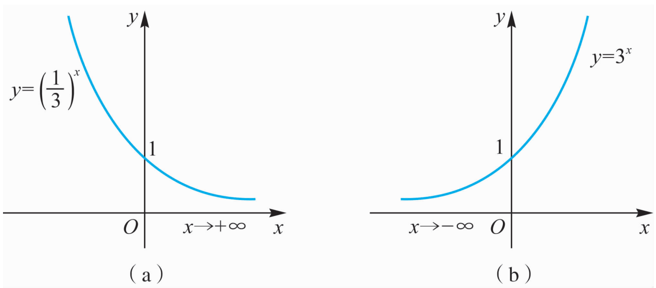

图 1-13

【例 5】 根据函数的图像(图 1-14)讨论下列函数当 $x\to\infty$ 时的极限.

(1) $y=1+\dfrac{1}{x^2}$；　　(2) $y=2^x$.

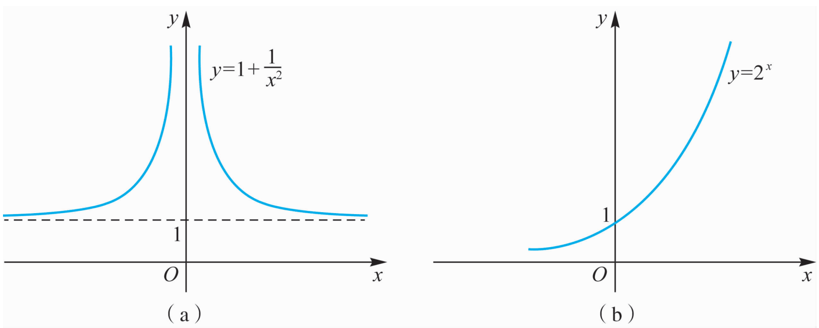

图 1-14

解 (1)观察图 1-14(a)可知，当 $x\to+\infty$ 或 $x\to-\infty$ 时，$y=1+\frac{1}{x^2}\to1$. 因此，当 $x\to\infty$ 时，$y=1+\frac{1}{x^2}\to1$，即 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=1$.

(2)观察图 1-14(b)可知，当 $x\to+\infty$ 时，$y=2^x\to+\infty$；当 $x\to-\infty$ 时，$y=2^x\to0$. 因此，当 $|x|$ 无限增大时，函数 $y=2^x$ 不可能无限趋近于某一个常数，即 $\lim\limits_{x\to\infty}2^x$ 不存在.

【例 6】 讨论分段函数 $f(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$ 在 $x\to+\infty$ 和 $x\to-\infty$ 时的极限.

解 函数 $f(x)$ 的图像如图 1-15 所示. 由图 1-15 可知 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-1$.

显然，当 $x\to+\infty$ 和 $x\to-\infty$ 时，$f(x)$ 的极限各自存在，但不相等，即

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)\neq\lim_{x\to-\infty}f(x)$$

一般的，如果 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$；反之，如果 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$. 如果 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 中至少有一个不存在，或者 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 都存在，但是不相等，那么 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 就不存在.

2. 当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

考察函数 $f(x)=x+1$ 当 $x\to2$ 时的变化趋势，列表(表 1-3 和表 1-4)并作出函数图像(图 1-16).

表 1-3

x	…	1	1.6	1.9	1.99	1.999	…
$y=x+1$	…	2	2.6	2.9	2.99	2.999	…

表 1-4

x	…	3	2.6	2.1	2.011	2.001	…
$y=x+1$	…	4	3.6	3.1	3.011	3.001	…

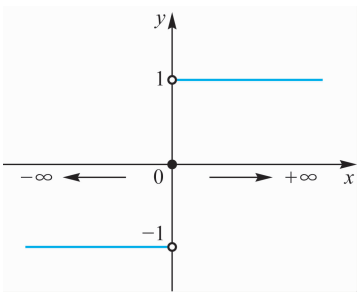

图 1-15

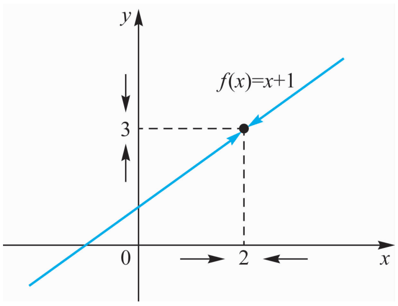

图 1-16

微课
当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

由表 1-3、表 1-4 和图 1-16 可知，当 x 无限趋近于 2 时，函数 $f(x)=x+1$ 的值总是随着自变量 x 的变化从两个不同的方向越来越接近于 3，所以当 $x\to2$ 时，$f(x)=x+1\to3$. 对于函数的这种变化趋势，我们给出下面的定义.

定义 1-13 如果当 x 无限趋近于 x_0 时，函数 $f(x)$ 无限趋近于一个确定的常数 A，那么就称当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 存在极限 A，数 A 就称为当 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

根据定义 1-13 可知，当 $x\to2$ 时，$f(x)=x+1$ 的极限为 3，记为 $\lim\limits_{x\to2}(x+1)=3$.

【例 7】 写出当 $x\to1$ 时，函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 的极限.

解 函数 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处没有定义，当 $x\to1$ 时，$x\neq1$，$x-1\neq0$，因此分式的分子和分母可以约去公因式 $x-1$，得

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}=x+1(x\neq1)$$

作出函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 的图像，如图 1-17 所示.

由图 1-17 可以看出 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$.

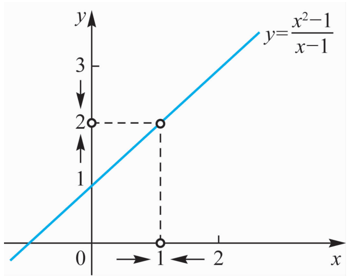

图 1-17

注意 函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 在点 $x=1$ 处无定义，即函数的定义域为 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$，但是当 $x\to1$ 时，$f(x)\to2$，这说明函数 $f(x)$ 在点 x_0 处是否存在极限与 $f(x)$ 在点 x_0 处是否有定义无关，极限考察的是当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 的变化趋势.

【例 8】 写出当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)=3$ 的极限.

解 当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的值等于 3，因此有 $\lim\limits_{x\to x_0}3=3$.

一般地，设 C 为常数，则 $\lim\limits_{x\to x_0}C=C$.

【例 9】 写出当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)=x$ 的极限.

解 当 $x\to x_0$ 时，显然有函数 $f(x)=x\to x_0$，所以 $\lim\limits_{x\to x_0}x=x_0$.

【例 10】 写出当 $x\to\dfrac{\pi}{2}$ 时，函数 $f(x)=\sin x$ 的极限.

解 观察函数 $f(x)=\sin x$ 的图像（图 1-18）可以看出，$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x=1$.

从图 1-18 可以看出，当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)=\sin x$ 可以取得 $-1\sim1$ 的一切值，但是不能无限趋近于一个确定的常数. 因此，当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)=\sin x$ 的极限不存在.

【例 11】 人影长度的极限分析. 考虑一个人沿直线走向路灯正下方时其影子的长度. 若目标总是灯正下方的一点，灯到地面的垂直高度为 H. 由日常生活知识可知，当人走向目标时，其影子的长度越来越短. 试用极限的概念解释这一现象.

解 如图 1-19 所示，设路灯的高度为 H，人的高度为 h，人与目标的距离为 x. 由相似三角形对应边成比例，得 $\dfrac{h}{H}=\dfrac{y}{x+y}$，解出人影的高度为 $y=\dfrac{h}{H-h}x$，其中 $\dfrac{h}{H-h}$ 是常数. 当人越来越接近路灯，即 $x\to0$ 时，人影的高度 $y=\dfrac{h}{H-h}x\to0$，即

$$\lim_{x\to0}\frac{h}{H-h}x=0$$

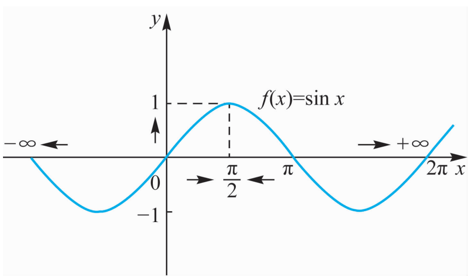

图 1-18

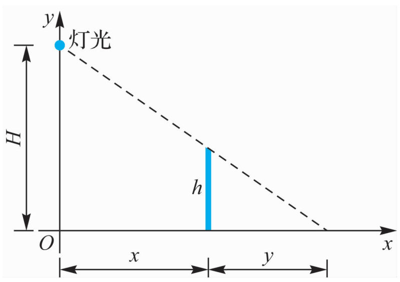

图 1-19

3. 当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的左极限和右极限

在函数极限的定义中，$x\to x_0$ 的含义是 x 既可以从点 x_0 的左侧（$x<x_0$）无限趋近于 x_0，也可以从点 x_0 的右侧（$x>x_0$）无限趋近于 x_0，还可以从点 x_0 的两侧交错地无限趋近于 x_0，即 x 以任意方式无限趋近于 x_0 时，都有 $f(x)\to A$. 在某些问题中，常常需要研究自变量 x 从点 x_0 的一侧无限趋近于 x_0 时函数的极限.

例如，考察函数 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\geqslant 0,\\ x-1, & x<0,\end{cases}$ 当 $x\to 0$ 时的极限. 作出函数图像，如图 1-20 所示.

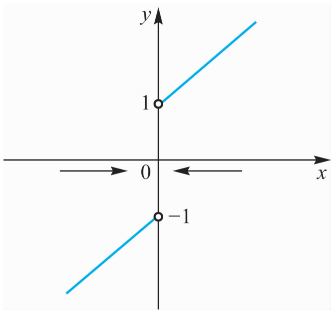

图 1-20

由图 1-20 可以看出，当 $x<0$ 且 $x\to 0$ 时，$f(x)=x-1\to -1$；当 $x>0$ 且 $x\to 0$ 时，$f(x)=x+1\to 1$.

由于 x 从 0 的两侧无限趋近于 0 时，$f(x)$ 的极限值不相等，因此，根据函数极限的定义，当 $x\to 0$ 时，函数 $f(x)$ 没有极限. 但是，如果 x 只在 0 的某一侧无限趋近于 0，那么函数 $f(x)$ 就会无限趋近于一个确定的常数. 对于函数的这种变化趋势，我们给出下面的定义.

定义 1-14 如果 x 从点 x_0 的左侧（$x<x_0$）无限趋近于 x_0（记为 $x\to x_0^-$），函数 $f(x)$ 无限趋近于一个确定的常数 A，那么 A 就叫作函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的左极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to x_0^-)$.

同样的，如果 x 从点 x_0 的右侧（$x>x_0$）无限趋近于 x_0（记为 $x\to x_0^+$），函数 $f(x)$ 无限趋近于一个确定的常数 A，那么 A 就叫作函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的右极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to x_0^+)$.

根据定义 1-14，函数 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\geqslant 0,\\ x-1, & x<0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处的左极限为 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x-1)=-1$，右极限为 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+1)=1$.

根据函数在点 x_0 处的极限、左极限和右极限的定义，可以看出函数 $f(x)$ 在点 x_0 处极限存在的充要条件是 $f(x)$ 在点 x_0 处的左极限和右极限各自存在且相等，即

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A$$

【例 12】 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}x-1, & x<0,\\ x^3, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 当 $x\to 0$ 时的极限.

解 因为

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x-1)=-1,\ \lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}x^3=0$$

即 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$，所以当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 的极限不存在.

【例 13】 已知 $f(x)=\begin{cases}x, & x\geqslant 2,\\ 2, & x<2,\end{cases}$ 求 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$.

解 因为

$$\lim_{x\to 2^+}f(x)=\lim_{x\to 2^+}x=2,\ \lim_{x\to 2^-}f(x)=\lim_{x\to 2^-}2=2$$

即 $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=2$，所以 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=2$.

【例 14】 如图 1-21 所示，矩形波在一个周期$[-\pi,\pi]$内的函数为

$$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\leqslant x<0,\\ A, & 0\leqslant x<\pi,\end{cases}\quad A\neq 0$$

试确定函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处的极限.

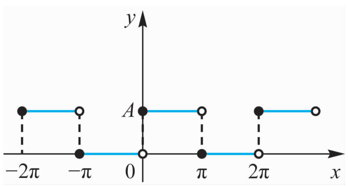

图 1-21

解 因为

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}0=0,\ \lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}A=A(A\neq0)$$

即 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$，所以函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处的极限不存在.

案例解决

对于表示圆内接正多边形面积的数列 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n, \cdots$，$n$ 越大，内接正多边形就越接近于圆，以 A_n 作为圆的面积的近似值就越精确.

刘徽计算到圆内接正 192 边形，也就是 $n=6$，得出 $\pi\approx3.141\ 24$. 祖冲之计算到圆内接正 24 576 边形，也就是 $n=13$，得出 $\pi\approx3.141\ 592\ 6$. 当圆的半径为 1，$n\to\infty$ 时，数列的极限就为精确的 π.

祖冲之利用刘徽的割圆术求 π 的近似值的过程也可以理解为求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\pi$.

祖冲之的计算在当时的年代需要花费多少时间和付出多么巨大的努力啊！由此可见，他在治学上的顽强毅力和聪明才智是令人钦佩的，这也是我们中华民族的骄傲.

习题 1-2

A 组

1. 判断下列数列的极限是否存在. 若存在极限，试确定相应的极限值.

(1) $a_n=a^0\ (a\neq0)$； (2) $a_n=1-3^n$；

(3) $a_n=\dfrac{2n-1}{4n+3}$； (4) $a_n=(-1)^n n$.

2. 分析下列函数的变化趋势，并写出函数的极限.

(1) $\lim\limits_{x\to-\infty}2^x$； (2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^3}$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{1+x}$.

3. 下列函数当 $x\to\infty$ 时极限不存在，试说明理由.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+1)$； (2) $\lim\limits_{x\to\infty}e^x$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{n\pi}{2}$.

4. 讨论分段函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ 3^x, & x<0,\end{cases}$ 当 $x\to+\infty$ 和 $x\to-\infty$ 时的极限.

5. 写出下面函数的极限.

(1) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{x}{3}$； (2) $\lim\limits_{x\to-1}(2x-1)$；

(3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\cos x$.

6. 写出下列函数图像（图 1-22）所表示的函数在点 $x=0$ 处的左、右极限，并说明在点 $x=0$ 处的极限是否存在.

