

巍巍交大 百年书香
www.jiaodapress.com.cn
bookinfo@sjtu.edu.cn



策划编辑 金颖杰
责任编辑 胡思佳
封面设计 刘文东

高等职业教育本科数学系列教材

线性代数

主编 雷田礼 苏丹丹

Linear Algebra

线性代数

主编 雷田礼 苏丹丹

Linear Algebra
线性代数



上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS



扫描二维码
关注上海交通大学出版社
官方微信

ISBN 978-7-313-32028-5



定价: 42.00元



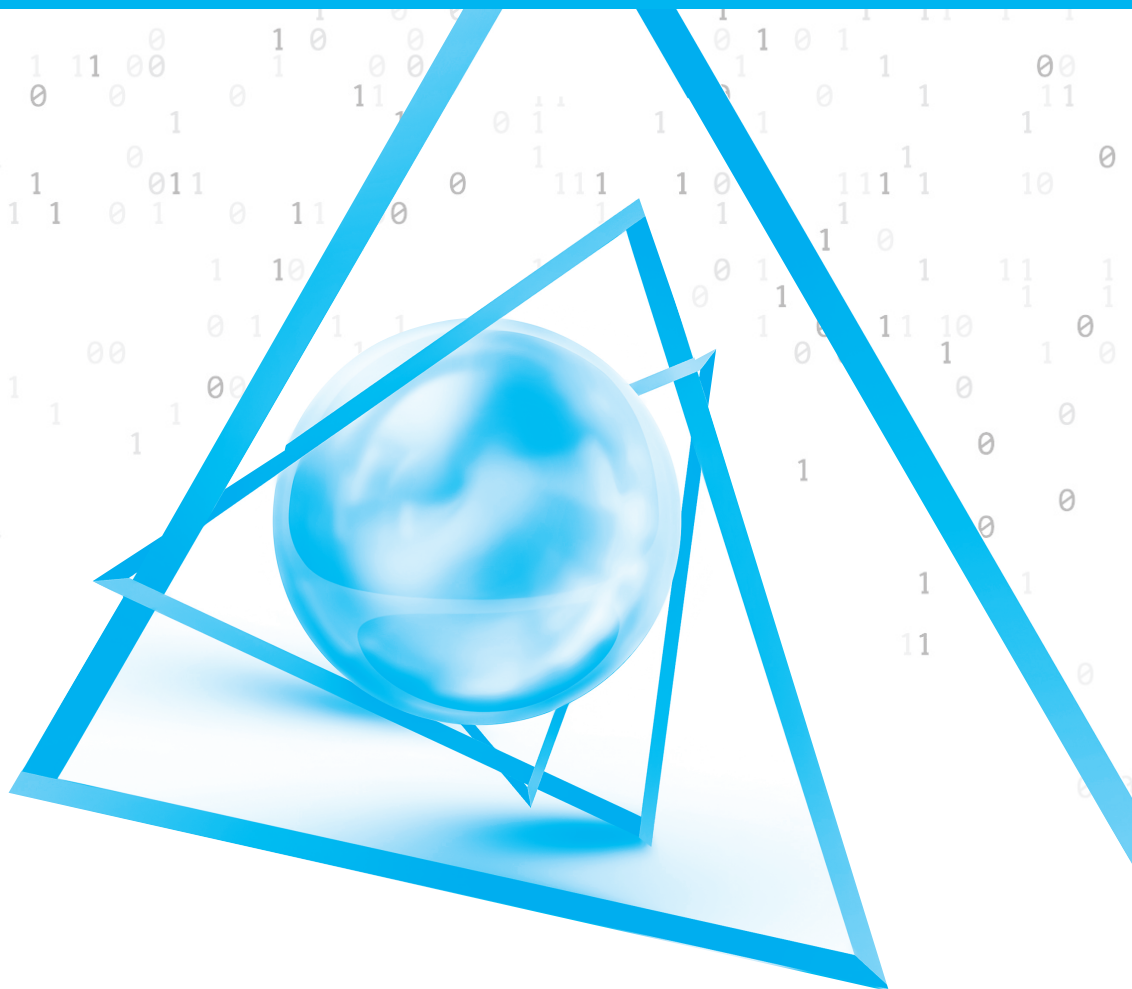
上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS



www.xinsijiaocai.com

赠精品教学资料包

服务热线: 400-615-1233



高等职业教育本科数学系列教材

Linear Algebra

线性代数

主编 雷田礼
苏丹丹
副主编 孙海青



上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

内容提要

线性代数在职业本科中具有重要地位,是很多专业的基础课程之一,对学生的学术发展和职业发展都至关重要.通过系统学习线性代数知识,学生可以提升自己的数学素养和问题解决能力,为未来的发展奠定坚实基础.本书共分为5章,内容包括矩阵与行列式、向量与向量组、线性方程组、特征值与特征向量、二次型.

