第 9 章

无穷级数

阅读与欣赏

泰　　勒

泰勒是英国数学家,1685 年 8 月 18 日出生于埃德蒙顿,1731 年 12 月 29 日卒于伦敦. 泰勒出生在一个富裕的家庭,家里经常有音乐家、艺术家来往,使他自幼就受到了良好的音乐和艺术熏陶. 1705 年,他进入剑桥大学圣约翰学院学习,1709 年毕业并获得法学学士学位,随后移居伦敦. 由于他在英国《皇家学会会报》上发表了一系列高水平的论文而崭露头角. 27 岁时,他当选为英国皇家学会会员,1714 年获得法学博士学位,并在 1714—1718 年担任皇家学会秘书,这也是他科研成果最为丰硕的时期. 为解决牛顿与莱布尼茨关于微积分发明权之争的问题,他被任命为仲裁委员会委员.

泰勒以微分学中将函数展开成幂级数的定理著称于世. 该定理大致可以描述为:函数在一个点邻域内的值可以用函数在该点的值及各阶导数值组成的幂级数表示出来. 泰勒于 1715 年出版了《增量法及其逆》,在本书中"他力图搞清微积分的思想,但把自己局限于代数函数与代数微分方程". 这本书发展了牛顿的方法,并奠定了有限差分法的基础. 在这本书中载有现在微积分教程中以他的姓氏命名的单元函数的幂级数展开公式,这个公式是他通过对格雷戈里 - 牛顿插值公式求极限而得到的. 用现在的标准衡量,证明有失严格,和他同时代人一样,他没有认识到处理无穷级数时,必须先考虑其收敛性. 对此,德国著名数学家克莱因(Klein)曾评注道,"无先例的大胆地通过极限""泰勒实际上是用无穷小(微分)进行运算,同莱布尼茨一样认为其中没有什么问题. 有意思的是,一个 20 多岁的年轻人,在牛顿的眼皮底下,却离开了他的极限方法."

泰勒定理的重要性最初并未引起人们的注意,直到 1755 年欧拉把泰勒定理用于他的微分学时,人们才认识到其价值. 稍后,拉格朗日用带余项的级数作为其函数理论的基础,进一步确认了泰勒级数的重要地位. 他把这一定理刻画为微积分的基本定理. 泰勒定理的严格证明是在定理诞生一个世纪之后,由柯西给出的. "泰勒级数"这个名词大概是由瑞士数学家吕利埃(L'Huilier)在 1786 年首先使用的,特别是在"1880 年,维尔斯特拉斯又把泰勒级数引进为一个基本概念,用现代术语来讲,泰勒级数是解析函数芽". 泰勒也以函数的泰勒展开式而闻名于后世.

泰勒对数学发展的贡献,本质上远超过以他的姓氏命名的级数. 他涉及和创造了许多重要的数学概念,但由于未能进一步发展,这些概念未能获得更高声誉. 此外,泰勒的写作风格过于简洁,令人费解. 这也是他的许多创见未能获得更高声誉的一个原因.

§9.1 常数项级数的概念和性质

无穷级数是“高等数学”课程的重要内容之一，它在函数的研究及近似计算等方面都有非常广泛的应用.

9.1.1 常数项级数的概念

人们在认识事物的数量特性时，通常经历一个由近似到精确的过程. 在这个过程中，会遇到从有限个数量相加到无穷多个数量相加的问题.

例如，中国古代经典著作《庄子·天下篇》中提出过如下命题：“一尺之棰，日取其半，万世不竭.”如果用数学方式来表示此命题，可以写作

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$$

此式说明常数 1 可以用

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$$

来表示，即无穷多项的连加.

又如，计算圆的面积. 若已求得正六边形的面积为 a_1，则正十二边形的面积为 a_1+a_2. 依此类推，可得正 3×2^n 边形的面积为 $a_1+a_2+\cdots+a_n$. 则圆的面积为 $A\approx a_1+a_2+\cdots+a_n$.

如果内接正多边形的边数无限增多，即 n 无限增大，那么和 $a_1+a_2+\cdots+a_n$ 的极限就是所要求的圆面积 A. 这时和式中的项数无限增多，于是出现了无穷多个数量依次相加的数学式子.

由上面两个例子，引入级数的概念.

定义 9.1 如果给定一个数列

$$u_1,u_2,\cdots,u_n,\cdots$$

则由该数列构成的表达式

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$$

叫作常数项无穷级数，简称**常数项级数**. 其中第 n 项 u_n 叫作级数的**一般项(或通项)**.

上述级数的定义只是形式上的定义，无穷多个项依次相加，其和是否存在?下面给出无穷级数和的概念.

定义 9.2 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$ 的前 n 项和为

$$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n=\sum_{i=1}^{n}u_i$$

称 S_n 为级数的**部分和**.

当 n 无限增大时，如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 有极限 S，即

$$\lim_{n\to\infty}S_n=S$$

则称无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛于 S. 这时极限 S 叫作级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的和，并写成

$$S = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

如果$\{S_n\}$没有极限，则称无穷级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$发散，即常数项级数收敛(发散)的充要条件是极限$\lim\limits_{n\to\infty} S_n$存在(不存在).

当级数收敛时，其部分和S_n是级数和S的近似值，称它们之间的差值

$$r_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} u_{n+i}$$

为级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$的余项. 用近似值$S_n$代替和$S$所产生的误差是余项$r_n$的绝对值，即误差为$|r_n|$.

显然，$\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$.

例 9-1 讨论等比级数(几何级数)

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots (a \neq 0)$$

的敛散性.

解 当$|q| \neq 1$时，等比级数的部分和为

$$S_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} = \frac{a - aq^n}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}$$

(1) 当$|q| < 1$时，$\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$. 于是$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a}{1-q}$，所以，等比级数收敛，其和为

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1-q}$$

(2) 当$|q| > 1$时，$\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$. 所以$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$. 因此，等比级数发散，没有和.

(3) 当$q = 1$时，级数的部分和为$S_n = na$. 显然$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$，因此，级数发散.

(4) 当$q = -1$时，级数的部分和为$S_n = \begin{cases} 0, & n\text{ 为偶数} \\ a(a \neq 0), & n\text{ 为奇数} \end{cases}$. 由于部分和在奇偶之间不断变化，数列没有极限，所以级数发散.

综合上述结果，当$|q| < 1$时，等比级数收敛，其和为$\dfrac{a}{1-q}$；当$|q| \geqslant 1$时，等比级数发散.