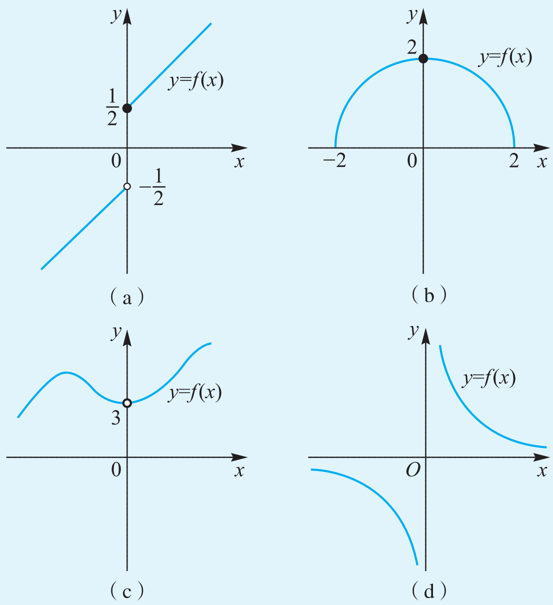

图 1-22

7. 作出下列函数图像，写出函数在指定点处的左、右极限，判断函数在该点处的极限是否存在.

(1) $f(x)=\begin{cases}3, & x\geq0,\\ -3, & x<0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处；

(2) $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}$ 在点 $x=3$ 处.

B 组

1. 写出下列数列的前五项，观察变化趋势，确定其是否存在极限.

(1) $a_n=\dfrac{3n^2}{n^2-3}$；　　(2) $a_n=\dfrac{2n-5}{3n+1}$；

(3) $a_n=\dfrac{n^2}{4^n}$.

2. 观察下列数列的变化趋势，确定其是否存在极限.

(1) $a_n=q^n(|q|<1)$；　　(2) $a_n=\sqrt[n]{a}(a>0)$；

(3) $a_n=\dfrac{1}{n^\alpha}(\alpha\in\mathbf{R})$.

3. 分析下列函数的变化趋势，写出函数的极限.

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$；　　(2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$；

(3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\tan 2x$.

4. 函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+2x-1, & x\leqslant 1,\\ x, & 1<x<2,\\ 2x-2, & x\geqslant 2,\end{cases}$ 求 $\lim\limits_{x\to-5}f(x)$，$\lim\limits_{x\to1}f(x)$，$\lim\limits_{x\to2}f(x)$，$\lim\limits_{x\to3}f(x)$.

第三节　极限运算法则

案例引入

2008 年 5 月 12 日，四川汶川发生里氏 8.0 级特大地震，也就是汶川大地震. 这是中华人民共和国成立以来破坏性最强、波及范围最广、灾害损失最重、救援难度最大的一次地震. 这场大地震给全国人民带来了巨大的心理压力和难以愈合的心灵创伤，堪称国家和民族史上的重大灾难. 经中华人民共和国国务院批准，自 2009 年起，将每年的 5 月 12 日定为全国防灾减灾日，以表达对灾害遇难者的追思，增强全民忧患意识，提高防灾减灾能力，提醒国民前事不忘后事之师，更加重视防灾减灾，努力减少灾害损失，弘扬团结抗灾的精神. 灾害发生后，全国人民在党中央、国务院的领导下众志成城、抗震救灾，表现出了前所未有的团结与坚强.

假设在地震灾后救援过程中，从旋停在地震灾区上空 50 m 处的直升机上丢下一包救灾物品，忽略空气阻力，将开始下落的时刻记为 $t=0$. 求物品下落到第 3 s 末时的速度.

案例分析

由于救灾物品做自由落体运动，根据运动公式 $s(t)=\dfrac{1}{2}gt^2$（g 为重力加速度），在时间段 $[3,t](t>3)$ 内，物品下落的距离为 $\Delta s=s(t)-s(3)=\dfrac{1}{2}g(t^2-9)$，物品的平均速度为

$$\bar{v}(t)=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{1}{2}g\frac{t^2-9}{t-3}$$

虽然物品下落的速度随时间而改变，但是时间间隔越短，速度的改变就越小，因此，在很小的时间区间 $[3,t]$ 内，下落可近似看成匀速. 于是，可以用 $\bar{v}(t)$ 来近似代替第 3 s 末的速度，即当 $\Delta t\to0(t\to3)$ 时，$\bar{v}(t)$ 无限接近于第 3 s 末的速度，所以，物品下落到第 3 s 末时的速度为

$$\lim_{t\to3}\bar{v}(t)=\lim_{\Delta t\to0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{t\to3}\frac{1}{2}g\frac{t^2-9}{t-3}$$

如何求出上面函数的极限值呢？这是本节需要研究的问题.

用列表法或图像法来讨论较复杂函数的极限，不仅工作量大，而且不一定准确. 例如，求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(x^2-\dfrac{\cos x}{10\ 000}\right)$的值. 用列表法给出 $x^2-\dfrac{\cos x}{10\ 000}$在点 $x=0$ 附近取值时的函数值(表 1-5).

表 1-5

x	±0.5	±0.1	±0.01	…	0
$x^2-\dfrac{\cos x}{10\ 000}$	0.249 91	0.009 90	0.000 000 005	…	?

根据表 1-5 中数据的变化规律，我们可能会估计$\lim\limits_{x\to0}\left(x^2-\dfrac{\cos x}{10\ 000}\right)=0$，但实际上这个结果是错误的.

定理 1-1 如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，则有

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)+\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A+B$；

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)-\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A-B$；

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=AB$；

(4) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}=\dfrac{A}{B}\ (B\neq0)$.

微课

极限运算法则

推论 1 $\lim\limits_{x\to x_0}Cf(x)=C\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=CA$($C$ 为常数).

推论 2 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^n=[\lim\limits_{x\to x_0}f(x)]^n=A^n\ (n\in\mathbf{N}^*)$.

上述运算法则对于 $x\to\infty$等其他变化过程同样成立.

根据上述极限的运算法则，可以得到

$$\lim_{x\to0}\left(x^2-\frac{\cos x}{10\ 000}\right)=\lim_{x\to0}x^2-\lim_{x\to0}\frac{\cos x}{10\ 000}=(\lim_{x\to0}x)^2-\frac{\lim\limits_{x\to0}\cos x}{\lim\limits_{x\to0}10\ 000}=0-\frac{1}{10\ 000}=-0.000\ 1$$

【例 1】 求$\lim\limits_{x\to2}(x^2+2x-3)$.

解 原式$=\lim\limits_{x\to2}x^2+\lim\limits_{x\to2}2x-\lim\limits_{x\to2}3=(\lim\limits_{x\to2}x)^2+2(\lim\limits_{x\to2}x)-3=2^2+2\times2-3=5$.

【例 2】 求$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-2x+5}{x^2+6}$.

解 当 $x\to1$ 时，分子和分母都有极限，并且分母的极限不为 0，因此有

$$原式=\frac{\lim\limits_{x\to1}(x^2-2x+5)}{\lim\limits_{x\to1}(x^2+6)}=\frac{\lim\limits_{x\to1}x^2-\lim\limits_{x\to1}2x+\lim\limits_{x\to1}5}{\lim\limits_{x\to1}x^2+\lim\limits_{x\to1}6}=\frac{1-2+5}{1+6}=\frac{4}{7}$$

【例 3】 求$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(2+\dfrac{1}{x}\right)\left(3-\dfrac{1}{x^2}\right)\right]$.

解 原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\dfrac{1}{x}\right)\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(3-\dfrac{1}{x^2}\right)$

$$=\left(\lim_{x\to\infty}2+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\right)\cdot\left(\lim_{x\to\infty}3-\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}\right)=(2+0)\times(3-0)=6.$$

注意 若 $f(x)$为多项式函数或者分母极限不为 0 的分式函数，根据极限的运算法则，可得$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$；若 $f(x)$是分母极限为 0 的分式函数，则关于商的极限运算法则不能应用，需要特别考虑.

【例 4】 求$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$.

解 当 $x\to1$ 时，分子、分母的极限都等于 0，因此，不能直接用运算法则求极限. 因为 $x\to1$ 时，$x\neq1$，

$x-1\neq 0$，所以可先约去不为 0 的公因式 $x-1$，再求极限.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=2$$

【例 5】 求$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{\sqrt{x+5}-3}$.

解 当 $x\to 4$ 时，分子、分母的极限都等于 0，因此，不能直接用运算法则求极限. 因为分母含有根式，所以先有理化分母，再约去不为 0 的公因式后求极限.

$$\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x+5}-3}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(\sqrt{x+5}+3)}{(\sqrt{x+5}-3)(\sqrt{x+5}+3)}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(\sqrt{x+5}+3)}{x-4}$$

$$=\lim_{x\to 4}(\sqrt{x+5}+3)=\lim_{x\to 4}\sqrt{x+5}+\lim_{x\to 4}3=3+3=6$$

注意 类似例 4 和例 5 中分子、分母的极限都等于 0 的极限称为“$\frac{0}{0}$”型未定式极限，其一般解法是先将分式约简，再求极限. 常用的约简方法有因式分解法、分子或分母有理化法.

【例 6】 一个弹性小球自 $h_0=5$ m 处自由落下，它与水平地面每碰撞 1 次，速度就减小到碰撞前的$\frac{7}{9}$. 不计每次碰撞的时间，计算小球从开始下落到停止运动所经过的路程和时间.

解 假设小球第 1 次落地时的速度为 v_0，则有 $v_0=\sqrt{2gh_0}=\sqrt{2\times 10\times 5}=10$(m/s)，那么第 2 次，第 3 次，…，第 $n+1$ 次落地时的速度分别为 $v_1=\frac{7}{9}v_0$，$v_2=\left(\frac{7}{9}\right)^2v_0$，…，$v_n=\left(\frac{7}{9}\right)^n v_0$.

小球第 1 次与地面碰撞经过的路程为 $h_0=5$ m.

小球从第 1 次与地面碰撞到第 2 次与地面碰撞经过的路程为 $h_1=2\,\frac{v_1^2}{2g}=10\times\left(\frac{7}{9}\right)^2$ m.

小球从第 2 次与地面碰撞到第 3 次与地面碰撞经过的路程为 $h_2=2\,\frac{v_2^2}{2g}=10\times\left(\frac{7}{9}\right)^4$ m.

由数学归纳法可知，小球从第 n 次到第 $n+1$ 次与地面碰撞经过的路程为 $h_n=10\times\left(\frac{7}{9}\right)^{2n}$ m，故从第 1 次到第 $n+1$ 次所经过的路程为 $h_{n+1}=h_0+h_1+h_2+\cdots+h_n$，则整个过程的路程为

$$h=\lim_{n\to\infty}h_{n+1}=5+\lim_{n\to\infty}\left\{10\times\frac{\left(\frac{7}{9}\right)^2\left[1-\left(\frac{7}{9}\right)^n\right]}{1-\left(\frac{7}{9}\right)^2}\right\}=5+10\times\frac{\left(\frac{7}{9}\right)^2}{1-\left(\frac{7}{9}\right)^2}\approx 20.3(\text{m})$$

小球从开始下落到第 1 次与地面碰撞所经过的时间为 $t_0=\sqrt{\frac{2h_0}{g_0}}=1$(s).

小球从第 1 次与地面碰撞到第 2 次与地面碰撞所经过的时间为 $t_1=2\,\frac{v_1}{g}=2\times\frac{7}{9}$(s). 同理可得，$t_n=2\times\left(\frac{7}{9}\right)^n$(s)，$t_{n+1}=t_0+t_1+t_2+\cdots+t_n$，则

$$t=\lim_{n\to\infty}t_{n+1}=1+\lim_{n\to\infty}\left\{2\times\frac{\left(\frac{7}{9}\right)\left[1-\left(\frac{7}{9}\right)^n\right]}{1-\left(\frac{7}{9}\right)}\right\}=8(\text{s})$$

案例解决

物品下落到第 3 s 末时的速度为

$$\lim_{t\to 3}\bar{v}(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{t\to 3}\frac{s(t)-s(3)}{t-3}=\lim_{t\to 3}\frac{1}{2}g\,\frac{t^2-9}{t-3}=3g(\text{m/s})$$

即这一时刻的瞬时速度.

习题 1-3

A 组

1. 求下列函数的极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 2}(3x+2)^2$； (2) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x-4}{x^2-4}$；

(3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}2\sin^3 x$； (4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}$；

(5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\tan^2 x$； (6) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{3x^2-1}{5x+1}$；

(7) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$； (8) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-x-2}{x^2+x}$；

(9) $\lim\limits_{x\to -1}\left[\left(7-\frac{x}{3}\right)\left(5+\frac{4}{x^2}\right)\right]$；

(10) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-1}{7x^2+4x+3}$；

(11) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3-5}{x^3+2x+6}$；

(12) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-x^2+x+3}{(x+1)(2x-1)}$；

(13) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{5x^3+x^2}$.

2. (RC 电路充电)在 RC 电路的充电过程中，电容器两端的电压 $U(t)$ 与时间 t 的函数关系为 $U(t)=E\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)$，其中 E,R,C 都为正常数. 问：当 $t\to\infty$ 时，电压 $U(t)$ 的变化趋势如何？

3. (断路电阻的极限算法)有一 10 Ω 的电阻与一可变电阻 R_1 并联，电路的总电阻为 $R=\frac{10R_1}{10+R_1}$. 当有可变电阻 R_1 的支路断开时，电路的总电阻是多少？

B 组

1. 求下列函数的极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^3-3x+1}{x-4}+1\right)$； (2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x}{1-x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^4+2x^2-3}{x^2-3x+2}$； (4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}$；

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x-1)^4-1}{2x^4+1}$； (6) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(2^{-x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$；

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x^2}{1-x^2}+2^{\frac{1}{x}}\right)$； (8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{2x^2-1}-\frac{x^2}{2x+1}\right)$.

2. (水箱中盐的浓度)一水箱中装有 5 000 L 纯水，将每升含 30 g 盐的盐水以 25 L/s 的速度注入水箱. 求 t(s)时水箱中盐的浓度，并分析当 $t\to\infty$ 时水箱中盐的浓度有何变化.

3. (放射物衰减)一放射性材料的衰减模型为 $N=100e^{-0.026t}$（单位：mg）. 求：(1)放射性材料最初有多少？(2)给出 $t\to\infty$ 时的衰减规律.

4. (传染人数)假定某种疾病流行 t 天后，感染的人数为 $N=\frac{1\ 000\ 000}{1+5\ 000e^{-0.1t}}$. 问：(1)从长远看，将有多少人感染上这种疾病？(2)有可能某天会有 100 万人感染上该疾病吗？50 万人呢？25 万人呢？

第四节　两个重要极限

案例引入

某些不法金融平台会以大学校园为目标，通过诱导性营销、发放互联网消费贷款诱导大学生过度超前消费，导致部分大学生陷入高额贷款陷阱——“校园贷”. 因此，特别提醒学子们要树立理性消费观，提升金融安全意识，了解金融知识，上好金融安全的第一课. 下面就从复利率计息说起.

假设 P_0 为本金，年利率为 r，那么第一年年末的利息为 P_0r，本利和为 P_0+P_0r，用 P_1 表示；用 $P_1=P_0+P_0r$ 作为第二年的本金，到第二年年末就有本利总和 $P_2=P_0(1+r)^2$，这样一年一年继续下

去，本金年年增加，利息也逐渐增多，到了第 n 年年末，就有 $P_n=P_0(1+r)^n$. 如果贷款是每月把利息加入本金一次，那么第一年年末的本利和为 $P_1=P_0\left(1+\frac{r}{12}\right)^{12}$.