本书既可作为职业本科线性代数课程的教材,也可作为相关人士的参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数 / 雷田礼, 苏丹丹主编. --上海: 上海交通大学出版社, 2025. 2. -- ISBN 978-7-313-32028-5
I. O151. 2
中国国家版本馆 CIP 数据核字第 2025UW1811 号

线性代数

XIANXING DAISHU

主 编: 雷田礼 苏丹丹

出版发行: 上海交通大学出版社

邮政编码: 200030

印 制: 大厂回族自治县聚鑫印刷有限责任公司

开 本: 850 mm×1 168 mm 1/16

字 数: 219 千字

版 次: 2025 年 2 月第 1 版

书 号: ISBN 978-7-313-32028-5

定 价: 42.00 元

地 址: 上海市番禺路 951 号

电 话: 021-64071208

经 销: 全国新华书店

印 张: 12.25

印 次: 2025 年 2 月第 1 次印刷

电子书号: ISBN 978-7-89564-289-8

版权所有 侵权必究

告读者: 如您发现本书有印装质量问题请与印刷厂质量科联系

联系电话: 0316-8836866

前言

PREFACE

线性代数在职业本科中具有重要地位,是很多专业的基础课程之一,对学生的学术发展和职业发展都至关重要.通过系统学习线性代数知识,学生可以提升自己的数学素养和解决问题的能力,为未来的发展奠定坚实基础.

本书落实《“十四五”职业教育规划教材建设实施方案》《高等学校课程思政建设指导纲要》《国家职业教育改革实施方案》等文件的要求,结合新时代特点和数学教育发展的形势需求进行编写.全书共分为5章,内容包括矩阵与行列式、向量与向量组、线性方程组、特征值与特征向量、二次型.

本书具有以下特色.

1. 融入育人元素,贯彻党的二十大精神

党的二十大报告指出:“育人的根本在于立德.全面贯彻党的教育方针,落实立德树人根本任务,培养德智体美劳全面发展的社会主义建设者和接班人.”本书通过设置“数学文化”栏目,融入我国数学家的事迹、中华优秀传统文化以及我国在新时代取得的科学技术成就等内容,弘扬科学家精神,增强学生的民族自豪感.

2. 结构安排合理,符合学生的认知规律

本书充分考虑学生的认知规律,案例贴近生活,内容由浅入深、由易到难,逐步展开,有助于学生在解决问题的过程中理解和掌握概念.

3. 习题丰富,难度适中

本书每节设置习题,每章设置复习题,以强化学生学以致用能力,并逐步锻炼学生运

用线性代数解决实际问题的能力.

4. 数字化资源丰富,有效提高教学质量

本书配有内容丰富的教学资料包,包含课件、习题答案等多种教学资源,为师生提供混合式教学服务,能有效提高教学质量.

本书由深圳职业技术大学的雷田礼、佛山职业技术学院的苏丹丹任主编,天津电子信息职业技术学院的孙海青任副主编.在编写过程中,编者参考了一些教材及资料,在此向相关作者表示诚挚的感谢.

由于编者水平有限,书中难免存在不足之处,恳请广大读者批评指正.

编 者

目录

CONTENTS

第 1 章	矩阵与行列式	1
1.1	矩阵的概念	3
1.1.1	矩阵的定义	3
1.1.2	几种特殊矩阵	4
1.2	矩阵的运算	6
1.2.1	同型矩阵	6
1.2.2	矩阵的加法和减法	7
1.2.3	矩阵的数乘	9
1.2.4	矩阵的乘法	11
1.2.5	矩阵的转置与对称矩阵	18
1.3	行列式	21
1.3.1	排列与逆序	21
1.3.2	行列式的概念	23
1.3.3	二阶和三阶行列式	24
1.3.4	行列式按行(列)展开	28
1.3.5	行列式的性质	30
1.3.6	行列式的计算	36
1.3.7	方阵的行列式及运算律	41