例 9-2 证明无穷级数$\dfrac{1}{1\times 3} + \dfrac{1}{3\times 5} + \cdots + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \cdots$是收敛的，并求出该级数的和.

解 因为

$$u_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$$

所以

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1\times 3} + \frac{1}{3\times 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) \end{aligned}$$

从而

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}$$

所以这个级数收敛，它的和为$\dfrac{1}{2}$.

思考　级数的和都存在吗?如果不是,那么在什么情况下,级数的和才存在?

9.1.2　收敛级数的基本性质

根据无穷级数收敛、发散以及和的概念,可以得出收敛级数的几个基本性质.

性质 9.1　如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于 S,则 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ 亦收敛且其和为 kS.

由性质 9.1 可知:级数的每一项同乘以一个不为零的常数,它的敛散性不会改变.

性质 9.2　设两个收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sigma$,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 也收敛,其和为 $S \pm \sigma$.

性质 9.2 说明了两个收敛级数的和或差仍为收敛级数,即

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} v_n$$

例 9-3　判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{2}{3^n}\right)$的敛散性.

解　由例 9-1 知,等比级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ 均收敛. 又由性质 9.1 知,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n}$ 也收敛. 再由性质 9.2 知,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{2}{3^n}\right)$收敛.

例 9-4　已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+n^2)$ 是发散的.

证明　用反证法. 假设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+n^2)$ 是收敛的. 由性质 9.2 可知,级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}[(u_n+n^2)-u_n] = \sum_{n=1}^{\infty} n^2$$

是收敛的. 而根据级数收敛的定义可知,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$ 是发散的,得出矛盾,于是假设不成立. 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+n^2)$ 是发散的.

性质 9.3　在级数中删除、增加或改变前面的有限项,不会改变其敛散性.

证明　只需证明"在级数前面部分去掉或加上有限项,不会改变级数的收敛性",因为其他情形都可以看作在级数的前面部分先去掉有限项,然后再加上有限项的结果.

设将级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的前 k 项去掉,则得级数

$$u_{k+1}+u_{k+2}+\cdots+u_{k+n}+\cdots$$

其部分和为

$$\sigma_n = u_{k+1}+u_{k+2}+\cdots+u_{k+n} = S_{n+k}-S_k$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n = \lim_{n\to\infty}S_{n+k}-\lim_{n\to\infty}S_k = S-S_k$$

因为 S_k 是常数,所以当 $n\to\infty$ 时,σ_n 与 S_{k+n} 同时具有极限.

性质 9.4　收敛级数任意加括号后所成的级数仍然收敛于原来的和.

证明　设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 前 n 项的部分和为 S_n,任意加括号后所成的级数为

$$(u_1+u_2)+(u_3+u_4+u_5)+\cdots$$

其部分和为 σ_m：

$$\sigma_1=S_2,\sigma_2=S_5-S_2,\sigma_3=S_9-S_5,\cdots$$

则

$$\lim_{m\to\infty}\sigma_m=\lim_{n\to\infty}S_n=S$$

即加括号后所成的级数收敛，且其和不变.

推论 9.1 如果加括号后所成的级数发散，则原级数也发散.

推论 9.1 为性质 9.4 的逆否命题，所以一定成立.

注意 收敛级数去括号后所成的级数不一定收敛．例如，级数 $(1-1)+(1-1)+\cdots$ 收敛，但级数 $1-1+1-1+\cdots$ 发散.

性质 9.5(级数收敛的必要条件) 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，当 n 无限增大时，它的一般项 u_n 趋于 0，即 $\lim_{n\to\infty}u_n=0$.

证明 因为 $S=\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，而 $u_n=S_n-S_{n-1}$，所以

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}S_n-\lim_{n\to\infty}S_{n-1}=S-S=0$$

注意 (1) 如果级数的一般项不趋于零，则级数必定发散，即

$$\lim_{n\to\infty}u_n\neq 0\Rightarrow \text{级数发散}$$

例如，级数

$$\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{n}{n+1}+\cdots$$

的一般项为

$$u_n=(-1)^{n-1}\frac{n}{n+1}$$

当 $n\to\infty$ 时，u_n 不趋于零. 因此，该级数是发散的.

(2) 性质 9.5 是必要非充分条件. 例如，对于调和级数

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

有 $\lim_{n\to\infty}u_n=0$，但级数是否收敛?事实上，

$$S_{2n}-S_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}$$

这意味着 $S_{2n}-S_n>\frac{1}{2}$. 假设调和级数收敛，设其和为 S. 于是

$$\lim_{n\to\infty}(S_{2n}-S_n)=S-S=0$$

然而这与之前得出的 $S_{2n}-S_n>\frac{1}{2}$ 矛盾. 所以，调和级数发散.

例 9-5 判断下列级数的敛散性.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{n}$； (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{\pi}{n}$.

解 (1) 因为 $\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}=1\neq 0$，由性质 9.5 知，该级数发散.

(2) 因为 $\lim_{n\to\infty}\cos\frac{\pi}{n}=\cos 0=1\neq 0$，由性质 9.5 知，该级数发散.

思考　如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，但级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散，那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 一定发散吗？为什么？

习题 9.1

1. 选择题.

(1) 下列命题正确的是(　　).

A. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + v_n)$ 可能收敛

B. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + v_n)$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 可能都发散

C. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + v_n)$ 必发散

D. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + v_n)$ 发散，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 可能都收敛

(2) 下列命题正确的是(　　).

A. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，则 $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$

B. 若 $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散

C. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，则 $\lim_{n\to\infty} u_n = \infty$

D. 若 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛

2. 判断下列级数的敛散性.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$；　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty} [\ln(n+1) - \ln n]$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{2^n} + \dfrac{1}{5^n}\right)$；　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n^2+1}{n^2+n}$.

3. 判断下列级数的敛散性.

(1) $1 + 2 + \cdots + 100 + 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{2^n} + \cdots$；

(2) $-\dfrac{2}{3} + \dfrac{2^2}{3^2} - \dfrac{2^3}{3^3} + \dfrac{2^4}{3^4} + \cdots$.

4. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ 的敛散性.

§9.2　常数项级数的类型及其敛散性

9.2.1　正项级数

正项级数是常数项级数中比较简单，但又很重要的一种类型.

定义 9.3 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 中的每一项都是非负数,即 $u_n \geqslant 0(n=1,2,\cdots)$,则称此级数为**正项级数**.

例如,以下级数均为正项级数.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}, \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{n}\right)^n$$

对于正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$,因为 $u_n \geqslant 0$,所以 $S_{n+1} = S_n + u_{n+1} \geqslant S_n$. 这说明正项级数的部分和数列 $\{S_n\}$ 是单调增加的,故可得正项级数的收敛原理.