如果存款本金为 100 元，年利率为 0.05，那么按照 $P_n=P_0(1+r)^n$ 求得第一年年末的本金加利息为 105 元. 若按 $P_1=P_0\left(1+\frac{r}{12}\right)^{12}$ 计算，则第一年年末的本金加利息为 105.12 元. 由此看来，把利息加入本金一次的时间越短，利息就越多. 如果这个时间“无穷短”，利息会无限增加吗?

案例分析

当时间“无穷短”时，我们可以假设在这一年中，利息是在每个瞬间（每一年有 n 个瞬间）加入本金一次，于是 $P_1=P_0\left(1+\frac{r}{12}\right)^{12}$ 中的 12 变成 n，就得到 $P_1=P_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^n$，因此，只需求出 $\lim\limits_{n\to\infty}P_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^n$ 的值即可.

一、第一个重要极限

表 1-6 列出了 $x\to 0$ 时函数 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ 的一些函数值，观察其变化趋势.

表 1-6

x	1	0.5	0.1	0.01	…
$\frac{\sin x}{x}$	0.841 47	0.958 85	0.998 33	0.999 98	…

图 1-23 为函数 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ 的图像，观察其变化趋势.

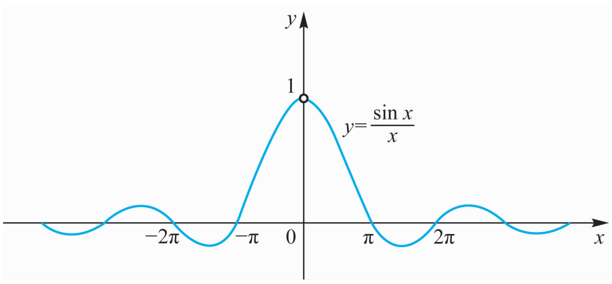

图 1-23

微课
第一个重要极限

由表 1-6 和图 1-23 可以看出，当 $x\to 0$ 时，函数 $\frac{\sin x}{x}\to 1$，即 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$，这就是我们要学习的第一个重要极限：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

【例 1】 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1\times 1=1.$

【例 2】 求$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 3x}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{3\sin 3x}{3x}\xlongequal{令\ 3x=y}3\lim\limits_{y\to0}\frac{\sin y}{y}=3\times1=3.$

从例 2 可以看出，公式$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ 实际上可以写成 $\lim\limits_{f(x)\to0}\frac{\sin f(x)}{f(x)}=1$，其中 $f(x)\to0$ 表示当 $x\to0$ 时 $f(x)\to0$.

显然，利用公式 $\lim\limits_{f(x)\to0}\frac{\sin f(x)}{f(x)}=1$ 求极限更简捷.

【例 3】 前面介绍过割圆术是用圆的内接正边形的面积近似求圆的面积. 如图 1-24 所示，当每个等腰三角形的面积为$\frac{1}{2}R^2\sin\frac{2\pi}{n}$时，内接正 n 边形的面积为$\frac{1}{2}nR^2\sin\frac{2\pi}{n}$，求圆的面积.

解 用极限思想求圆的面积为 $A=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}nR^2\sin\frac{2\pi}{n}\right)$，根据第一个重要极限有

$$A=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}nR^2\sin\frac{2\pi}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}}\pi R^2\right]=\pi R^2$$

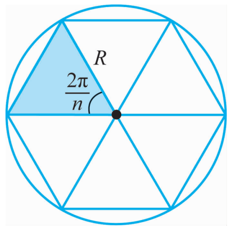

图 1-24

二、第二个重要极限

表 1-7 和表 1-8 列出了 $x\to\infty$时函数 $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 的一些近似函数值，观察其变化趋势.

表 1-7

x	10	100	1 000	10 000	100 000	…
$f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$	2.593 742 5	2.704 811 38	2.716 923 9	2.718 145 9	2.718 268 2	…

表 1-8

x	−10	−100	−1 000	−10 000	−100 000	…
$f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$	2.867 972 0	2.731 999 0	2.719 642 2	2.718 417 7	2.718 295 4	…

可以证明，当 $x\to\infty$时，函数 $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 无限趋近于一个确定的常数，这个常数就是无理数 e=2.718 281 828 45…，即$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$.

微课
第二个重要极限

在上式中，如果设 $t=\frac{1}{x}$，则当 $x\to\infty$时，$t\to0$，于是得到上式的另一种形式：

$$\lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$$

即$\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$.

和第一个重要极限一样，利用公式 $\lim\limits_{f(x)\to\infty}\left[1+\frac{1}{f(x)}\right]^{f(x)}=e$ 或 $\lim\limits_{f(x)\to0}[1+f(x)]^{\frac{1}{f(x)}}=e$ 求极限更简捷.

【例 4】 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x}$； (2) $\lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$； (3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x$.

解　(1)$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{3}=e^{3}$.

(2)$\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{2x\to 0}[(1+2x)^{\frac{1}{2x}}]^{2}=e^{2}$.

(3)$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-x}\right)^{-x}\right]^{-1}=e^{-1}=\frac{1}{e}$.

【例 5】 求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+3}$.

解

$$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+3}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3}\right]$$
$$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3}=e\cdot 1=e.$$

【例 6】 求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3+x}{2+x}\right)^{2x}$.

解

$$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3+x}{2+x}\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x+2}\right)^{x}\right]^{2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x+2}\right)^{x+2}\right]^{2}\cdot\left(1+\frac{1}{x+2}\right)^{-4}$$
$$=\left[\lim\limits_{x+2\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+2}\right)^{x+2}\right]^{2}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+2}\right)^{-4}=e^{2}.$$

【例 7】 空气通过盛有CO_2吸收剂的圆柱形器皿,已知它吸收CO_2的量与CO_2的百分浓度及吸收层的厚度成正比.现有CO_2含量为8%的空气通过厚度为10 cm的吸收层后,CO_2的含量为2%.若通过的吸收层的厚度为30 cm,则出口处空气中CO_2的含量是多少?

解　设吸收层的厚度为d cm,若把吸收层等分为n段,则每段的厚度为$\frac{d}{n}$cm.假设每单位厚度可使CO_2的浓度下降a,则$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{d}{n}a\right)^{n}\cdot 8\%=2\%$.当吸收层的厚度为10 cm时,$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{10}{n}a\right)^{n}=\frac{1}{4}$.根据第二个重要极限,可得

$$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{10}{n}a\right)^{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-\frac{n}{10a}}\right)^{-\frac{n}{10a}}\right]^{-10a}=e^{-10a}$$

于是,由$e^{-10a}=\frac{1}{4}$可得$a=\frac{\ln 2}{5}$.

当吸收层的厚度为30 cm时,出口处空气中CO_2的含量为$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{30}{n}\cdot\frac{\ln 2}{5}\right)^{n}\cdot 8\%$,利用第二个重要极限可以求得出口处空气中$CO_2$的含量为0.125%.

案例解决

为了便于计算,假设$\frac{r}{n}=\frac{1}{m}$,则$n=mr$,于是有

$$P_1=P_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{n}=P_0\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\right]^{r}$$

这样就归结为求$\lim\limits_{m\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\right]^{r}$的值,即求第二个重要极限的值.

$$\lim\limits_{m\to\infty}P_1=\lim\limits_{m\to\infty}P_0\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\right]^{r}=P_0e^{r}$$

于是,第n年年末的$P_n=P_0e^{nr}$.

习题 1-4

A 组

求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{1}{x}$；

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}$；

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\tan x}$；

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{5x}$；

(6) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{2}{x}}$；

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{4x}$；

(8) $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{3}{x}}$.

B 组

求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x}$；

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$；

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-\sin 2x}{x}$；

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+x}{2-x}\right)^{\frac{1}{x}}$；

(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x+1}\right)^{x}$；

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{2x}$；

(8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x-1}\right)^{x-1}$.

第五节　无穷小与无穷大

案例引入

1956 年，中国航天从零起步，踏上通向航天星辰征途的逐梦之旅. 如今，中国印记早已“踏”上月球，“中国星”在九天之上熠熠生辉. 运载火箭形成陆地、海上多样化的发射能力；中国空间站的建造全面实施，6 名航天员先后进驻，开启了有人长期驻留时代；嫦娥四号首次着陆月背进行巡视探测，嫦娥五号带回 1 731 g 月壤；天问一号实现中国航天从地月系到行星际探测的跨越，在火星上首次留下中国印迹；北斗全球卫星导航系统建成并开通，高分辨率对地观测系统形成体系能力. 神舟号载人宇宙飞船、嫦娥工程、天宫空间站、天问系列、长征系列运载火箭、北斗导航系列……这一个个响当当的名字为全人类共同守护好这颗蓝色星球贡献着中国力量. “致广大而尽精微”的航天研究精神也同样适用于数学学习.

我国在发射卫星时需要使用长征系列运载火箭，试求运载火箭脱离地球引力所需要的最小速度.

案例分析

求运载火箭脱离地球引力所需要的最小速度，就是要确定火箭达到最大高度($h\to+\infty$)时所需要的初速度 $v=f(h)$ 的极限值.

一、无穷小量

微课
无穷小量

在实际问题中，经常会遇到以零为极限的函数. 例如，关上教室里转动的吊扇的开关后，吊扇的转速 $\omega(t)$ 会随着时间的增加而逐步变小并趋于零. 又如，单摆离开平衡位置摆动时，由于空气阻力和摩擦力的作用，随着时间的增加，单摆的振幅 $A(t)$ 会逐渐减小并趋近于零. 对于这样的变量，我们称之为无穷小量.

1. 无穷小量的定义

定义 1-15 如果当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时，函数 $f(x)$ 的极限为零，那么称函数 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的无穷小量，简称无穷小.

根据定义 1-15 可知，前面引例中提到的吊扇转速 $\omega(t)$、单摆的振幅 $A(t)$ 都是当 $t\to\infty$ 时的无穷小.

例如，因为 $\lim\limits_{x\to1}(x-1)=0$，所以 $x-1$ 是当 $x\to1$ 时的无穷小；因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$，所以 $\dfrac{1}{x}$ 是当 $x\to\infty$ 时的无穷小；因为 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}=0$，所以 $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ 是当 $x\to-\infty$ 时的无穷小.

注意 （1）一个函数 $f(x)$ 是否为无穷小，要看自变量 x 的变化过程.

（2）无穷小是变量，不要把绝对值很小的常数当作无穷小，因为绝对值很小的常数不管在何种趋势下，其极限为常数本身，而并不是零.

（3）只有常数 0 可以被看成无穷小，因为 $\lim\limits_{x\to x_0}0=0$.

2. 无穷小的性质

性质 1 有限个无穷小的代数和仍是无穷小.

性质 2 有限个无穷小的乘积是无穷小.

性质 3 有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

性质 4 常数和无穷小的乘积是无穷小.

【例 1】 求 $\lim\limits_{x\to0}x\cos\dfrac{1}{x^2}$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to0}x=0$ 且 $\left|\cos\dfrac{1}{x^2}\right|\leqslant1$，即 $\cos\dfrac{1}{x^2}$ 是有界函数，所以 $\lim\limits_{x\to0}x\cos\dfrac{1}{x^2}=0$.

【例 2】 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$.

解 因为 $\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{1}{x}\cdot\sin x$，而 $\dfrac{1}{x}$ 是当 $x\to\infty$ 时的无穷小，$\sin x$ 是有界函数，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$.

二、无穷小的比较

我们已经知道，两个无穷小的和、差及乘积仍然是无穷小，但两个无穷小的商会得到不同的结果. 例如，x，$2x$，x^2 都是当 $x\to0$ 时的无穷小，而且 $\dfrac{x^2}{2x}=\dfrac{x}{2}\to0$，即 $\dfrac{x^2}{2x}$ 仍是当 $x\to0$ 时的无穷小. 但 $\dfrac{x}{2x}\to\dfrac{1}{2}$，说明 $\dfrac{x}{2x}$ 不再是当 $x\to0$ 时的无穷小. 产生不同结果的原因在于各个无穷小趋于零的快慢不一样，x^2 趋于零的速度比 $2x$ 快，而 x 和 $2x$ 趋于零的速度差不多. 为了对这些结果加以区别，我们引入无穷小的阶的概念.

定义 1-16 设 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$，$\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=0$.

（1）如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$，则称 $x\to x_0$ 时 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 高阶的无穷小，记作

$$\alpha(x)=o(\beta(x))\ (x\to x_0)$$

(2)如果$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C\neq 0$,则称 $x\to x_0$ 时 $\alpha(x)$与 $\beta(x)$是同阶无穷小.

(3)如果$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$,则称 $x\to x_0$ 时 $\alpha(x)$与 $\beta(x)$是等价无穷小,记作

$$\alpha(x)\sim\beta(x)\ (x\to x_0)$$

例如,$\sin x\sim x(x\to 0)$. 由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{\frac{1}{2}x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=1$$

所以,当 $x\to 0$ 时,有 $\tan x\sim x$,$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$.

又如,函数 $u=\arcsin x$ 当 $x\to 0$ 时,$u\to 0$,并且 $x=\sin u$,于是有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim_{u\to 0}\frac{u}{\sin u}=1$$

所以 $\arcsin x\sim x(x\to 0)$. 类似得到 $\arctan x\sim x(x\to 0)$.

对上述等价形式还可以进行推广,即在自变量的某个变化过程中,若 $\varphi(x)\to 0$,则有

$$\sin\varphi(x)\sim\varphi(x),\tan\varphi(x)\sim\varphi(x),\arcsin\varphi(x)\sim\varphi(x),\arctan\varphi(x)\sim\varphi(x),1-\cos\varphi(x)\sim\frac{1}{2}\varphi^2(x)$$

定理 1-2(无穷小等价代换定理) 如果 $\alpha_1\sim\beta_1$,$\alpha_2\sim\beta_2$,且极限 $\lim\frac{\beta_1}{\beta_2}$存在,则有 $\lim\frac{\alpha_1}{\alpha_2}=\lim\frac{\beta_1}{\beta_2}$.

上述定理表明:在求两个无穷小比的极限时,如果分子、分母的等价无穷小均存在,那么就可以用它们各自的等价无穷小来代换原来的分子、分母,使原问题简化,便于计算.

【例 3】 求下列极限.

(1)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\sin 3x}$; (2)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$.

解 (1)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\sin 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{3x}=\frac{2}{3}$.

(2)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3}=\frac{1}{2}$.

注意 在用等价代换定理求乘除运算的极限时,可以大胆使用定理 1-2. 而在求和差运算的极限时,则务必慎重使用定理 1-2. 因为此时经代换后,往往会使无穷小之比的(阶数)发生变化,而导致计算错误.