1.4	逆矩阵	43
1.4.1	逆矩阵的概念	43
1.4.2	逆矩阵的性质	44
1.4.3	逆矩阵的求法	46
1.4.4	矩阵多项式及用逆矩阵解线性方程组	49
1.5	分块矩阵	51
1.5.1	分块矩阵的概念	51
1.5.2	分块矩阵的基本运算	52
1.6	矩阵的初等变换和初等矩阵	57
1.6.1	矩阵的初等变换概念	57
1.6.2	初等矩阵的概念	59
1.6.3	矩阵的初等变换和初等矩阵的应用	62
1.7	矩阵的秩	68
1.7.1	矩阵的秩的概念	68
1.7.2	矩阵的秩的性质	69
1.8	矩阵的应用	72
	数学文化	74
	第1章复习题	75
	应用拓展	80

第2章

向量与向量组 83

2.1	n 维向量及其线性运算	85
2.1.1	n 维向量的概念	85
2.1.2	n 维向量的线性运算	86
2.2	向量组的线性相关性	89
2.2.1	线性组合	89
2.2.2	线性相关与线性无关	91
2.2.3	向量组线性相关性的有关结论	92
2.3	向量组的秩	95
2.3.1	向量组的极大无关组与秩	95

2.3.2 矩阵的行秩与列秩	98
2.4 向量的内积与向量组的正交化	104
2.4.1 向量的内积	104
2.4.2 向量组的正交化	105
数学文化	108
第2章复习题	109
应用拓展	110

第3章

线性方程组 111

3.1 克莱姆法则与高斯消元法	113
3.1.1 克莱姆法则	113
3.1.2 高斯消元法	118
3.2 线性方程组有解的判别定理	121
3.3 线性方程组解的结构	124
3.3.1 齐次线性方程组解的结构	124
3.3.2 非齐次线性方程组解的结构	125
数学文化	129
第3章复习题	130
应用拓展	132

第4章

特征值与特征向量 133

4.1 矩阵的特征值与特征向量	135
4.1.1 矩阵的特征值与特征向量的概念	135
4.1.2 矩阵的特征值与特征向量的计算	136
4.1.3 矩阵的特征值与特征向量的性质	141
4.2 相似矩阵与矩阵的对角化	147
4.2.1 相似矩阵的概念	147
4.2.2 矩阵可对角化的条件	148

4.3 实对称矩阵的对角化	153
数学文化	157
第4章复习题	158
应用拓展	160

第5章

二次型 161

5.1 二次型及其标准型	163
5.1.1 二次型的概念	163
5.1.2 二次型的标准型	167
5.1.3 二次型化为标准型	168
5.1.4 二次型的规范标准型	173
5.2 正定二次型和正定矩阵	175
5.2.1 正定二次型	175
5.2.2 正定矩阵	177
5.2.3 其他类型的二次型及矩阵	182
数学文化	185
第5章复习题	186
应用拓展	187

参考文献 188

第 1 章

矩阵与行列式

矩阵与行列式



1.1 矩阵的概念



微课：矩阵的概念

1.1.1 矩阵的定义

引例 1 设某品种猕猴桃有 A_1, A_2, A_3 三个产地和 B_1, B_2, B_3 三个销地,表 1-1 为该品种猕猴桃从产地到销地的运输方案.

表 1-1

产 地	销 地		
	B_1	B_2	B_3
A_1	1	2	6
A_2	5	1	3
A_3	7	4	2

则表 1-1 的数据按照原有位置可组成一个矩形数表:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 5 & 1 & 3 \\ 7 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

该数表可称为该品种猕猴桃的产销矩阵,简明地描述了从每个产地运往每个销地的产品数量.

引例 2 1970 年,我国发射了第一颗人造地球卫星,几十年过去了,我国的航天科技已经走在世界前列.1992 年,我国制定了载人航天工程“三步走”发展战略.第一步是发射载人飞船(神舟号飞船),建成初步配套的试验性载人飞船工程,并开展空间应用实验;第二步是在第一艘载人飞船发射成功后,突破载人飞船与空间飞行器的交会对接技术,并利用载人飞船技术改装和发射一个空间实验室,以解决有一定规模的、短期有人照料的空间应用问题;第三步是建造载人空间站,以解决有较大规模的、长期有人照料的空间应用问题.