定理 9.1 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充要条件是部分和数列 $\{S_n\}$ 有界.

例 9-6 判断正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{2^n}$ 的敛散性.

解 由于该级数为正项级数,且部分和为

$$S_n = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{2} + \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{4} + \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{8} + \cdots + \frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{2^n} < \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}{1 - \frac{1}{2}} < 1$$

即部分和数列 $\{S_n\}$ 有界,因此正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{2^n}$ 收敛.

9.2.2 正项级数的审敛法

由定理 9.1 可知,如果正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散,则它的部分和数列 $\{S_n\}$ 是无界的. 由此可以得到判别正项级数收敛性的一种方法.

定理 9.2(比较审敛法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 均为正项级数.

(1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛,且 $u_n \leqslant v_n$,则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;

(2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散,且 $v_n \geqslant u_n$,则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散 .

推论 9.2 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 均为正项级数. 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛,且存在自然数 N,使当 $n \geqslant N$ 时,有 $u_n \leqslant kv_n (k > 0)$ 成立,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散,且当 $n \geqslant N$ 时,有 $u_n \geqslant kv_n (k > 0)$ 成立,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

例 9-7 讨论 p - 级数 $1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$ $(p > 0)$ 的敛散性. p - 级数的图形如图 9-1 所示.

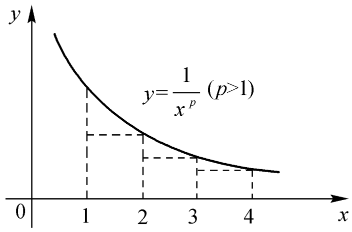

图 9-1

解 当 $p\leqslant 1$ 时，因为 $\frac{1}{n^p}\geqslant\frac{1}{n}$，而调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，根据比较审敛法，可知 p - 级数发散.

设 $p>1$，由图 9-1 知，当 $n-1\leqslant x\leqslant n$ 时，

$$\frac{1}{n^p}\leqslant\int_{n-1}^{n}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}$$

$$S_n=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}\leqslant 1+\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{x^p}+\cdots+\int_{n-1}^{n}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}=1+\int_1^n\frac{\mathrm{d}x}{x^p}$$

$$=1+\frac{1}{p-1}\left(1-\frac{1}{n^{p-1}}\right)<1+\frac{1}{p-1}$$

即 $\{S_n\}$ 有界，故 p - 级数收敛.

综合上述结果，得到下面结论：当 $p>1$ 时，p - 级数收敛；当 $p\leqslant 1$ 时，p - 级数发散.

例 9-8 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{1+n^3}}$ 的敛散性.

解 因为 $\sqrt{1+n^3}>\sqrt{n^3}=n^{\frac{3}{2}}$，所以

$$u_n=\frac{1}{\sqrt{1+n^3}}<\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}=v_n$$

由 p - 级数可知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛. 根据定理 9.2 可知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{1+n^3}}$ 收敛.

比较审敛法是一种基本方法，虽然有用，但应用起来却有许多不便，因为它需要建立定理所要求的不等式，而这种不等式常常不易建立. 为此，介绍一种在应用上更为方便的极限形式的比较审敛法.

定理 9.3（比较审敛法的极限形式） 设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 都是正项级数，如果 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l$，则有：

(1) 当 $0<l<+\infty$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 有相同的敛散性；

(2) 当 $l=0$ 时，若 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；

(3) 当 $l=+\infty$ 时，若 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

例 9-9 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ 的敛散性.

解 因为 $\lim_{n\to\infty}n^2\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}n^2\cdot\frac{1}{n^2}=1$，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，所以根据定理 9.3 知 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ 收敛.

例 9-10 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{5^n-3^n}$ 的敛散性.

解 因为 $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3^n}{5^n-3^n}}{\left(\frac{3}{5}\right)^n}=1$，而 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n$ 是收敛的等比级数，所以由定理 9.3 可知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{5^n-3^n}$ 收敛.

将所给正项级数与 p - 级数做比较，可以得到较方便、实用的比值审敛法.

定理 9.4（比值审敛法，达朗贝尔判别法） 设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 是正项级数，如果 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$，则有

(1) 当 $\rho<1$ 时,级数收敛;

(2) 当 $\rho>1$(或 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\infty$) 时,级数发散;

(3) 当 $\rho=1$ 时,不能用此判别法判定级数的敛散性.

比值审敛法的优点是不必找参考级数,直接从级数本身的构成,利用通项即可判定级数的敛散性.

注意 (1) 当 $\rho=1$ 时,比值审敛法失效.例如,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛.

(2) 此判别法是充分非必要条件.例如:

$$u_n=\frac{2+(-1)^n}{2^n}\leqslant\frac{3}{2^n}=v_n$$

故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}$ 收敛.但

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2+(-1)^{n+1}}{2[2+(-1)^n]}=a_n$$

$$\lim_{n\to\infty}a_{2n}=\frac{1}{6}$$

$$\lim_{n\to\infty}a_{2n+1}=\frac{3}{2}$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 不存在.

例 9-11 判定下列级数的敛散性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^n}$; (3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n(2n-1)}$.

解 (1) $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}=\frac{1}{n+1}\to 0(n\to\infty)$,故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ 收敛.

(2) $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(n+1)!}{10^{n+1}}\cdot\frac{10^n}{n!}=\frac{n+1}{10}\to\infty(n\to\infty)$,故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^n}$ 发散.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n-1)\times 2n}{(2n+1)(2n+2)}=1$,比值审敛法失效,改用比较审敛法.因为 $\frac{1}{2n(2n-1)}<\frac{1}{n^2}$,而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛,故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n(2n-1)}$ 收敛.

定理 9.5(根值审敛法,柯西判别法) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 是正项级数,如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$,则有:

(1) 当 $\rho<1$ 时,级数收敛;

(2) 当 $\rho>1$(或 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=+\infty$) 时,级数发散;

(3) 当 $\rho=1$ 时,不能用此判别法判定其敛散性.

例 9-12 判定正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{n}\right)^n$ 的敛散性.

解 令 $u_n=\left(\frac{5}{n}\right)^n$,则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{5}{n}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n}=0<1$$

由定理 9.5 知,该级数收敛.

9.2.3 交错级数

常数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 或 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n(u_n \geqslant 0, n=1,2,\cdots)$ 称为**交错级数**. 交错级数的特点是正负项交替出现.