三、无穷大量

考察函数 $f(x)=\frac{1}{x-1}$的图像(图 1-25)可知,当 x 从左、右两个方向趋近于 1 时,$|f(x)|$都无限地增大,我们把这种情况称为趋向无穷大.

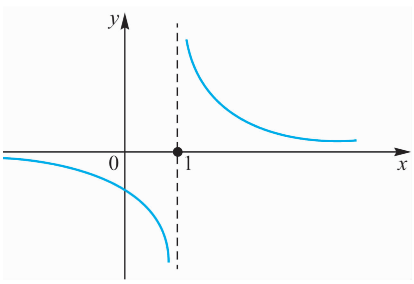

图 1-25

定义 1-17 如果 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$),函数 $f(x)$的绝对值 $|f(x)|$可以无限增大,则称 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时函数 $f(x)$为无穷大量,简称无穷大.

如果 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时函数 $f(x)$为无穷大,那么它的极限是不存在的,但是为了便于描述函数的这种变化趋势,我们就说函数的极

限为无穷大，并记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty\left(\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty\right)$$

微课
无穷大量

如果在无穷大的定义中，点 x_0 左、右近旁的 x 所对应的函数值都是正的或负的，即当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$无限增大或减小，则分别记为$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$或$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$.

例如，因为$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}=\infty$，所以 $x\to 1$ 时$\dfrac{1}{x-1}$是无穷大；因为$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x=\infty$，所以 $x\to\dfrac{\pi}{2}$时 $\tan x$ 是无穷大；因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}2^x=+\infty$，所以 $x\to+\infty$时 2^x 是正无穷大；因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$，所以 $x\to 0^+$ 时 $\ln x$ 是负无穷大.

注意　无穷大不是很大的数，它用来描述函数的一种状态：这个函数绝对值的变化趋势在自变量的某个变化过程中是无限增大的；而绝对值很大的函数无论在自变量的何种变化过程中，其极限都为常数，并不会无限地增大或减小.

四、无穷小与无穷大的关系

无穷小与无穷大的关系：在自变量的同一变化过程中，如果 $f(x)$为无穷大，则$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷小；反之，如果 $f(x)$为无穷小，且 $f(x)\neq 0$，则$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷大.

根据无穷小与无穷大的关系，关于无穷大的问题都可转化为无穷小来讨论.

【例 4】　求$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+4}{x-1}$.

解　因为$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x+4}=0$，即当 $x\to 1$ 时，$\dfrac{x-1}{x+4}$是无穷小，那么当 $x\to 1$ 时，$\dfrac{x+4}{x-1}$是无穷大，所以 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+4}{x-1}=\infty$.

【例 5】　求$\lim\limits_{x\to\infty}(x^2-3x+2)$.

解　因为$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x^2}}{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}}=0$，所以$\lim\limits_{x\to\infty}(x^2-3x+2)=\infty$.

【例 6】　求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3}{3x^2-2x}$.

解　当 $x\to\infty$时，分子、分母的极限都是∞，因此不能直接用运算法则求极限. 应先用 x^2 同除分子、分母，然后求极限.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3}{3x^2-2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2x^2}{x^2}+\dfrac{3}{x^2}}{\dfrac{3x^2}{x^2}-\dfrac{2x}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\dfrac{3}{x^2}}{3-\dfrac{2}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}2+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty}3-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x}}=\frac{2+0}{3-0}=\frac{2}{3}$$

【例 7】　求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-5x}{4x^3+7x^2}$.

解　当 $x\to\infty$时，分子、分母的极限都是∞，因此不能直接用运算法则求极限. 应先用 x^3 同除分子、分母，然后求极限.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-5x}{4x^3+7x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{3x^2}{x^3}-\dfrac{5x}{x^3}}{\dfrac{4x^3}{x^3}+\dfrac{7x^2}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{3}{x}-\dfrac{5}{x^2}}{4+\dfrac{7}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{x}-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty}4+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7}{x}}=\frac{0-0}{4+0}=0$$

【例 8】 求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-x^2+5}{x^2+4}$.

解 当$x\to\infty$时,分子、分母的极限都是∞,因此不能直接用运算法则求极限. 但是与上例不同,本题分子的次数大于分母的次数. 因为

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+4}{3x^3-x^2+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{x^2}{x^3}+\dfrac{4}{x^3}}{\dfrac{3x^3}{x^3}-\dfrac{x^2}{x^3}+\dfrac{5}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{x^3}}{3-\dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{x^3}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4}{x^3}}{\lim\limits_{x\to\infty}3-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5}{x^3}}=\frac{0+0}{3-0+0}=0$$

所以$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-x^2+5}{x^2+4}=\infty$.

注意 称分子、分母都无限增大的极限为“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型未定式,其极限的一般求法是先将分式的分子、分母同除以x的最高次幂,然后求极限. 此外,归纳例6、例7和例8,可以得出以下一般结论:

如果$f(x)=\dfrac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}$($a_0b_0\neq0$;$m,n$为非负常数),则

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\begin{cases}0, & n>m,\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & n=m,\\ \infty, & n<m\end{cases}$$

【例 9】 如图1-26所示,圆锥的底面半径为r,高为h,把高n等分,以$\dfrac{h}{n}$为高,在圆锥内作出$n-1$个内接圆柱. 求证:当n无限增大时,这些圆锥的体积之和的极限是圆锥的体积.

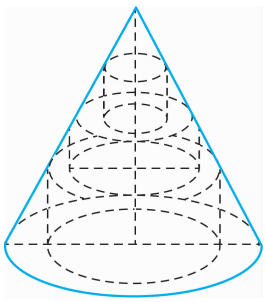

图 1-26

证明 设最下面的内接圆柱的底面半径为r_1,则$\dfrac{r_1}{r}=\dfrac{(n-1)h}{nh}$,解得$r_1=\dfrac{n-1}{n}r$. 同样可以求出其余圆柱的底面半径分别为$r_2=\dfrac{n-2}{n}r,r_3=\dfrac{n-3}{n}r,\cdots,r_{n-1}=\dfrac{1}{n}r$.

圆柱的体积和为

$$\begin{aligned}V_{n-1}&=\pi r_1^2\frac{h}{n}+\pi r_2^2\frac{h}{n}+\cdots+\pi r_{n-1}^2\frac{h}{n}\\&=\frac{\pi h}{n}\left[\frac{(n-1)^2}{n^2}+\frac{(n-2)^2}{n^2}+\frac{(n-3)^2}{n^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right]r^2\\&=\frac{\pi r^2h}{n^3}[1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2]=\frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3}\pi r^2h\end{aligned}$$

当n无限增大时,$V=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3}\pi r^2h=\dfrac{1}{3}\pi r^2h$.

之前在初等数学中学习圆锥的体积公式时没有给出具体的证明,现在通过学习极限的知识,可以很轻松地推导出圆锥的体积公式.

案例解决

设火箭要达到的最大高度为h,那么发射火箭所需要的初速度为

$$v=f(h)=\sqrt{\frac{2gRh}{h+R}}=\sqrt{\frac{2gR}{1+\dfrac{R}{h}}},h\in(0,+\infty)$$

其中,g为重力加速度,R为地球半径.

求火箭脱离地球引力所需要的最小速度就是求 $h\to+\infty$ 时，函数 $v=f(h)$ 的极限值，即 $v=\lim\limits_{h\to\infty}f(h)=\lim\limits_{h\to\infty}\sqrt{\dfrac{2gRh}{h+R}}=\lim\limits_{h\to\infty}\sqrt{\dfrac{2gR}{1+\dfrac{R}{h}}}=\sqrt{2gR}=11\ 200(\mathrm{m/s})$. 其中，$g$ 取 $9.8\ \mathrm{m/s^2}$，R 取 6.4×10^6 m. 这个极限值就是第二宇宙速度.

习题 1-5

A 组

1. 指出在下列条件下，哪些函数是无穷小，哪些函数是无穷大.

(1) $x\to\pi, y=\sin x$；　(2) $x\to2, y=x^2-3x+2$；

(3) $x\to+\infty, y=4^x$；　(4) $x\to-1, y=\dfrac{1}{x+1}$.

2. 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to0}x\sin x$；　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cos x}{x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x+1}{x+2}$；　(4) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2+x+1)$.

3. 求下列函数的极限.

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+x}{x}$；

(2) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-x-2}{x^2+x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to-1}\left[\left(7-\dfrac{x}{3}\right)\left(5+\dfrac{4}{x^2}\right)\right]$；

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-1}{7x^2+4x+3}$；

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-5}{x^3+2x+6}$；

(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x^2+x+3}{(x+1)(2x-1)}$；

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)}{5x^3+x^2}$.

4. (游戏销售)当一种新的电子游戏程序被推出时，其销售量在短期内会迅速增加，然后开始下降，其函数关系为 $s(t)=\dfrac{200t}{t^2+100}$，其中 t 为月份. 为了对该产品的长期销售作出预测，请建立相应的表达式.

5. (细菌培养)已知时刻 t(单位：min)时容器中的细菌个数为 $y=10^4\times2^{kt}$ (k 为常数).

(1)若经过 30 min，细菌个数增加一倍，求 k 值；(2)预测 $t\to+\infty$ 时容器中细菌的个数.

B 组

1. 下列函数在什么变化过程中是无穷小？又在什么变化过程中是无穷大？

(1) $y=\dfrac{1}{(x-1)^2}$；

(2) $y=\dfrac{x+1}{x^3-1}$；

(3) $y=\dfrac{x^3-3x+2}{x-2}$；

(4) $y=\sqrt{2x-1}$；

(5) $y=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}\ (0\leqslant x\leqslant2\pi)$；

(6) $y=a^x\ (0<a<1)$.

2. 已知 $f(x)=\dfrac{px^2-2}{x^2+1}+3qx+5$，当 $x\to\infty$ 时，p，q 取何值时 $f(x)$ 为无穷小？p，q 取何值时 $f(x)$ 为无穷大？

3. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)^4-1}{2x^4+1}$；

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)^4-1}{2x^4+1}$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x^2}{1-x^2}+2^{\frac{1}{x}}\right)$；

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1}\right)$.

4. (产品价格预测)设一产品的价格满足 $P(t)=20-20e^{-0.5t}$(元)，并且随着时间的推移发生变化. 请你对该产品的长期价格作出预测.

5. (产品利润中的极限问题)已知某厂生产 x 个汽车轮胎的成本为 $C(x)=300+\sqrt{1+x^2}$(元)，生产 x 个汽车轮胎的平均成本为 $\dfrac{C(x)}{x}$. 当产量很大时，每个轮胎的成本大致为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{C(x)}{x}$，试求这个极限.

第六节　函数的连续性

案例引入

2013 年 9 月 7 日，习近平总书记在哈萨克斯坦纳扎尔巴耶夫大学发表演讲并回答了学生们提出的问题，在谈到环境保护问题时指出："我们既要绿水青山，也要金山银山．宁要绿水青山，不要金山银山，而且绿水青山就是金山银山．"这句话生动形象地表达了我国大力推进生态文明建设的鲜明态度和坚定决心．建设生态文明是实现中华民族伟大复兴中国梦的重要内容，我们要像对待生命一样对待生态环境，如今"两山"理念已经成为全社会的共识，绿水青山随处可见，蓝天白云已成常态，中国人民一起书写着蓝天碧水间的幸福故事．

"五岳归来不看山，黄山归来不看岳"，被列入世界文化与自然遗产和世界地质公园的黄山吸引了大量的游客来游玩．一名游客于某日早晨 7 点离开黄山脚下的旅馆，沿着一条上山的路爬山，于当天下午 7 点来到黄山顶上的旅馆．第二天早上 7 点，他从山顶沿原路下山，于当天下午 7 点回到黄山脚下的旅馆．试证明在这条路上存在这样一个点，游客在两天的同一时刻都经过此点．

案例分析

游客在上山和下山过程中所走的路程都随着时间的推进，具有函数关系并且是连续变化的．那么，在数学中，如何定义连续函数呢？连续函数具有什么样的特性呢？

自 19 世纪以来，在大地构造学中占统治地位的是由外国学者提出的"地槽-地台学说"：地壳的演化只有两个阶段，即地槽和地台，而且是"非槽即台"．然而，地壳的演化是一个连续的过程，地槽和地台只是它的两个极端．从哲学上讲，"地槽-地台学说"是一种"非此即彼"的二元认识论，不符合地壳发展的客观规律；从数学上讲，也与本节将要学习的连续函数零点定理相悖．正是基于这种认识，我国著名地质学家陈国达院士根据我国华北地区的大量地质现象，开创性地提出了地洼学说：在地槽和地台之间存在一个中间过渡状态——地洼（图 1-27）．

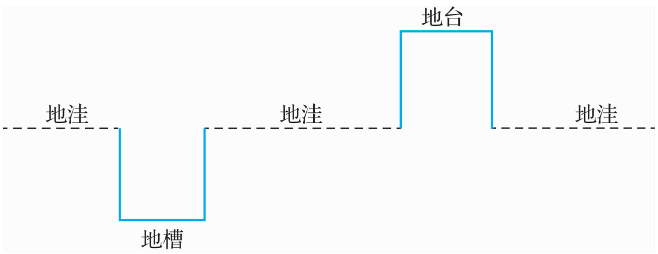

图 1-27

自然界中除了地质，时间与空间也都是连续的，实际生活中还有大量类似现象，如人体身高的增长、植物的生长、气温的变化、河水的流动都是随着时间连续变化的．事实上，当 t 的变化 Δt 很微小时，人的高度的变化 Δh 也是很微小的，即当 $\Delta t\to 0$ 时，$\Delta h\to 0$，反映在函数上，就是函数的连续性．所谓函数连续变化，直观来看，就是函数的图像是连续不间断的；从数量上分析，当自变量的变化很微小时，函数值的变化也是

很微小的. 本节将利用极限来讨论函数的连续性问题.

一、函数的增量

为了刻画函数的连续性,我们先引入增量的概念. Δx 称为自变量 x 从 x_0 变到 x_1 的增量,记为 $\Delta x=x_1-x_0$. Δx 可正可负,当 $\Delta x>0$ 时,x 在增大;当 $\Delta x<0$ 时,x 在减少. Δy 称为函数 $f(x)$从 x_0 变到 x_1 的增量,记为 $\Delta y=f(x_1)-f(x_0)$. 如图 1-28(a)所示,当自变量 x 由点 x_0 变成 $x_0+\Delta x$ 时,$\Delta y>0$;如图 1-28(b)所示,当自变量 x 由点 x_0 变成 $x_0+\Delta x$ 时,$\Delta y<0$.