定理 9.6(莱布尼茨审敛法) 如果交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n(u_n \geqslant 0, n=1,2,\cdots)$ 满足条件:

(1) 数列 $\{u_n\}$ 单调减少;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

则交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛,且其和 $S \leqslant u_1$,其余项 r_n 的绝对值 $|r_n| \leqslant u_{n+1}$.

证明 考察交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n(u_n \geqslant 0, n=1,2,\cdots)$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 的收敛性. 先证前 $2n$ 项和 S_{2n} 的极限存在. 为此,把 S_{2n} 写成以下两种形式:

$$S_{2n} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \cdots + (u_{2n-1} - u_{2n})$$

及

$$S_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \cdots - (u_{2n-2} - u_{2n-1}) - u_{2n}$$

由条件(1)可知,所有括号中的差都是非负的;由第一种形式可知,数列 $\{S_{2n}\}$ 是单调增加的;由第二种形式可知,数列 $\{S_{2n}\}$ 是有界的($S_{2n} \leqslant u_1$). 于是,根据单调有界数列必收敛,可知 $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n}$ 存在.

设 $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$,再证前 $2n+1$ 项和 S_{2n+1} 的极限也是 S. 由条件(2)可知,$\lim\limits_{n\to\infty} u_{2n+1} = 0$. 因此,

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty}(S_{2n} + u_{2n+1}) = \lim_{n\to\infty} S_{2n} = S$$

所以,$\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 存在,即交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛,且其和 $S \leqslant u_1$.

最后,由于 $|r_n| = u_{n+1} - u_{n+2} + \cdots$ 也是一个交错级数,且满足收敛的两个条件,故其和小于级数的第一项,即 $|r_n| \leqslant u_{n+1}$.

注意 莱布尼茨审敛法是判定交错级数收敛的充分而非必要条件,即交错级数收敛的两个条件(1)和(2)不一定都成立.

例 9-13 判定交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$ 的收敛性.

解 由于 $u_n = \dfrac{1}{n}$,$u_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$ 且满足下列条件:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$$

$$u_n = \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} = u_{n+1}$$

所以,数列 $\{u_n\}$ 单调减少. 因此,由定理 9.6 可知,该交错级数收敛,其和小于 1.

例 9-14 判定交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{n}{10^n}$ 的敛散性.

解 由于 $u_n = \dfrac{n}{10^n}$,$u_{n+1} = \dfrac{n+1}{10^{n+1}}$ 且满足

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{10^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{10^n \ln 10} = 0$$

由于 $f(x)=\dfrac{x}{10^x}$ 的导数 $f'(x)=\dfrac{1-x\ln 10}{10^x}<0$ 时，$x>1$. 所以，当 $n\geqslant 1$ 时，数列 $\{u_n\}$ 单调减少. 故由莱布尼茨审敛法可知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{n}{10^n}$ 收敛.

9.2.4 绝对收敛与条件收敛

定义 9.4 对任意项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为**绝对收敛**；若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为**条件收敛**.

例如，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n^2}$ 为绝对收敛，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$ 为条件收敛.

级数绝对收敛与级数收敛有以下重要关系.

定理 9.7 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 必定收敛.

证明 令 $v_n=\dfrac{1}{2}(u_n+|u_n|)(n=1,2,\cdots)$，显然 $v_n\geqslant 0$，且 $v_n\leqslant|u_n|$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛. 又有

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}(2v_n-|u_n|)$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

由定理 9.7 可知，对于一般的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，如果用正项级数的审敛法判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则此级数收敛. 这就使得很大一部分级数的收敛性判定问题转化为正项级数的收敛性判定问题.

例 9-15 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n}{n^2}$ 的敛散性.

解 由于 $\left|\dfrac{\sin n}{n^2}\right|\leqslant\dfrac{1}{n^2}$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{\sin n}{n^2}\right|$ 收敛，故该级数绝对收敛，又由定理 9.7 可知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n}{n^2}$ 收敛.

例 9-16 判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{3\times 2^n}$ 是否收敛. 如果是收敛的，判别是绝对收敛还是条件收敛.

解

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\sqrt[n]{3}}=\frac{1}{2}$$

由根值审敛法可知该级数绝对收敛，再由定理 9.7 可知，该级数收敛.

例 9-17 判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\ln(n+2)}{n+2}$ 是否收敛. 若收敛，判别是绝对收敛还是条件收敛.

解 由于 $(-1)^n\dfrac{\ln(n+2)}{n+2}>\dfrac{\ln 2}{n+2}$，所以由比较审敛法可知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\ln(n+2)}{n+2}$ 发散.

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(n+2)}{n+2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+2}=0$. 当 $n\geqslant 1$ 时，因为

$$f'(x)=\left[\frac{\ln(x+2)}{x+2}\right]'=\frac{1-\ln(x+2)}{(x+2)^2}<0$$

所以根据定理 9.6，由于 $u_n=\dfrac{\ln(n+2)}{n+2}\to 0$ 且单调减少，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\ln(n+2)}{n+2}$ 是条件收敛的.

习题 9.2

1. 用比较审敛法或它的极限形式判定下列极限的敛散性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{\dfrac{n}{n^2+1}}$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n-1}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$；　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+2^n}$.

2. 用比值审敛法判定下列级数的敛散性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^n}$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{n^2}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2\sin\dfrac{\pi}{2^n}$；　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^n}{n!}$.

3. 判定下列级数的敛散性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{2n-1}$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2n-1}{2n+3}$.

4. 判定下列级数的敛散性. 若级数收敛，是绝对收敛还是条件收敛.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{1}{\sqrt{n}}$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos n\alpha}{n^2}$.

5. 讨论级数 $\dfrac{1}{1\times 2}+\dfrac{1}{2\times 3}+\dfrac{1}{3\times 4}+\dfrac{1}{4\times 5}+\cdots$ 的敛散性.

§9.3　幂　级　数

前面我们讨论了常数项级数的敛散性，其级数的每一项都是实数. 下面我们讨论每一项都是函数的级数中最基本的一类 —— 幂级数.

9.3.1　函数项级数的概念

定义 9.5　设有定义在区间 I 上的函数列 $\{u_n(x)\}$，则和式

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots \tag{9-1}$$

称为定义在区间 I 上的**函数项无穷级数**，简称**函数项级数**. $u_n(x)$ 为该级数的**一般项**或**通项**.

对于区间 I 上的任意 x_0，将 x_0 代入式(9-1)，则函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 成为一个常数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$. 如果该常数项级数收敛，则称 x_0 为函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的**收敛点**；如果该常数项级数发散，则称 x_0 为函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的**发散点**. 一个函数项级数收敛点(或发散点)的全体叫作该级数的**收敛域**(或**发散域**).

设函数项级数(9-1)的收敛域为 D,则对于任意的 $x\in D$,函数项级数(9-1)都收敛,其和显然与 x 有关,记作 $S(x)$,称为函数项级数(9-1)的**和函数**,即

$$S(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots,x\in D$$

例如,级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$ 的收敛域为$(-1,1)$,和函数为$\dfrac{1}{1-x}$,即

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,x\in(-1,1)$$

将函数项级数的前 n 项和记作 $S_n(x)$,则在收敛域上,有

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x)=S(x)$$

9.3.2 幂级数及其收敛性

1. 幂级数的概念

定义 9.6 幂级数是各项都为幂函数的函数项级数.一般我们把形如

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots \tag{9-2}$$

的函数项级数称为关于 x 的幂级数,其中 $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$ 称为幂级数(9-2)的系数.把形如

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots \tag{9-3}$$

的函数项级数称为关于 $x-x_0$ 的幂级数,其中 $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$ 称为幂级数(9-3)的系数.

如果做变换 $t=x-x_0$,则幂级数(9-3)就变为幂级数(9-2).下面只讨论**关于 x 的幂级数**.

2. 幂级数的收敛半径与收敛域

对于幂级数(9-2),很显然在点 $x=0$ 处总是收敛的.除此之外,它还在哪些点处收敛?我们有下面的重要定理.

定理 9.8[阿贝尔(Abel)定理] 若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在点 $x=x_0(x_0\neq 0)$ 处收敛,则它在 $(-|x_0|,|x_0|)$ 内收敛且绝对收敛;反之,若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在点 $x=x_0$ 处发散,则它在$[-|x_0|,|x_0|]$ 外发散.

推论 9.3 若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 既有非零的收敛点,又有发散点,则必存在正数 R,使得

(1) 当 $|x|<R$ 时,幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 绝对收敛;

(2) 当 $|x|>R$ 时,幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 发散;

(3) 当 $|x|=R$ 时,幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 可能收敛,也可能发散.

上述推论中的正数 R 称为幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的**收敛半径**.由于幂级数(9-2)在区间$(-R,R)$内一定绝对收敛,所以我们把$(-R,R)$称为幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的**收敛区间**.

由于幂级数(9-2)在其收敛半径边界点 $x=\pm R$ 处可能收敛也可能发散,所以需要把 $x=\pm R$ 代入幂级数(9-2),将其化为常数项级数来讨论.一旦确定了边界点 $x=\pm R$ 处的敛散性,则幂级数(9-2)的收敛域即为$(-R,R)$,$[-R,R)$,$(-R,R]$,$[-R,R]$ 四个区间之一.

如果幂级数(9-2)仅在点 $x=0$ 处收敛，则规定收敛半径 $R=0$，此时收敛区间退缩为一点，即原点；若对一切实数 x，幂级数(9-2)都收敛，则规定收敛半径 $R=+\infty$，此时收敛区间为 $(-\infty,+\infty)$.

3. 幂级数的收敛半径的求法

定理 9.9 对于幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，如果有 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$，则它的收敛半径为

$$R=\begin{cases}+\infty, & \rho=0\\ \dfrac{1}{\rho}, & \rho\neq 0\\ 0, & \rho=+\infty\end{cases}$$

例 9-18 求下列幂级数的收敛半径.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{3^n+1}x^n$； (2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$； (3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$.

解 (1) 因为 $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\dfrac{(-1)^{n+1}}{3^{n+1}+1}}{\dfrac{(-1)^n}{3^n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+1}{3^{n+1}+1}=\dfrac{1}{3}$，所以收敛半径为 $R=\dfrac{1}{\rho}=3$.

(2) 因为 $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\dfrac{1}{(n+1)!}}{\dfrac{1}{n!}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}=0$，所以收敛半径为 $R=+\infty$.

(3) 因为 $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\dfrac{(-1)^{n+2}}{n+1}}{\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$，所以收敛半径为 $R=\dfrac{1}{\rho}=1$.

例 9-19 求下列幂级数的收敛域.

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{2^n}$； (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-2)^n}{n^2}$.

解 (1) 由于所给级数缺少奇数次幂，故该级数的收敛半径不能用定理 9.9 的计算公式求得，可直接利用比值审敛法. 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\dfrac{x^{2(n+1)}}{2^{n+1}}\right|}{\left|\dfrac{x^{2n}}{2^n}\right|}=\frac{1}{2}|x^2|=\frac{1}{2}|x|^2$$

所以，当 $\dfrac{1}{2}|x|^2<1$，即 $|x|<\sqrt{2}$ 时，级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{2^n}$ 绝对收敛；当 $\dfrac{1}{2}|x|^2>1$，即 $|x|>\sqrt{2}$ 时，级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{2^n}$ 发散. 故收敛半径 $R=\sqrt{2}$. 当 $x=-\sqrt{2}$ 时，原级数为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}1$，发散；当 $x=\sqrt{2}$ 时，原级数变为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}1$，发散. 故级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{2^n}$ 的收敛域为 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

(2) 令 $t=x-2$，则所给级数变成 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{t^n}{n^2}$. 因为

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{1}{(n+1)^2}}{\dfrac{1}{n^2}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=1$$

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n^2}$ 的收敛半径为 $R=1$,即在区间 $(-1,1)$ 内,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n^2}$ 绝对收敛;在点 $t=1$ 处,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n^2}$ 成为 p-级数,收敛;在点 $t=-1$ 处,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n^2}$ 成为交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}$,收敛.

因此,幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n^2}$ 的收敛域为 $(-1,1)$,从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n^2}$ 的收敛域为 $(1,3)$(因 $-1<t<1$,即 $-1<x-2<1$,故 $1<x<3$).

9.3.3 幂级数的性质

性质 9.6 如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ 的收敛半径分别为 R_1 和 R_2,$R=\min\{R_1,R_2\}$,则在 $(-R,R)$ 内,幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)x^n$ 收敛,且有

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\pm\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$$

性质 9.7 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 $R(R>0)$,则和函数 $S(x)$ 具有下列性质:

(1)$S(x)$ 在 $(-R,R)$ 内连续;

(2)$S(x)$ 在 $(-R,R)$ 内可导,且 $S'(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$,即幂级数在收敛区间内可以逐项求导;

(3)$S(x)$ 在 $(-R,R)$ 内可积,且

$$\int_0^x S(x)\mathrm{d}x=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^x a_nx^n\mathrm{d}x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$$

即幂级数在收敛区间内可以逐项积分.