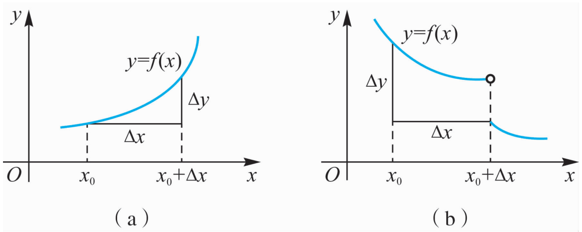

图 1-28

当 $\Delta x\to 0(x\to x_0)$时,如果 $\Delta y\to 0$,即 $f(x)\to f(x_0)$,那么函数 $f(x)$的图像在点 x_0 处的形态正是反映了函数 $f(x)$在点 x_0 处连续的事实.

二、函数连续性的概念

图 1-29(a)为函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$的图像,由于函数在点 $x=1$ 处无定义,因此函数在点 $x=1$ 处断开,即不连续. 从数量上看,函数在点 $x=1$ 处的极限为$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$,但函数在点 $x=1$ 处的函数值却不存在,也就没有极限与函数值相等的关系.

图 1-29(b)为函数 $y=\begin{cases}1, & x\geqslant 0,\\ -1, & x<0\end{cases}$ 的图像,函数在点 $x=0$ 处有定义,但当 x 经过点 $x=0$ 时,函数值发生了跳跃,其图像在点 $x=0$ 处也是断开的,即不连续. 从数量上看,函数在点 $x=0$ 处的左、右极限存在却不相等($\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=-1$),因此$\lim\limits_{x\to 1}f(x)$不存在,于是也就没有极限与函数值相等的关系.

图 1-29(c)为函数 $y=x+1$ 的图像,与前面两个函数不同,函数在点 $x=2$ 处有定义,图像在点$x=2$处没有断开,即连续. 从数量上看,函数在点 $x=2$ 处的极限$\lim\limits_{x\to 2}(x+1)=3$ 与函数值 $f(2)=3$ 是相等的关系.

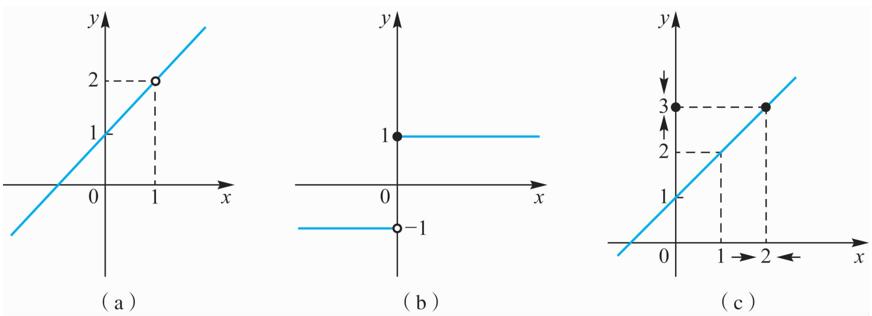

图 1-29

总结以上的分析,我们给出下面的定义.

定义 1-18 若函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处及其附近有定义，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续.

如图 1-30 所示，函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处有定义，并且当 $x\to x_0$ 时，函数 $y=f(x)$ 的极限就是函数在点 x_0 处的函数值 $y=f(x_0)$，这时，曲线 $y=f(x)$ 在点 x_0 处是连续的.

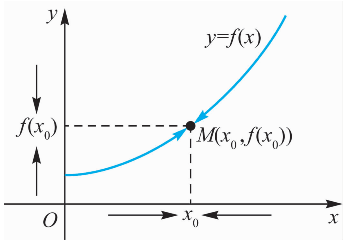

图 1-30

【例 1】 用定义证明函数 $y=2x+1$ 在点 $x=3$ 处连续.

证明 函数 $f(x)$ 在点 $x=3$ 处及其附近有定义，因为

$$f(3)=2\times3+1=7$$

$$\lim_{x\to3}(2x+1)=\lim_{x\to3}2x+\lim_{x\to3}1=2\lim_{x\to3}x+\lim_{x\to3}1=2\times3+1=7$$

于是 $\lim\limits_{x\to3}f(x)=f(3)$，所以函数 $y=2x+1$ 在点 $x=3$ 处连续.

> **注意** 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续必须同时满足以下三个条件：
> (1) $f(x)$ 在点 x_0 及其附近有定义.
> (2) 极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在.
> (3) 极限值等于函数值，即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

【例 2】 试确定函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant0,\\ x-1, & x>0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处的连续性.

解 函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处及其附近有定义，因为 $f(0)=0^2=0$，$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}x^2=0$，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(x-1)=-1$，于是，函数在点 $x=0$ 处的左、右极限不相等，所以函数在点 $x=0$ 处的极限不存在且不连续.

对于函数连续的定义，还可以用函数增量来描述：若函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处及其附近有定义，当自变量 x 在点 x_0 处的增量 Δx 趋近于 0 时，函数相应的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 也趋近于 0，即 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\Delta y=0$，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续. 从直观上认识，当自变量的变化很微小时，函数值的变化也很微小，那么函数就是连续的.

【例 3】 某城市出租车白天的收费 y（单位：元）与路程 x（单位：km）之间的关系为 $f(x)=\begin{cases}5+1.2x, & 0<x<7,\\ 13.4+2.1(x-7), & x\geqslant7,\end{cases}$ 求 $\lim\limits_{x\to7}f(x)$，函数 $f(x)$ 在点 $x=7$ 处连续吗？

解 因为 $\lim\limits_{x\to7^-}f(x)=\lim\limits_{x\to7^-}(5+1.2x)=13.4$，$\lim\limits_{x\to7^+}f(x)=\lim\limits_{x\to7^+}[13.4+2.1(x-7)]=13.4$，所以，$\lim\limits_{x\to7}f(x)=13.4$. 又因为 $f(7)=13.4$，于是 $\lim\limits_{x\to7}f(x)=f(7)$，所以，函数 $f(x)$ 在点 $x=7$ 处连续.

三、函数的间断点

导线中的电流通常是连续变化的，但当电流增加到一定程度时，保险丝会被烧断，电流突然变为 0，这时连续性被破坏而出现间断.

1. 间断点的概念

定义 1-19 如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续，则称 $f(x)$ 在点 x_0 处间断，并称 x_0 为 $f(x)$ 的间断点.

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处间断有以下三种可能：

(1) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处没有定义.

(2) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处虽有定义，但极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在.

(3) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处虽有定义，且极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$.

例如，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在点 $x=0$ 处无定义，所以 $x=0$ 是其间断点.

又如，函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0,\\ x+1, & x<0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处有定义，$f(0)=0$，但 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=1$，故极限 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在，所以 $x=0$ 是其间断点.

微课
函数的间断点

再如，函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1}, & x\neq 1,\\ 1, & x=1\end{cases}$ 在点 $x=1$ 处有定义，$f(1)=1$，极限 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=2$，故极限 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 存在但不等于 $f(1)$，所以 $x=1$ 是其间断点.

2. 间断点的分类

设 x_0 为函数 $f(x)$ 的间断点，若函数在点 x_0 处的左、右极限都存在，则称 x_0 为函数的第一类间断点；凡不是第一类间断点，即函数在点 x_0 处的左、右极限至少有一个不存在的间断点都称为第二类间断点.

在第一类间断点中，如果函数的左、右极限存在但不相等，这种间断点又称为跳跃间断点；如果函数的左、右极限存在且相等（极限存在），这种间断点又称为可去间断点.

例如，$x=\dfrac{\pi}{2}$ 为 $y=\tan x$ 的第二类间断点；$x=0$ 为 $y=\sin\dfrac{1}{x}$ 的第二类间断点；$x=1$ 为 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 的可去间断点.

又如，对于 $y=f(x)=\begin{cases}x, & x\neq 1,\\ \dfrac{1}{2}, & x=1,\end{cases}$ 因为 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=1\neq f(1)$，所以 $x=1$ 为其可去间断点；对于 $y=f(x)=\begin{cases}x-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ x+1, & x>0,\end{cases}$ 因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=1$，$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=-1$，所以 $x=0$ 为其跳跃间断点.

【例 4】（冰雪融化所需要的热量）设 1 g 冰从 -40 ℃升到 100 ℃所需要的热量（单位：J）为 $f(x)=\begin{cases}2.1x+84, & -40\leqslant x\leqslant 0,\\ 4.2x+420, & x>0.\end{cases}$ 试问当 $x=0$ 时，函数是否连续？如不连续，指出其间断点的类型，并解释其几何意义.

解　因为 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(2.1x+84)=84$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(4.2x+420)=420$，于是 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在，函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处不连续.

由于此时函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处的左、右极限都存在，所以 $x=0$ 为函数 $f(x)$ 的第一类间断点，说明冰化成水时所需的热量会突然增加.

四、连续函数和初等函数的连续性

如果函数 $f(x)$ 在某区间上的每一点处都连续，则称它在该区间上连续或称它为该区间上的连续函数.

如果函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内的每一点处都连续，则称函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续或称它为开区间 (a,b) 内的连续函数.

如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 内有定义，在开区间 (a,b) 内连续，且在区间端点处满足：

$$\lim_{x\to a^+}f(x)=f(a),\ \lim_{x\to b^-}f(x)=f(b)$$

则称函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 内连续或称它为闭区间 $[a,b]$ 内的连续函数.

例如，函数 $y=x^2$ 在闭区间 $[-2,3]$ 内连续；函数 $y=\lg x$ 在开区间 $(0,1)$ 内连续，但在闭区间 $[0,1]$ 内不连续，因为它在左端点 $x=0$ 处无定义.

对于初等函数的连续性，可以证明下面的结论：

(1)基本初等函数在其定义域内都是连续的.

(2)连续函数经过有限次的四则运算和复合后，得到的函数仍然是连续的.

(3)一切初等函数在定义区间内都是连续的，初等函数的连续区间就是其定义区间，初等函数在其定义区间内点 x_0 处的极限值就是其函数值 $f(x_0)$，即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

知识链接

达达尼尔海峡(Dardanelles Strait)位于小亚细亚半岛与巴尔干半岛之间，是亚洲与欧洲分界处的地峡，呈东北-西南走向，东北端通黑海，西南端通爱琴海，是黑海通往地中海的重要通道. 水深57～92 m. 海峡中海流的流向很有意思，呈相反的上下两层，上层(厚度为10～20 m)是自黑海流向爱琴海的盐度较小的海流，下层是自爱琴海流向黑海的盐度较大的海流. 人们发现了问题：海流的流向是如何从一个方向变成相反方向的？用数学知识解释：海水的流动是连续的，这相当于一个连续函数；流向发生反转，相当于函数值的正负变化；相应于函数的零点，海水一定在某个层面上保持静止. 这样，我们就知道了海水流向的变化过程：从上往下，海水的流速逐渐变缓，直到某个层面，海水静止，越过这个静止层后，流向反转，流速逐渐由缓变急. 而后，地理学家也通过探测证明了这一变化现象的存在.

五、闭区间上连续函数的性质

微课
闭区间上连续函数的性质

1. 最值性(最值定理)

若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上必有最大值和最小值.

推论： 在闭区间上连续的函数必有界.

2. 介值性(介值定理)

如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，$f(a)\neq f(b)$，且常数 μ 介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=\mu$ 成立.

推论： 闭区间上的连续函数必能取得它的最大值与最小值之间的一切值.

3. 零点存在性(零点定理)

若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=0$.

【例 5】 证明方程 $x^3-4x^2+1=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少有一个根.

证明 设 $f(x)=x^3-4x^2+1$，显然 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且

$$f(0)=1>0,\ f(1)=-2<0$$

根据零点定理，至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=0$，即

$$\xi^3-4\xi^2+1=0,\ \xi\in(0,1)$$

所以方程 $x^3-4x^2+1=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少有一个根 ξ.

【例 6】 任意给一张纸片，其面积为 A，试证明必可将它一刀剪为面积相等的两片.

证明 如图 1-31 所示，建立直角坐标系，对于面积函数 $S(\theta)$，易知 $S(\theta)$ 为 θ 的连续函数，因为 $S(\alpha)=0$，$S(\beta)=A$，由介值定理可知必存在 $\theta_0\in(\alpha,\beta)$，使得 $S(\theta_0)=\dfrac{A}{2}$，此即说明可将纸片一刀剪为面积相等的两片.

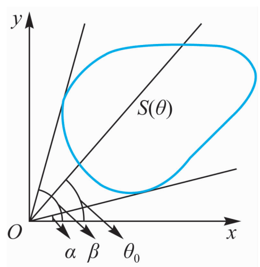

图 1-31

水在 0 ℃以上呈液态，在 0 ℃以下结冰呈固态. 温度的变化是连续的，当温度从零上变成零下时，根据零点定理，必定有一个零点 ξ，显然这个零点就是 0 ℃. 事

实上,在物理学上,0 ℃称为水的冰点,即水的凝固点,亦即水和冰可平衡共存的温度.我们把零点定理稍加扩展.把函数 $f(x)$ 看成事物的一种连续变化,把 $f(a)$ 和 $f(b)$ 分别视为事物的两个极端.零点 ξ 看成一种中间状态.这样一来,零点定理恰好是哲学上的结论:事物从一个极端变到另一个极端,必定经过一个中间过渡状态.

案例解决

设两个旅馆之间的路程为 L,以 $f(t)$ 表示在时刻 $t(t\in[7,19])$ 游客离开山脚下的旅馆的路程,则可知 $f(t)$ 是区间 $[7,19]$ 上的连续函数,且有 $f(7)=0, f(19)=L$.

以 $g(t)$ 表示游客在第二天下山时在与前一天相同时刻尚未走完的路程,则可知 $g(t)$ 是区间 $[7,19]$ 上的连续函数,且有 $g(7)=L, g(19)=0$.

于是,原问题可转化为证明存在 $\xi\in[7,19]$,使 $f(\xi)=g(\xi)$.

作辅助函数 $\varphi(t)=f(t)-g(t)$,则 $\varphi(t)$ 在区间 $[7,19]$ 上连续,且有

$$\varphi(7)\varphi(19)=[f(7)-g(7)][f(19)-g(19)]=-L^2<0$$

根据闭区间上连续函数的零点定理可知,一定存在 $\xi\in[7,19]$,使 $\varphi(\xi)=0$.因此,就得到了所需要证明的结论.

习题 1-6

A 组

1. 设 $y=x^2-1, x_0=1$,当 $\Delta x=0.1, -0.2$ 时,求函数的增量 Δy.

2. 用定义证明函数 $y=x^2-1$ 在点 $x=1$ 处连续.

3. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x^2-1, & x>0, \\ 1+2x, & x\leqslant 0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 处的连续性.

4. 试确定下列函数的间断点并指明类型.

(1) $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x+2}$;　(2) $f(x)=\begin{cases} x, & x\geqslant 0, \\ 1+x, & x<0. \end{cases}$

5. 说明下列函数在给定区间内是否连续.

(1) $y=\dfrac{1}{x^2}, x\in(0,1)$;　(2) $y=\ln x, x\in(0,1)$;

(3) $y=\mathrm{e}^x, x\in\mathbf{R}$;　(4) $y=\tan x, x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$.

6. 证明方程 $x^4+2x^2-x-2=0$ 在区间 $(0,2)$ 内至少有一个实根.