例 9-20 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n$,$\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}$ 的和函数.

解 当 $|x|<1$ 时,级数 $\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$ 是公比为 x 的收敛等比级数,故有

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x},x\in(-1,1)$$

用 $-x$ 代换级数中的 x,可得

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n=\frac{1}{1+x},x\in(-1,1)$$

将上面的两个级数相加,得

$$\sum_{n=0}^{\infty}2x^{2n}=\frac{2}{1-x^2},x\in(-1,1)$$

即

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}=\frac{1}{1-x^2},x\in(-1,1)$$

例 9-21 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1}$,$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$ 的和函数.

解 将级数 $\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$,$x\in(-1,1)$ 两端积分,得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1}=-\ln(1-x)=\ln\frac{1}{1-x},x\in(-1,1)$$

令 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$，两端求导，得

$$S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n=\frac{1}{1+x^2},x\in(-1,1)$$

两端积分，得

$$S(x)=\arctan x,x\in(-1,1)$$

即

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}=\arctan x,x\in(-1,1)$$

注意 $\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n=\frac{1}{1+x^2}$ 相当于将 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)x^n=\frac{1}{1+x}$ 中的 x 代换成 x^2.

例 9-22 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ 的和函数.

解 由例 9-18 可知此级数的收敛区间为 $(-\infty,+\infty)$. 令其和函数为 $y=f(x)$，即 $y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$，则有

$$y'=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=y$$

解此微分方程得 $y=Ce^x$.

再注意到 $f(0)=1$，即得 $C=1$. 所以，和函数为 $y=e^x$，即

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots,x\in(-\infty,+\infty)$$

习题 9.3

1. 求下列幂级数的收敛半径和收敛域.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$； (2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^n}{n^2}$； (3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{n!}$； (4) $\sum_{n=1}^{\infty}n!x^n$.

2. 求下列幂级数的和函数.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n$； (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$.

3. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 3^n}$ 的收敛半径和收敛域.

4. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$ 的和函数.

§9.4 函数的幂级数展开

前面我们讨论了幂级数的收敛性及其性质，但在应用中，还需要考虑把一个已知函数展开成幂级数的问题.

9.4.1 泰勒级数

1. 泰勒公式

在许多应用中，我们经常遇到这样的问题：给定函数 $f(x)$，要考虑它是否能在某个区间内“展开成幂级数”. 也就是说，是否能找到这样的一个幂级数，它在某区间内收敛，且其和恰好就是给定的函数 $f(x)$. 如果能找到这样的幂级数，就说函数 $f(x)$ 在该区间内能展开成幂级数，即

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$$

根据要解决的问题，提出下列问题.

(1) 如果能展开，a_n 是什么？

(2) 展开式是否唯一？

(3) 在什么条件下才能展开成幂级数？

对于问题(1)(2)，有下面的定理.

定理 9.10 如果函数 $f(x)$ 在某个邻域内具有任意阶导数，且在某个邻域内能**展开成**$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)$**的幂级数**，即

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$$

则其系数为

$$a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(n=0,1,2,\cdots)$$

且展开式是**唯一**的 .

证明 因为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 在某个邻域内收敛于 $f(x)$，即

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots$$

逐项求导，得

$$f'(x)=a_1+2a_2(x-x_0)+\cdots+na_n(x-x_0)^{n-1}+\cdots$$
$$f''(x)=2!a_2+3\cdot 2a_3(x-x_0)+\cdots+n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2}+\cdots$$
$$\cdots$$
$$f^{(n)}(x)=n!a_n+(n+1)n\cdots 3\cdot 2a_{n+1}(x-x_0)+\cdots$$
$$\cdots$$

令 $x=x_0$，则

$$a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(n=0,1,2,\cdots)$$

称之为泰勒系数.

泰勒系数是唯一的，所以 $f(x)$ 的展开式是唯一的 .

为了解决上面的问题(3)，先介绍泰勒公式.

定理 9.11 如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 的附近具有 $n+1$ 阶导数，则在 x 与 x_0 之间存在一点 ξ，使得

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\frac{1}{3!}f'''(x_0)(x-x_0)^3+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1} \quad (9\text{-}4)$$

成立.

式(9-4)称为**函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的 n 阶泰勒公式**,简称 **n 阶泰勒公式**.

式(9-4)中的前 $n+1$ 项

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$$

称为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的泰勒多项式,它是$(x-x_0)$ 的 n 次多项式.

式(9-4)中的最后一项$\frac{1}{(n+1)!}f^{n+1}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$ 称为**函数 $f(x)$ 的泰勒余项**,记作 $R_n(x)$,即

$$R_n(x)=\frac{1}{(n+1)!}f^{n+1}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$$

其中 ξ 在 x 与 x_0 之间.当用 n 次泰勒多项式代替 $f(x)$ 时,其误差就是泰勒余项的绝对值,即 $|R_n(x)|$.

当 $x_0=0$ 时,则有**麦克劳林公式**

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\frac{1}{3!}f'''(0)x^3+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n+R_n(x)$$

其中 $R_n(x)=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)x^{n+1}$,$\xi$ 在 0 与 x 之间.

2. 泰勒级数

定义 9.7 如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 的附近具有任意阶导数,则幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

称为 $f(x)$ 在点 x_0 处的**泰勒级数**,记为

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \tag{9-5}$$

当 $x_0=0$ 时,幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

称为 $f(x)$ 在点 $x_0=0$ 处的**麦克劳林级数**(简称**麦氏级数**).

思考 具有任意阶导数的函数,是否都可以展开成泰勒级数?

例如,$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$在点 $x=0$ 处任意可导,且 $f^{(n)}(0)=0(n=0,1,2,\cdots)$,所以 $f(x)$ 的麦氏级数为$\sum_{n=0}^{\infty}0\cdot x^n$.该级数在$(-\infty,+\infty)$内的和函数 $S(x)\equiv 0$.可见,除 $S=0$ 外,$f(x)$ 的麦氏级数处处不收敛于 $f(x)$,即并不是具有任意阶导数的函数,都可以展开成泰勒级数.

那么在什么条件下,函数 $f(x)$ 可以展开成它的泰勒级数呢?我们给出下面的定理.

定理 9.12 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的附近具有各阶导数,则 $f(x)$ 在该邻域内能展开成泰勒级数的**充要条件**是 $f(x)$ 的泰勒级数公式中的余项 $R_n(x)$ 当 $n\to\infty$ 时的极限为零,即

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$$

证明 (1) 必要性.设 $f(x)$ 能展开成泰勒级数.由

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i+R_n(x)$$

其中

$$R_n(x)=f(x)-S_n(x)$$

因为

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = f(x)$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty}[f(x) - S_n(x)] = 0$$

(2) 充分性. 由于

$$R_n(x) = f(x) - S_n(x)$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}[f(x) - S_n(x)] = \lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

即

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = f(x)$$

故泰勒级数收敛于 $f(x)$.

思考 $f(x)$ 的泰勒级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ 在收敛区间内一定收敛吗?如果它收敛,一定收敛到 $f(x)$ 吗?

9.4.2 函数展开为幂级数的方法

1. 直接展开法

利用麦克劳林公式将函数 $f(x)$ 展开成幂级数的方法,称为**直接展开法**.

例 9-23 将函数 $f(x) = e^x$ 展开成 x 的幂级数.

解 先求出 $f(x) = e^x$ 的各阶导数,再将 $x = 0$ 代入各阶导数,得

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = 1$$

再将它们分别代入式(9-5),得

$$1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots \tag{9-5}$$

显然这个幂级数的收敛区间为$(-\infty, +\infty)$.

至于级数式(9-5)是否以 $f(x) = e^x$ 为和函数,即它是否收敛于 $f(x) = e^x$,还要考察函数 $f(x) = e^x$ 的麦克劳林公式中的余项.

因为

$$R_n(x) = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}\,(0 < \theta < 1)$$

且 $\theta x \leqslant |\theta x| < |x|$,所以 $e^{\theta x} < e^{|x|}$. 因此,有

$$|R_n(x)| = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}|x|^{n+1} < \frac{e^{|x|}}{(n+1)!}|x|^{n+1}$$

注意到,对任一确定的 x 值,$e^{|x|}$ 是一个确定的常数,而级数式(9-5)是绝对收敛的. 因此,当 $n\to\infty$ 时,$\dfrac{e^{|x|}}{(n+1)!}\to 0$. 所以,当 $n\to\infty$ 时,$\dfrac{e^{|x|}}{(n+1)!}|x|^{n+1}\to 0$. 由此可知

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

这表明级数式(9-5)确实收敛于 $f(x) = e^x$,故有

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots, x \in (-\infty, +\infty)$$

例 9-24 将函数 $f(x)=\sin x$ 展开成 x 的幂级数.

解 由 $f^{(n)}(x)=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)(n=1,2,\cdots)$ 可知

$$f(0)=0,f'(0)=1,f''(0)=0,f'''(0)=-1,\cdots,$$
$$f^{(2n)}(0)=0,f^{(2n+1)}(0)=(-1)^n$$

于是,可以得到幂级数

$$x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots,x\in(-\infty,+\infty)$$

因为所给函数的麦克劳林公式中的余项为

$$R_n(x)=\frac{\sin\left(\theta x+\frac{n+1}{2}\pi\right)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

所以,可以推知

$$|R_n(x)|=\frac{\left|\sin\left(\theta x+\frac{n+1}{2}\pi\right)\right|}{(n+1)!}|x|^{n+1}\leqslant\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\to 0(n\to\infty)$$

因此,得到 $f(x)=\sin x$ 的幂级数展开式为

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots,x\in(-\infty,+\infty)$$

运用直接展开法将函数展开成幂级数的运算过于麻烦,因此人们常常采用**间接展开法**.

2. 间接展开法

从已知函数的展开式出发,利用幂级数的运算规则求得函数展开式的方法,称为**间接展开法**.

例 9-25 求函数 $f(x)=\cos x$ 的幂级数展开式.

解 因为 $(\sin x)'=\cos x$,所以可对

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots,x\in(-\infty,+\infty)$$

逐项求导,得

$$\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots,x\in(-\infty,+\infty)$$

例 9-26 将函数 $f(x)=\ln(1+x)$ 展开成 x 的幂级数.

解 因为 $\ln(1+x)=\int_0^x\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x$,所以将

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots+(-1)^nx^n+\cdots,x\in(-1,1)$$

两边同时积分,得

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\cdots$$

又因为幂级数逐项积分后收敛半径不变,所以上式右端级数的收敛半径仍为 $R=1$. 当 $x=-1$ 时,该级数发散;当 $x=1$ 时,该级数收敛. 于是,该级数的收敛域为 $(-1,1]$.

例 9-27 将函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 展开成 $(x-1)$ 的幂级数.

解 令 $x-1=t$,则 $x=t+1$,将其代入函数,有 $f(x)=\frac{1}{1+t}$. 先将函数 $\frac{1}{1+t}$ 展开成 t 的幂级数,得

$$\frac{1}{1+t}=1-t+t^2-\cdots+(-1)^nt^n+\cdots,t\in(-1,1)$$

再将上式中的 t 换成 $x-1$，得

$$\frac{1}{x}=1-(x-1)+(x-1)^2-\cdots+(-1)^n(x-1)^n+\cdots, x\in(0,2)$$

例 9-28　将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$ 展开成 x 的幂级数.

解　因为

$$f(x)=\frac{1}{x^2-3x+2}=\frac{1}{(1-x)(2-x)}=\frac{1}{1-x}-\frac{1}{2-x}$$

且

$$\begin{aligned}\frac{1}{2-x}&=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}}\\&=\frac{1}{2}\left[1+\frac{x}{2}+\left(\frac{x}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{x}{2}\right)^n+\cdots\right], x\in(-2,2)\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{1}{1-x}-\frac{1}{2-x}\\&=(1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots)-\frac{1}{2}\left[1+\frac{x}{2}+\left(\frac{x}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{x}{2}\right)^n+\cdots\right]\\&=\frac{1}{2}+\frac{2^2-1}{2^2}x+\frac{2^3-1}{2^3}x^2+\cdots+\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}x^n+\cdots\end{aligned}$$

习题 9.4

1. 将下列函数展开成 x 的幂级数，并求其收敛区间.

(1) $f(x)=\sin^2 x$；　　(2) $f(x)=a^x$.

2. 将函数 $f(x)=\dfrac{1}{2-x}$ 展开成 $(x-1)$ 的幂级数.

3. 将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $(x+3)$ 的幂级数.

4. 将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4x+3}$ 展开成 $(x-1)$ 的幂级数.