7. 做机械振动的物体,其运动方程为 $y=A\sin(\omega t+\varphi_0)$ $(t\geqslant 0)$,试分析此函数的连续性.

8. 一个病人每隔 4 h 注射一次 150 mg 的药物,图 1-32 显示了病人血液中的药物总量 $f(t)$ 与时间 t 之间的关系.试估算 $\lim\limits_{x\to 12^+} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to 12^-} f(x)$ 的值,并由此判断函数 $f(t)$ 在 $t=12$ 时是否连续.

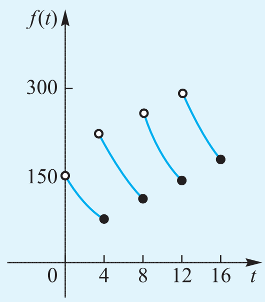

图 1-32

B 组

1. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}, & x\neq 1, \\ 3, & x=1 \end{cases}$ 在点 $x=1$ 处的连续性.

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin 2x}{x}, & x<0, \\ k, & x=0, \\ x\sin\dfrac{1}{x}+2, & x>0, \end{cases}$ k 为何值时,使得函数在点 $x=0$ 处连续.

3. 设函数 $f(x)=\begin{cases} x^2+x, & x<0, \\ a, & x\geqslant 0 \end{cases}$ 且函数在点 $x=0$ 处连续，求 a 的值.

4. 求下列函数的间断点并指出类型.

(1) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$； (2) $f(x)=\begin{cases} 5x-1, & x\geqslant 1, \\ \dfrac{\sin(x-1)}{x-1}, & x<1. \end{cases}$

5. 证明方程 $\sin x-x+1=0$ 在 1 和 π 之间至少存在一个实根.

6. (停车场收费问题)一个停车场第 1 h(或不到 1 h)收费 3 元，以后每小时(或不到整时)收费 2 元，每天最多收费 10 元. 试讨论此函数的间断点及它们的意义.

数学实验一

MATLAB 入门及其在函数与极限中的应用

MATLAB 是英文“MATrix LABoratory”的缩写，中文意思为“矩阵实验室”，是由美国 MathWorks 公司开发的大型科学计算软件. MATLAB 的功能十分丰富而强大，它不但可以解决数学中的数值计算问题，而且可以解决符号演算问题，并且能够方便地绘制各种函数图像. 下面以 Windows 操作系统下的 MATLAB R2016b 为蓝本，介绍一些简单常用的 MATLAB 命令和操作.

一、MATLAB 入门

1. MATLAB 操作界面

在 Windows 操作系统下安装并启动 MATLAB，会弹出如图 1-33 所示的 MATLAB 系统默认的操作界面. 单击“主页”“绘图”“APP”选项卡，即可在三个界面之间进行切换.“绘图”“APP”两个界面的布局与“主页”界面的布局基本一致. 在“主页”界面中除标题栏、菜单栏和工具栏外，主要有三个窗口：当前文件夹、工作区和命令行窗口. 当前文件夹是指 MATLAB 当前访问的文件所在的文件夹；在工作区内，用户可以浏览已经创建或者已经导入的变量数据；在命令行窗口的命令行提示符“>>”之后，用户可以输入创建变量命令或导入调用函数命令的程序代码.

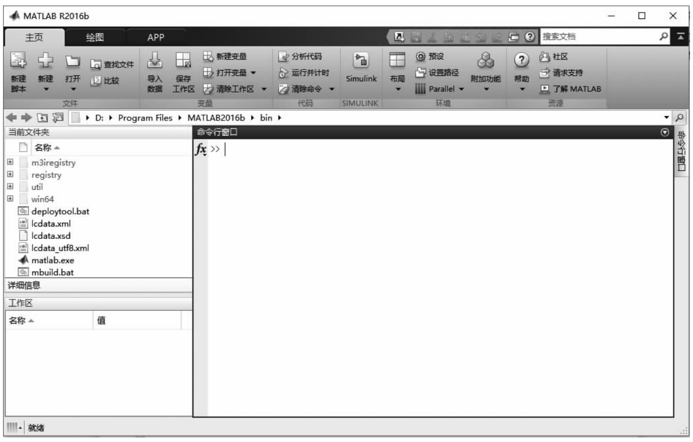

图 1-33

2. MATLAB 操作基础

MATLAB 的基本数据单位是矩阵，它的命令和表达式与数学、工程计算中常用的形式十分相似，这使得矩阵运算变得非常简洁、方便与高效. 数据的加、减、乘、除，以及数学函数的运算均是特殊的矩阵运算，掌握常量、变量、算术运算符及常用数学函数的用法是应用 MATLAB 的基础.

(1) 常量. 除数值常量外，MATLAB 中自带一些固有的常量，这些常量的表示符号及其含义如表 1-9 所示.

表 1-9

常量符号	含义描述
i 或 j	虚数单位，即 $i^2=j^2=-1$
pi	圆周率，即 $\pi=3.141\ 592\ 6\cdots$
eps	浮点数的相对误差，即 $eps=2.220\ 4\times10^{-16}$
INF 或 inf	无穷大，包括 $+\infty$，$-\infty$
NaN 或 nan	不确定的值，包括 0/0，∞/∞

当某个数的绝对值小于 eps 时，机器认为这个数是 0. 在 MATLAB 命令行窗口中分别输入“eps”“pi”，按“Enter”键就会获得这些常量的数值结果.

```
>> eps
ans = 2.2204e-16
>> pi
ans = 3.1416
```

这些结果会默认赋值给变量 ans，其中 2.220 4e—16 即为 $2.220\ 4\times10^{-16}$. 一般情况下，在 MATLAB 内部，每一个数值数据都是用双精度浮点数来表示和存储的，默认的数据显示仅有 5 位长度，需要时用户可以利用 format 函数设置数值数据的显示格式. 例如，“format rat”命令可以使得结果显示为有理数格式.

注意　MATLAB 的命令必须在英文状态下输入，解释说明的语句可以是中文，但要在该语句前面加百分号“%”.

(2)变量. 变量是指在程序运行过程中其值可以改变的量. MATLAB 中的变量是以矩阵或数组的方式存储的，每个变量通常赋予一个变量名. 变量的命名规则归纳如下：

①变量名必须以字母开头，且只能由英文字母、数字或下划线这三类符号组成.

②变量名区分字母的大小写.

③变量名不能超过 63 个字符.

④变量名不能与 MATLAB 中自带的常量符号、函数名称或者程序语句的关键字(如 i，j，pi，eps，who，length，for，if，while，end 等)冲突.

注意　用户自定义的变量必须通过赋值语句赋值，或者将其预定义为符号变量.

变量的赋值语句有以下两种形式：

①变量=表达式.

②表达式.

其中，第②种形式的数值结果直接赋值给默认结果变量 ans. 若在表达式的后面输入英文分号“;”，则 MATLAB 会执行该语句命令但不会在命令行窗口中显示变量及其数值.

(3)算术运算符. MATLAB 中的算术运算符及其功能描述如表 1-10 所示.

表 1-10

算术运算符	功能描述	算术运算符	功能描述
+	矩阵的对应元素相加	/	矩阵右除
−	矩阵的对应元素相减	\	矩阵左除
*	矩阵相乘	./	矩阵对应元素右除
.*	矩阵的对应元素相乘	.\	矩阵对应元素左除
^	矩阵的幂	'	矩阵的共轭转置
.^	矩阵元素的幂	.'	矩阵的非共轭转置

注意 ①数是1行1列的特殊矩阵,一般矩阵(数组)的全部元素需要放在中括号内输入,同行元素之间用逗号或者空格分开,换行时使用分号.

②矩阵(数组)的每个元素都进行运算要使用“.*”“./”“.\”和“.^”.

③矩阵的相关运算要符合一定条件,具体将在数学实验八中介绍.

MATLAB在执行含有算术运算符的表达式时遵循优先级原则,即幂“^”(“.^”)和转置“'”(“.'”)运算优先级最高,其次是乘“*”(“.*”)、除“/”(“./”)、“\”(“.\”),最后是加“+”、减“-”.如果两个运算优先级相同,则按从左到右的顺序执行,改变运算优先级要采用小括号,需要使用多个括号时也一律使用小括号,不得使用中括号和大括号.

例如,

```
>> 4+2*3^2          %先计算幂运算3^2=9,再计算乘法2*9=18,最后计算加法4+18=22
ans = 22
>> (1+2)/3*4        %右除符号“/”的右面是分母
ans = 4
>> 4\2-1            %左除符号“\”的左面是分母
ans = -0.5000
>> A=[1,2;1,2]      %输入2行2列的矩阵,并将其赋值给变量A
A =   1     2
      1     2
>> B=[1 1;2 2]      %输入2行2列的矩阵,并将其赋值给变量B
B =   1     1
      2     2
>> C=A*B            %矩阵A与矩阵B进行乘法运算
C =   5     5
      5     5
>> D=A.*B           %矩阵A与矩阵B的对应元素进行乘法运算
D =   1     2
      2     4
```

(4)基本初等函数.MATLAB提供了丰富的数学函数,其用法和名称与高等数学中的基本一致.函数由函数名和参数组成,函数命令的格式为函数名(参数).常用基本初等函数的命令格式及功能描述如表1-11所示.

表1-11

命令格式	功能描述	命令格式	功能描述
sqrt(x)	算术平方根$\sqrt{x}$	tan(x)	正切函数 $\tan x$
pow2(x)	指数 2^x	cot(x)	余切函数 $\cot x$
exp(x)	自然指数 e^x	sec(x)	正割函数 $\sec x$
log(x)	自然对数 $\ln x$	csc(x)	余割函数 $\csc x$
log10(x)	常用对数 $\log_{10}x$	asin(x)	反正弦函数 $\arcsin x$
log2(x)	以2为底的对数 $\log_2 x$	acos(x)	反余弦函数 $\arccos x$
sin(x)	正弦函数 $\sin x$	atan(x)	反正切函数 $\arctan x$
cos(x)	余弦函数 $\cos x$	acot(x)	反余切函数 $\operatorname{arccot} x$

注意 ①高等数学中常用的绝对值函数 $|x|$ 的调用命令为 abs(x).

②表 1-11 中没有的指数函数使用幂运算符号“^”. 例如，3^5 输入 3^5.

③表 1-11 中没有的对数函数使用对数的换底公式. 例如，$\log_7 5$ 输入 log(5)/log(7).

④三角函数自变量的取值必须是弧度制.

⑤基本初等函数与常数相乘时不能省略乘号“*”.

二、MATLAB 中的符号函数

函数是高等数学的主要研究对象. 在函数的三种表达形式中，函数解析式是最常用的一种，其中，自变量和因变量均为未知量，常用字母符号表示. 在 MATLAB 中进行符号运算时，首先要定义符号变量，建立符号函数表达式.

1. 建立符号函数表达式

建立符号函数表达式通常采用以下两种方式：

(1)先用 syms 命令声明符号变量，再建立符号函数表达式，其命令格式如下：

```
>> syms x a b          %声明 x,a,b 均为符号变量
>> y = a * x + b;      %建立符号函数表达式 y=ax+b
```

注意 syms 命令后面的参数要跟在空格之后，多个变量之间也必须用空格分开.

(2)直接用 sym 命令定义符号函数表达式，其命令格式如下：

```
>> y = sym('a * x + b')    %建立符号函数表达式 y=ax+b
```

注意 sym 命令后要加小括号，符号表达式也要放入单引号内，且系统仅识别变量 y 为符号表达式，并不识别符号变量 x,a,b.

通常情况下，建议选用第(1)种方式建立符号函数表达式.

2. 化简符号函数表达式

MATLAB 可通过函数命令对符号函数表达式进行因式分解、展开、合并、化简等，命令格式及功能描述如表 1-12 所示.

表 1-12

命令格式	功能描述
factor(S)	返回符号函数表达式 S 的所有不可约因子
expand(S)	展开符号函数表达式 S
collect(S)	按默认变量将符号函数表达式 S 合并同类项
collect(S,v)	按指定变量 v 将符号函数表达式 S 合并同类项
simplify(S)	返回符号函数表达式 S 的简化形式

例如，

```
>> syms x
>> f = x^2 + 5 * x + 4;g = sin(x)^2 + cos(x)^2;
>> factor(f)
ans = [ x + 4,x + 1]
>> simplify(g)
ans = 1
```

3. 计算指定点处的函数值

在 MATLAB 中可用 subs 命令计算函数在某一点处的函数值，命令格式为 subs(S,old,new)，其功能为返回符号函数表达式 S 中用新值 new 替换旧值 old 后的结果.

例如，

```
>> syms x a b
>> y = a * x + b;
>> f1 = subs(y,x,1)            %计算符号函数在点 x=1 处的值，用 1 替换表达式中的 x
f1 = a + b
>> f = subs(y,[a,b],[3,4])     %可以同时替换多个变量，用矩阵数组[3,4]替换[a,b]
f = 3 * x + 4
```

4. 求解函数的反函数

利用 MATLAB 中的 finverse 命令可以求解符号函数的反函数，其命令格式及功能描述如表 1-13 所示.

表 1-13

命令格式	功能描述
$g=$ finverse(f)	返回单变量符号函数 f 对于独立变量的反函数 g
$g=$ finverse(f,v)	返回多变量符号函数 f 对于指定变量 v 的反函数 g

【例 1】 求函数 $y=\sqrt[3]{x+1}$ 的反函数.

解 MATLAB 求解命令及结果如下：

```
>> syms x
>> f = (x + 1)^(1/3);          %注意根式与分数指数幂的转换和运算优先级的顺序
>> g = finverse(f)             %计算符号函数 f 的反函数 g
g = x^3 - 1
```

根据计算结果，原函数的反函数为 $y=x^3-1$，其定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

【例 2】 求函数 $f(m)=3nm+n^2$ 的反函数，其中 n 为非零常数.

解 MATLAB 求解命令及结果如下：

```
>> syms m n
>> f = 3 * n * m + n^2;        %注意乘号不能省略
>> g = finverse(f,m)           %计算符号函数 f 的反函数 g，指定自变量为 m
g = ( - n^2 + m)/(3 * n)
```

根据计算结果，原函数的反函数为 $f^{-1}(m)=\dfrac{m-n^2}{3n}$，其定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

5. 求解代数方程(组)

含有符号变量的等式称为方程，在计算函数零点或者根据某点处的函数值求该自变量的取值时会遇到代数方程的求解问题. 利用 MATLAB 的 solve 命令可以快速求解代数方程，其命令格式及功能描述如表 1-14 所示.

表 1-14

命令格式	功能描述
solve(S)	返回方程 S 对默认独立变量的解
solve(S,v)	返回方程 S 对指定变量 v 的解
solve($S_1,S_2,\cdots,S_n$)	返回由 n 个方程构成的方程组对默认变量的解
solve($S_1,S_2,\cdots,S_n,v_1,v_2,\cdots,v_n$)	返回由 n 个方程构成的方程组对指定变量的解

注意 (1)求解方程组的解时,一般将结果赋值给一组变量,方便记录结果,其命令格式为$[x_1,x_2,\cdots,x_n]=\text{solve}(S_1,S_2,\cdots,S_n,v_1,v_2,\cdots,v_n)$.