§9.5　应用示例——投资费用问题

9.5.1　问题提出

设初期投资为 p，年利率为 r，每 t 年重复一次投资，这样第一次更新费用的现值为 pe^{-rt}，第二次更新费用的现值为 pe^{-2rt}，以此类推，投资费用 D 为下列等比数列之和.

$$\begin{aligned}D&=p+pe^{-rt}+pe^{-2rt}+\cdots+pe^{-nrt}+\cdots\\&=\frac{p}{1-e^{-rt}}=\frac{pe^{rt}}{e^{rt}-1}\end{aligned}$$

某市要建造一座桥梁,建造钢桥的费用为380 000元,每10年需要油漆一次,每次费用为40 000元,钢桥的期望寿命为40年;建造木桥的费用为200 000元,每2年需要油漆一次,每次费用为20 000元,木桥的期望寿命为15年.若年利率为10%,问建造哪一种桥比较经济?

9.5.2 解答过程

根据题意,桥的费用包括两部分:建桥费用和油漆费用.

对建造钢桥,有 $p=380\ 000$,$r=0.1$,$t=40$,$rt=0.1\times 40=4$,所以,建桥费用为

$$D_1=p+pe^{-4}+pe^{-2\times 4}+\cdots+pe^{-n\times 4}+\cdots$$

$$=\frac{p}{1-e^{-4}}=\frac{pe^4}{e^4-1}$$

其中,$e^4\approx 54.598$,故

$$D_1=\frac{380\ 000\times 54.598}{54.598-1}\approx 387\ 089.8(\text{元})$$

油漆费用为

$$D_2=\frac{40\ 000\times e^{0.1\times 10}}{e^{0.1\times 10}-1}\approx\frac{40\ 000\times 2.718}{2.718-1}\approx 63\ 282.9(\text{元})$$

故建造钢桥总费用的现值为

$$D=D_1+D_2=450\ 372.7(\text{元})$$

类似地,建造木桥的费用为

$$D_3=\frac{200\ 000\times e^{0.1\times 15}}{e^{0.1\times 15}-1}\approx\frac{200\ 000\times 4.482}{4.482-1}\approx 257\ 438.3(\text{元})$$

油漆木桥的费用为

$$D_4=\frac{20\ 000\times e^{0.1\times 2}}{e^{0.1\times 2}-1}\approx\frac{20\ 000\times 1.221}{1.221-1}\approx 110\ 497.7(\text{元})$$

故建造木桥总费用的现值为

$$D=D_3+D_4=367\ 936(\text{元})$$

由此可知,建造木桥比较经济.

在这个投资分析中,没有考虑建桥费用变动和技术改进等因素对投资额的影响.长时间间隔内,实际问题远比数学模型复杂,所有数学模型都只是实际问题简化的版本,忽略了很多因素.尽管如此,数学模型为经济问题提供了一个可以定量分析和比较的工具,作为决策的参考依据,其重要性受到越来越多的重视.

§9.6 数学实验九:利用 MATLAB 求级数之和

9.6.1 实验任务

利用数学软件 MATLAB 求级数之和.

9.6.2 实验过程

1. 相关命令

MATLAB 中求级数之和的命令说明如表9-1所示.

表 9-1

命　　令	说　　明
symsum(f,k,k1,k2)	用于求级数的和，其中 f 表示一个函数的通项，是一个符号表达式；k 是级数自变量，k 省略时使用系统的默认变量，如果给出的变量中只含有一个变量，则在函数调用时可以省略；$k1$ 和 $k2$ 是求和的开始项和结束项

2. 操作实例

操作实例 9-1　求级数 $f=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的和.

解　运行 MATLAB，在命令窗口中输入：

```
>> syms n
>> f = 1/n^2;
>> symsum(f,n,1,2)
```

按 Enter 键，得到如下计算结果：

```
ans =
5/4
```

即 $f=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 当 $n=2$ 时的和为$\frac{5}{4}$.

继续将范围拓展到无穷大，输入：

```
>> symsum(f,n,1,inf)
```

按 Enter 键，得到如下计算结果：

```
ans =
pi^2/6
```

即 $f=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的值为$\frac{1}{6}\pi^2$.

操作实例 9-2　求级数 $f=\frac{1}{1\times 4}+\frac{1}{4\times 7}+\frac{1}{7\times 10}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}+\cdots$ 的和.

解　运行 MATLAB，在命令窗口中输入：

```
>> syms n
>> f = 1/((3 * n - 2) * (3 * n + 1));
>> s = symsum(f,n,1,inf)
```

按 Enter 键，得到如下计算结果：

```
s =
1/3
```

即 $f=\frac{1}{1\times 4}+\frac{1}{4\times 7}+\frac{1}{7\times 10}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}+\cdots$ 的和为$\frac{1}{3}$.

9.6.3　实验作业

求下列级数之和.

(1) $f=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$；

(2) $f=\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{3\times 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\cdots$.

复习题 9

1. 选择题.

(1) 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$ 是收敛的,则(　　).

A. $\lim_{n\to\infty}u_n=0$　　B. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 必收敛

C. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散　　D. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 未必收敛

(2) $\lim_{n\to\infty}u_n\neq 0$ 是级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散的(　　).

A. 充分条件　　B. 必要条件

C. 充要条件　　D. 既非充分也非必要条件

(3) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+a}{n^2}$(　　).

A. 收敛　　B. 发散

C. 绝对收敛　　D. 收敛性与 a 的值有关

(4) 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$ 的收敛域为(　　).

A. $(-1,1]$　　B. $(-1,1)$

C. $[-1,1)$　　D. $[-1,1]$

2. 填空题.

(1) 对级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$,$\lim_{n\to\infty}u_n=0$ 是它收敛的________条件,不是它收敛的________条件.

(2) 部分和数列 $\{S_n\}$ 有界是正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的________条件.

(3) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 必定________;若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 必定________.

3. 判别下列级数的收敛性.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$;　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 3n}{2^n}$;　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n(n+2)}$.

4. 讨论下列级数是绝对收敛还是条件收敛.

(1) $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots$;　　(2) $-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7^2}+\cdots$.

5. 判别下列幂级数的收敛性.

(1) $x^2+x^4+x^8+\cdots+x^{2^n}+\cdots$;　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{n}x^n$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(1+n)}{n+1}x^n$;　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}n(x+1)^n$.

6. 求下列幂级数的和函数.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2} x^{n-1}$;　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} n(x-1)^n$.

7. 将下列函数展开成幂级数并求收敛区间.

(1) $\sin \frac{x}{2}$;　　(2) $\ln(a+x)$.

8. 试由 $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的展开式,通过逐项积分求出 $\arcsin x$ 的展开式.

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \times 3}{2 \times 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \times 3 \times 5}{2 \times 4 \times 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \cdots (|x| < 1)$$