(2)方程 S 可以是含有逻辑等号"=="的符号方程,也可以是代表方程 $S=0$ 的符号函数表达式 S. 为方便起见,我们一般将方程转化为右端为 0 的等式.

【例 3】 汽车刹车后轮胎摩擦的痕迹长度 S(m)与车速 v(km/h)的函数关系为 $S=\frac{v^2}{400}$. 在一起车祸现场,一辆汽车与行人相撞,警察测得汽车的刹车距离为 $S=10.24$ m. 若汽车超速,则驾驶员负全责. 问驾驶员是否负全责?($v>60$ km/h 定为超速)

解 利用 MATLAB 求解代数方程$\frac{v^2}{400}=10.24$ 的命令及结果如下:

```
>> syms v                      %声明 v 为符号变量
>> solve(v^2/400 - 10.24,v)    %求方程 v^2/400-10.24=0 的所有解
ans = - 64
       64
```

根据函数的实际定义域,v 取正实数,即 $v=64$ km/h,因为 $v>60$ km/h,所以,驾驶员应负全责.

【例 4】 求方程组$\begin{cases}x+3y=0,\\x^2+y^2=1\end{cases}$的所有解.

解 利用 MATLAB 求解代数方程组的命令及结果如下:

```
>> syms x y                              %声明 x,y 为符号变量
>> [x,y] = solve(x + 3 * y = = 0,x^2 + y^2 = = 1)    %注意方程中的等号为逻辑等号"=="
x =    (3 * 10^(1/2))/10
     - (3 * 10^(1/2))/10
y = - 10^(1/2)/10
       10^(1/2)/10
```

根据计算结果,方程组的解为$\begin{cases}x_1=\frac{3\sqrt{10}}{10},\\y_1=-\frac{\sqrt{10}}{10}\end{cases}$和$\begin{cases}x_2=-\frac{3\sqrt{10}}{10},\\y_2=\frac{\sqrt{10}}{10}.\end{cases}$

三、利用 MATLAB 绘制符号函数的二维曲线

利用 MATLAB 中的 ezplot 命令可以绘制单变量符号函数的二维曲线,可以绘制由方程确定的隐函数图像,还可以绘制由参数方程确定的函数图像,其命令格式及功能描述如表 1-15 所示.

表 1-15

命令格式	功能描述
ezplot(f,$[a,b]$)	在指定区间$[a,b]$上作出单变量符号函数 $f(x)$的图像;当参数$[a,b]$缺省时,默认为$[-2\pi,2\pi]$
ezplot(F,$[a,b,c,d]$)	在平面区域$[a,b]\times[c,d]$上作出隐函数 $F(x,y)=0$ 的图像;当参数$[a,b,c,d]$缺省时,默认为$[-2\pi,2\pi]\times[-2\pi,2\pi]$
ezplot(f,g,$[a,b]$)	在指定区间$[a,b]$上作出参数方程$\begin{cases}x=f(t),\\y=g(t)\end{cases}$所确定的函数图像;当参数$[a,b]$缺省时,默认为$[0,2\pi]$

【例 5】 在同一直角坐标系下作出下列函数的图像，并分析其特征.

(1) $y=\sin x, x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$；(2) $y=\arcsin x, x\in[-1,1]$；(3) $y=x, x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

解 利用 MATLAB 绘制函数图像的命令及结果如下：

```
>> syms x                          %声明符号变量
>> ezplot(sin(x),[-pi/2,pi/2])     %绘制正弦函数的图像(图 1-34)
>> hold on                         %保留图像窗口不关闭，叠加绘制新图像
>> ezplot(asin(x),[-1,1])          %继续绘制反正弦函数的图像(图 1-35)
>> hold on                         %保留图像窗口不关闭，叠加绘制新图像
>> ezplot(x,[-pi/2,pi/2])          %继续绘制函数 y=x 的图像(图 1-36)
```

在图 1-36 中可以观察到正弦函数的图像和反正弦函数的图像关于直线 $y=x$ 对称的特征. 为更清楚地识别各个函数的图像，可对生成的函数图像进行修饰，在图像窗口中单击工具栏中的“显示绘图工具和停靠图形”按钮，对图像的线型、颜色等进行修改，添加网格、图例和标题等内容，如图 1-37 所示.

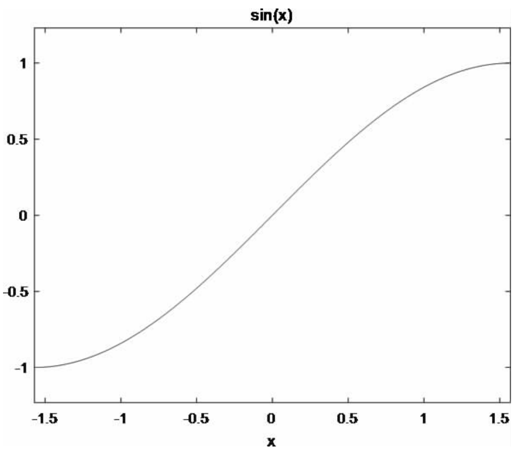

图 1-34

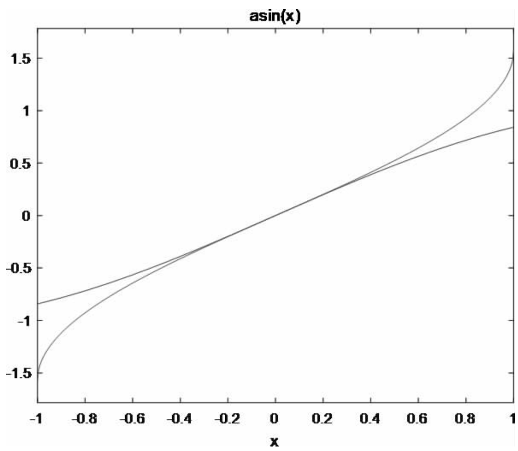

图 1-35

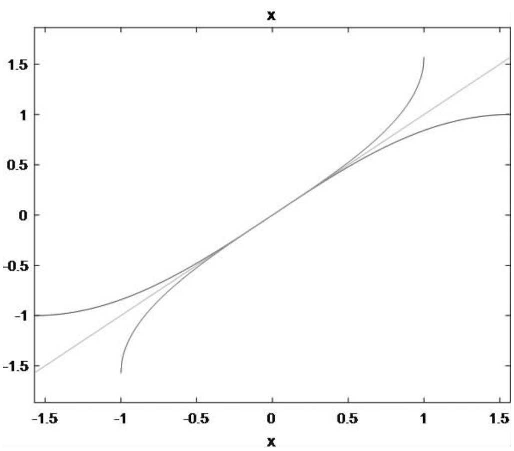

图 1-36

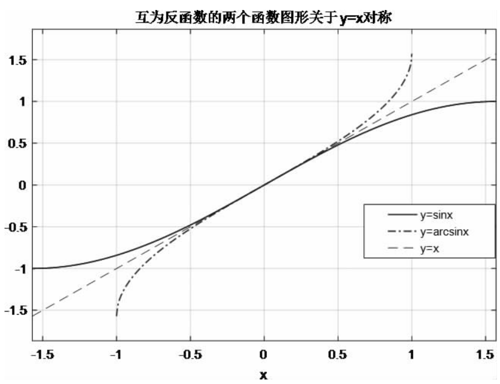

图 1-37

四、利用 MATLAB 计算符号函数的极限

在 MATLAB 中，利用 limit 命令计算符号函数的极限值，其命令格式及功能描述如表 1-16 所示.

表 1-16

命令格式	功能描述
limit(f,x,a)或 limit(f,a)	计算自变量趋于定点 a 时函数 f 的极限$\lim\limits_{x\to a}f(x)$
limit(f)	计算自变量趋于定点 0 时函数 f 的极限$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$
limit(f,x,a,'left')	计算函数 f 在定点 a 处的左极限 $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)$
limit(f,x,a,'right')	计算函数 f 在定点 a 处的右极限 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$
limit(f,x,inf)	计算自变量趋于正无穷大时函数 f 的极限 $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)$
limit(f,x,−inf)	计算自变量趋于负无穷大时函数 f 的极限 $\lim\limits_{x\to -\infty}f(x)$

注意 计算函数在一点处的左、右极限命令中的参数 left 和 right 要用一对单引号引入.

【例 6】 设函数 $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$,求$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

解 利用 MATLAB 求解函数极限的命令及结果如下:

```
>> syms x
>> limit(abs(x)/x)                    %计算自变量趋于 0 时函数的极限
ans = NaN
```

计算结果为不确定数,表明该点处的函数极限不存在.

还可先计算函数 $f(x)$的左、右极限,然后用极限存在的充要条件进行判断. MATLAB 命令及结果如下:

```
>> syms x
>> f = abs(x)/x;
>> f_left = limit(f,x,0,'left')       %计算函数在 0 点处的左极限
f_left = -1
>> f_right = limit(f,x,0,'right')     %计算函数在 0 点处的右极限
f_right = 1
```

计算结果表明,函数 $f(x)$在点 $x=0$ 处的左、右极限存在但不相等,由极限存在的充要条件可知$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$不存在.

【例 7】 求下列极限.

(1)$\lim\limits_{x\to\infty}e^{-2x}$; (2)$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{2x}$.

解 (1)函数为复合指数类型,需要利用极限存在的充要条件求解. MATLAB 求解命令及结果如下:

```
>> syms x
>> f = exp(-2*x);
>> limit(f,x,inf)
ans = 0
>> limit(f,x,-inf)
ans = Inf
```

计算结果为 $\lim\limits_{x\to +\infty}e^{-2x}=0$, $\lim\limits_{x\to -\infty}e^{-2x}=\infty$,由极限存在的充要条件可知$\lim\limits_{x\to\infty}e^{-2x}$不存在.

(2)在 MATLAB 命令行窗口中继续输入以下命令:

```
>> g = ((x+2)/(x+1))^(2*x);           %正确使用小括号,以改变运算优先级
```

```
>> limit(g,x,inf)
ans = exp(2)
```

计算结果为$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{2x}=e^2$.

五、MATLAB 应用实践

【例 8】 受到国际市场原油价格上涨的影响,2022 年 1 月 24 日,我国发布了 1 月 29 日全国柴油、汽油价格大幅上调的通知.通知下达第一时间有 10%的油车市民得知了这一消息,传播 2 h 后,有 25%的油车市民得知了这一消息.假定经过 t(h),得知此消息的油车市民比例为 $y(t)$,且消息的传播规律为 $y(t)=\dfrac{1}{1+ce^{-kt}}$,其中 c,k 为正常数.

(1)求$\lim\limits_{t\to\infty}y(t)$,并对结果作出解释;(2)求几小时后 75%的油车市民得知这一消息.

解 (1)MATLAB 的求解命令及结果如下:

```
>> syms c k t                          %声明符号变量
>> y = 1/(1 + c * exp( - k * t));       %创建符号函数表达式,注意运算优先级
>> limit(y,t,inf)                      %注意此时不能直接计算出函数的极限
ans = piecewise(c ~ = 0 & k = = 0, limit(1/(c + 1), t, Inf), (real(k) ~ = 0 | in(k, 'real')) & ~
k <= 0 | 0 < real(k) | c = = 0 | k < 0, limit(1/(c * exp( - k * t) + 1), t, Inf))
```

由于函数的分母中含有复合指数,MATLAB 无法辨识其中参数 k 的正负取值,所以此时计算不出极限.根据题目说明,参数 k 为正常数,这里不妨先假设 $k=1$,再计算函数的极限.

```
>> y = subs(y,k,1);
>> limit(y,t,inf)
ans = 1
```

计算结果为$\lim\limits_{t\to\infty}y(t)=1$.随着时间的推移,最终所有的油车市民都会得知这一消息.

(2)先利用已知条件 $y(0)=0.1$,$y(2)=0.25$ 确定未知参数.

```
>> [c,k] = solve(0.1 - 1/(1 + c * exp( - k * 0)),0.25 - 1/(1 + c * exp( - k * 2)),c,k)
c = 9
k = log(3)/2
```

求得参数后,可确定消息的传播规律为 $y(t)=\dfrac{1}{1+9e^{-\frac{\ln 3}{2}t}}$.继续使用 MATLAB 解方程 $y(t)=0.75$.

```
>> solve(0.75 - 1/(1 + 9 * exp( - log(3)/2 * t)))
ans = (13510798882111488 * log(3))/2473854946935173
>> (13510798882111488 * log(3))/2473854946935173       %计算该表达式的数值结果
ans = 6
```

因此,6 h 后有 75%的油车市民会得知这一消息.

大家可以尝试利用此次实验中讲到的 MATLAB 命令辅助求解本章的部分习题.

思政园地

极限思想的运用

极限是微积分学的基础.微积分的原理是建立在极限理论基础上的.在高等数学课程的学习中,我们可以接触到的以极限为基础定义的概念,包括连续性、导数、定积分、偏导数、级数等数学概念.

极限思想的萌芽,东西方古已有之,我国以惠施、刘徽、祖冲之等为代表.我国春秋战国时期的哲学名

著《庄子》记载着惠施的一句名言“一尺之棰，日取其半，万世不竭”，也就是说，对一尺长的竿，每天截取前一天剩下的一半，随着时间的流逝，竿会越来越短，长度会越来越趋近于零，但永远不会等于零. 这非常直观地体现了极限思想. 我国古代的刘徽和祖冲之计算圆周率时所采用的“割圆术”则是极限思想的一种基本应用.

高等数学中的极限思想简要地描述了其核心就是在自变量不断趋近于某一个状态时，相应的函数值会随之发生变化，并最终达到这一状态所对应的值. 在实际生活和学习中，要想达到一个理想的状态或者实现一个目标，应以自身持续的努力为自变量，保持“衣带渐宽终不悔，为伊消得人憔悴”的精神状态去不懈追求，才可以无限接近并最终达成目标.《荀子劝学》中的“锲而舍之，朽木不折；锲而不舍，金石可镂”，《周易》中的“天行健，君子以自强不息”，以及战国时楚国大夫屈原所说的“路漫漫其修远兮，吾将上下而求索”，表达的都是这种百折不挠的探索精神，通过学习极限思想，我们要养成力求进步、刚毅坚卓、发愤图强、永不停息的奋发进取的性格.

人生是一个不断挑战个人能力极限的过程，每一天的言行都是影响以后人生走向的变量，因此，每个人都应该对自己的人生有一个合理的规划，通过每一天的努力、每一天踏踏实实的行动，从点滴做起，改变自己的人生轨迹，从而达到自身能力的极限.《礼记・中庸》中的“凡事豫则立，不豫则废. 言前定则不跲，事前定则不困，行前定则不疚，道前定则不穷”，讲的就是这个道理，人生是具有连续性的，经过不断的努力，可以逐渐接近自己的极限，所以通过设定一个个小目标，不断影响和改变人生轨迹的变量，从而达到不“废”的总目标.

在极限思想的发展历程中，变量与常量、有限与无限、近似与精确的对立统一关系体现得淋漓尽致. 在探寻极限起源与发展的过程中，可以发现数学确实是一个美丽的世界，能让人从中感受数学的美妙.

本章内容小结

1. 主要知识点

函数和函数值，函数的定义域和值域，分段函数，函数的奇偶性、单调性、周期性和有界性，复合函数，基本初等函数和初等函数，数列的极限，函数的极限，左极限和右极限，极限的运算法则，两个重要极限，无穷小和无穷大，无穷小的性质，无穷小和无穷大的关系，函数的连续性，间断点的类型，初等函数的连续性，闭区间上连续函数的性质等.

2. 主要数学思想和方法

(1)数形结合的思想：通过观察图像，分析函数的极限和连续性.

(2)分类的思想：未定式函数极限和间断点分类情况的分析.

(3)替换的方法：等价无穷小替换可以使复杂的问题变得简单.

3. 主要题型及解法

(1)求函数的定义域：使得函数的解析式有意义的自变量的取值范围，注意解析式中含有偶次根式、分式、对数式等情况.

(2)求指定点的函数值：将自变量 x 值代入函数解析式求 y 值.

(3)确定函数的性质：利用定义判断简单函数的单调性和奇偶性，求出简单函数的周期及判断函数是否有界.

(4)简单函数的复合以及复合函数的分解：确认好中间变量后进行复合或分解.

(5)建立实际问题的函数关系式：①仔细审题，设定适当的自变量；②找出等量关系，列出函数关系式；③根据问题的要求，做适当的变形；④根据实际要求写出函数的定义域.

(6)求普通型函数的极限：利用极限的定义、观察函数的图像以及运用极限的运算法则.

(7)求未定式函数的极限：“$\frac{0}{0}$”型可以先利用提取公因式、因式分解、有理化分子或分母等方式化简为

普通型函数，然后求极限；“$\frac{\infty}{\infty}$”型可以先将分式中的分子、分母同除以 x 的最高次幂，然后求极限.

(8)利用两个重要极限求类似函数的极限：运用重要极限 $\lim\limits_{f(x)\to 0}\frac{\sin f(x)}{f(x)}=1$，$\lim\limits_{f(x)\to\infty}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}=\mathrm{e}$ 或 $\lim\limits_{f(x)\to 0}[1+f(x)]^{\frac{1}{f(x)}}=\mathrm{e}$ 来求.

(9)判断无穷小和无穷大：先利用无穷小和无穷大的概念求出极限值，然后进行判断.

(10)判断函数是否连续：①判断 $f(x)$ 在点 x_0 的近旁是否有定义；②极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 是否存在；③极限值是否等于函数值.

(11)确定间断点的类型：若在点 x_0 处 $f(x)$ 的左、右极限都存在，则 x_0 为 $f(x)$ 的第一类间断点：在第一类间断点中，如果函数的左、右极限不相等，则 x_0 为 $f(x)$ 的跳跃间断点；如果函数的左、右极限存在且相等(极限存在)，则 x_0 为 $f(x)$ 的可去间断点. 凡不属于第一类间断点的间断点都称为第二类间断点(左、右极限至少有一个不存在).

(12)证明根的存在性：利用零点定理证明函数 $f(x)$ 在指定闭区间上连续；区间端点函数值异号；存在使得函数值为零的点.

复习题一

A 组

一、填空题

1. 函数 $f(x)=8^{\frac{1}{2x-1}}$ 的定义域为________.
2. 函数 $y=\cos 2x$ 的复合过程为________.
3. 函数 $y=\cos\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的周期为________.
4. 函数 $f(x)=x^2+1$，则 $f(x-1)=$________.
5. 如果函数 $f(x)=x^3-x$，$\varphi(x)=\sin 2x$，则 $\varphi[f(x)]=$________.
6. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x+1}{4x^2+x-1}=$________.
7. 若函数 $f(x)=x-1$，则 $f(x+\Delta x)=$________.
8. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=$________.
9. 若 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=4$，$\lim\limits_{x\to a}g(x)=1$，则 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=$________.
10. 函数 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处________(是、不是)连续的.

二、选择题

1. 下列函数中，表示同一函数的是(　　).

A. $f(x)=x$，$\varphi(x)=\sqrt{x^2}$

B. $f(x)=\lg x^2$，$\varphi(x)=2\lg x$

C. $f(x)=x$，$\varphi(x)=\frac{x^2}{x}$

D. $f(x)=x$，$\varphi(x)=\sqrt[3]{x^3}$

2. 下列函数中，在定义域内不是单调函数的是(　　).

A. $y=2x-1$　　B. $y=2^x$

C. $y=\log_{\frac{1}{2}}x$　　D. $y=x^2$

3. 下列函数中，在定义区间上是无界函数的是(　　).

A. $y=\sin x, x\in\mathbf{R}$　　B. $y=\cos x, x\in\mathbf{R}$

C. $y=x^3, x\in\mathbf{R}$　　D. $y=x^2, x\in[-2,1)$

4. 下列函数中，不是周期函数的是(　　).

A. $y=\sin x$　　B. $y=x\sin x$

C. $y=\cos x$　　D. $y=\tan x$

5. 函数 $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)}$ 的定义域为(　　).

A. $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$　　B. $[1,+\infty)$

C. $\left(\frac{1}{2},1\right]$　　D. $(-\infty,1)$

6. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}=$(　　).

A. 0　　B. ∞

C. -4　　D. 4

7. 当 $x\to+\infty$ 时，下列函数是无穷小的是(　　).

A. $y=2^x$　　B. $y=\sqrt{x-1}$

C. $y=\frac{1}{x^2}$　　D. $y=\ln x$

8. 下列变量在给定变化过程中是无穷大的是(　　).

A. $\frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}(x\to 0)$　　B. $\lg x(x\to 2)$

C. $\lg x(x\to+\infty)$　　D. $\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}(x\to\infty)$

9. $f(x)$在点 $x=x_0$ 处有定义是当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$有极限的（　　）.

A. 充分条件　　B. 必要条件

C. 充要条件　　D. 无关条件

10. 若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{kx}=1$，则 k 的值是（　　）.

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

三、判断题

1. 当两个函数的定义域相同，对应法则也相同时，称两个函数相同.（　　）

2. 函数 $y=\ln u, u=-(x^2+1)$可以建立复合函数.（　　）

3. 函数 $y=\sqrt{x}+\ln\left(2-\dfrac{1}{2}\cos x\right)$是初等函数.（　　）

4. 函数 $y=(2-a)^x$ 在定义域内是减函数，则 a 的取值范围为(0,1).（　　）

5. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\log_3 x, & x>0,\\ 2^x, & x\leqslant 0,\end{cases}$ 则 $f\left[f\left(\dfrac{1}{9}\right)\right]=9$.（　　）

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$.（　　）

7. $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$.（　　）

8. $y=\sin(2x-1)$在$(-\infty,+\infty)$内是连续函数.（　　）

9. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{2x}=e^2$.（　　）

10. 无穷小的倒数是无穷大.（　　）

四、解答题

1. 求函数 $f(x)=\lg\dfrac{1}{1-x}+\sqrt{x+2}$的定义域.

2. 已知分段函数 $f(x)=\begin{cases}2^x, & -1<x<0,\\ 2, & 0\leqslant x<1,\\ x-1, & 1\leqslant x\leqslant 3,\end{cases}$ 试求：(1)函数的定义域；(2)$f(3), f(0), f(-0.5)$.

3. 求出下列函数的反函数.

(1)$y=-2x+1$；　(2)$y=\dfrac{2x+1}{x-2}$.

4. 某化肥厂生产某种产品 1 000 t，每吨定价为 130 元. 当销售量在 700 t 以下时，按原价出售；当销售量超过 700 t 时，超出的部分按 9 折销售. 试求销售总收益与总销售量之间的函数关系.

5. 用铁皮做一个容积为 V 的圆柱形罐头筒，试将它的全面积表示成底半径的函数，并确定此函数的定义域.

6. 求极限 $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x^2+x-1}{x^2-2}$.

7. 求极限$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+3}{6x-1}$.

8. 求极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{2x}$.

9. 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$.

10. 设 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x\geqslant 0,\\ x+1, & x<0,\end{cases}$ 讨论函数在点 $x=0$ 处的连续性.

B　组

一、填空题

1. 设 $y=e^u, u=-\dfrac{1}{x^2}$，若 y 是 x 的复合函数，则 $y=$________.

2. 函数 $y=\cos^2 3x$ 可以分解为 $y=$________，$u=$________，$v=$________.

3. 设函数 $f(\sin x)=\cos 2x+1$，则 $f(\cos x)=$________.

4. 如果函数 $f(x)=x^3-x, \varphi(x)=\sin 2x$，则 $f[\varphi(x)]=$________.

5. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x<0,\\ 1, & x=0,\\ x^2-2, & x>0,\end{cases}$ 则 $f(-2)=$________，$f(0)=$________，$f(2)=$________.

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^3}=$________.

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-1}{5x^3+3}=$________.

8. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{4}\right)^x=$________.

9. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{x^2-5}=$________.

10. $\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)=$________.

二、选择题

1. 下列函数中，表示同一函数的是（　　）.

A. $f(x)=\sin x, \varphi(x)=\dfrac{x\sin x}{x}$

B. $f(x)=\lg x^{\frac{2}{3}}, \varphi(x)=\dfrac{2}{3}\lg x$

C. $f(x)=x(x>0), \varphi(x)=a^{\log_a x}$

D. $f(x)=x, \varphi(x)=|x|$

2. 下列函数中，在定义域内不是单调函数的是（　　）.

A. $y=|2x-1|$　　B. $y=2^x$

C. $y=\log_{\frac{1}{2}} x$　　D. $y=x^2, x\in(0,+\infty)$

3. 函数 $y=\sqrt{\log_2 x-2}$的定义域是（　　）.

A. $(3,+\infty)$　　B. $[3,+\infty)$

C. $(4,+\infty)$　　D. $[4,+\infty)$

4. 对于函数 $y=f(x)$，以下说法正确的是（　　）.

①y 是 x 的函数；②对于不同的 x，y 的值也不同；③$f(a)$

表示当 $x=a$ 时函数 $f(x)$ 的值是一个常数;④ $f(x)$ 一定可以用一个具体的式子表示出来.

A. 1个　　B. 2个

C. 3个　　D. 4个

5. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$,对于任意两个不相等的实数 a,b,总有 $\frac{f(a)-f(b)}{a-b}>0$ 成立,则必有(　　).

A. 函数 $f(x)$ 先增后减

B. 函数 $f(x)$ 先减后增

C. 函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数

D. 函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数

6. $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处有定义是 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续的(　　).

A. 充分条件　　B. 必要条件

C. 充要条件　　D. 无关条件

7. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(x^2-1)}{x-1}=$(　　).

A. 1　　B. 0

C. 2　　D. $\frac{1}{2}$

8. 如果 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$,则有(　　).

A. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]=\infty$

B. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)]=0$

C. $\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{f(x)+g(x)}=0$

D. $\lim\limits_{x\to a}kf(x)=\infty$($k$ 为非零常数)

9. 下列极限存在的是(　　).

A. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x(x+1)}{x^2}$　　B. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2^x-1}$

C. $\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}}$　　D. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^2+1}{x}}$

10. 下列变量中,在给定变化过程中是无穷小量的是(　　).

A. $2^{-x}+1(x\to 0)$

B. $\frac{\sin x}{x}(x\to 0)$

C. $\frac{x^2}{\sqrt{x^3-2x+1}}(x\to+\infty)$

D. $\frac{x^2}{x+1}\left(3-\sin\frac{1}{x}\right)(x\to 0)$

三、判断题

1. 函数 $y=\begin{cases}-1, & x\geqslant 0,\\ 3, & x<0\end{cases}$ 是初等函数.　　(　　)

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x+2, & x\leqslant -1,\\ x^2, & -1<x<2,\\ 2x, & x\geqslant 2,\end{cases}$ 若 $f(x)=3$,则 $x=\sqrt{2}$.　　(　　)

3. 已知 $f(0)=1$, $f(n)=nf(n-1)$, $n\in\mathbf{N}^+$,则 $f(4)=20$.　　(　　)

4. 已知 $y=f(x)$ 在定义域 $(-1,1)$ 上是减函数,并且 $f(1-a)<f(2a-1)$,则 a 的取值范围是 $\left(-\infty,\frac{2}{3}\right)$.　　(　　)

5. 函数 $f(x)=\frac{1}{|x+2|-1}$ 的定义域是 $(-\infty,-3)\cup(-3,-1)\cup(-1,+\infty)$.　　(　　)

6. $\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}}=1$.　　(　　)

7. $\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}}=\infty$.　　(　　)

8. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{2x}=e^x$.　　(　　)

9. 函数 $y=\frac{x(x-1)\sqrt{x+1}}{x^3-1}$ 在 $x\to+\infty$ 过程中为无穷小量.　　(　　)

10. 当 $x\to a$ 时,函数 $f(x)$ 为有界函数,则必有 $\lim\limits_{x\to a}(x-a)f(x)=0$.　　(　　)

四、解答题

1. 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$,求 $y=f(x^2)$ 的定义域.

2. 设函数 $y=f(x)=\begin{cases}x, & 0<x<1,\\ 2, & x=1,\\ 2-x, & 1<x\leqslant 2,\end{cases}$ 试求:(1)函数的定义域;(2) $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(1)$, $f(1.5)$;(3)作出函数的图像.

3. 已知函数 $f(x)=\frac{a^x-1}{a^x+1}(a>1)$.

(1)判断函数 $f(x)$ 的奇偶性;(2)求 $f(x)$ 的值域;(3)证明 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是增函数.

4. 某运输公司规定货物的运输价:在 a km 以内(含 a km),每公里 k 元;超过 a km,超出部分每公里 $\frac{4}{5}k$ 元,求运价 m 和里程 s 之间的函数关系.

5. 拟建一个容积为 V 的长方体水池,设它的底为正方形,如果池底单位面积的造价是四周单位面积造价的 2 倍,试将总造价表示成底边长的函数,并确定此函数的定义域.

6. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$.

7. 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+4}{x+2}\right)^x$.

8. 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x-5}{x^2\sin\frac{1}{2x}}$.

9. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin 2x}{x}, & x<0,\\ 3x^2-2x+k, & x\geqslant 0,\end{cases}$ k 为何值时,函数在其定义域内连续?

10. 证明曲线 $y=x^4-3x^2+7x-10$ 在 $x=1$ 与 $x=2$ 之间至少与 x 轴有一个交点.