中国空间站又称天宫空间站,是我国建成的国家级太空实验室.2023 年 10 月,神舟十七号载人飞船与空间站组合体完成自主快速交会对接,三名航天员顺利进驻中国空间站.已知建设空间站的 m 种部件需要 n 种材料,假设生产第 $i(i=1,2,\cdots,m)$ 种部件所需要的第 $j(j=1,2,\cdots,n)$ 种材料的数量为 a_{ij} ,则在生产过程中,部件和投入材料之间的数量关系可以用以下矩形数表表示.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

定义 1 由 $m \times n$ 个数 a_{ij} ($i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n$) 排成一个 m 行 n 列的矩形数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为一个 m 行 n 列矩阵, 简称 $m \times n$ 型矩阵, 其中 a_{ij} 表示第 i 行第 j 列的元素.

通常用大写粗体字母 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \cdots$ 表示矩阵, 有时为了标明矩阵的行数、列数及元素 a_{ij} , 矩阵也可记作 $A_{m \times n}$ 或 $(a_{ij})_{m \times n}$.

当矩阵的元素均为实数时, 称其为**实矩阵**; 当元素均为复数时, 称其为**复矩阵**.

注意

若无特别说明, 本书所讨论的矩阵均为实矩阵.

1.1.2 几种特殊矩阵

1. 零矩阵

所有元素均为 0 的矩阵称为**零矩阵**, 记作 $\mathbf{O}$. 如果要指明其行数与列数, 则记为 $\mathbf{O}_{m \times n}$, 即

$$\mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

注意

行数和列数不同的零矩阵是不同的.

2. 行(列)矩阵

当 $m=1$ 时, 称 $1 \times n$ 型矩阵 $[a_1, a_2, \cdots, a_n]$ 为**行矩阵**(或**行向量**); 当 $n=1$ 时, 称 $m \times 1$ 型矩阵

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$$
 为列矩阵(或列向量).

例如, 矩阵 $[3, 2, 2, 4, 5]$ 是一个 1×5 的行矩阵, 而矩阵

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
 是一个 4×1 的列矩阵.

3. n 阶方阵

当矩阵的行数与列数都为 n 时, 称为 n 阶矩阵或 n 阶方阵.

对于 n 阶方阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, 连接其左上角元素 a_{11} 和右下角元素 a_{nn} 的连线称为矩阵

$\mathbf{A}$ 的主对角线, 位于主对角线上的元素 $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ 称为矩阵 $\mathbf{A}$ 的对角元.

注意

当 $m=n=1$ 时, 在逻辑上, 我们将一阶方阵 $\mathbf{A}=[a]$ 视为普通的数 a .

4. 上(下)三角形矩阵

主对角线下(上)方元素全为 0 的 n 阶方阵称为上(下)三角形矩阵. 例如,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \\ 7 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

分别是三阶上三角形矩阵和四阶下三角形矩阵.

5. 对角矩阵

除对角元以外, 其余元素全为 0 的 n 阶方阵称为 n 阶对角矩阵, 记为

$$\mathbf{A} = \text{diag}[a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}] = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

注意

当 n 阶对角矩阵 $\mathbf{A}$ 中的对角元 $a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}=a$ 时, 称其为数量矩阵. 特别地, 当 $a=1$ 时, 该数量矩阵称为单位矩阵, 通常记为 $\mathbf{E}_n$, 在不引起混淆的情况下, 简记为 $\mathbf{E}$ (也有部分教材将 n 阶单位矩阵记为 $\mathbf{I}_n$ 或 $\mathbf{I}$), 即

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

显然, 对角矩阵既是上三角形矩阵, 也是下三角形矩阵, 但反之则不然.

习题 1-1

1. 什么是矩阵? 请简要描述矩阵的定义及其符号表示.
2. 请写出一个 3×4 的矩阵.
3. 请简要解释方阵的定义, 并给出一个方阵的例子.

1.2 矩阵的运算

1.2.1 同型矩阵

定义 2 当两个矩阵的行数相等, 列数也相等时, 称之为同型矩阵.

如果有两个 $m \times n$ 型矩阵 $\mathbf{A}=(a_{ij})$, $\mathbf{B}=(b_{ij})$ 满足

$$a_{ij}=b_{ij} \quad (i=1, 2, \cdots, m; j=1, 2, \cdots, n),$$

那么称同型矩阵 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 相等, 记作 $\mathbf{A}=\mathbf{B}$.

例如, 给定矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & x \\ 5 & 7 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix} a & 3 & 2 \\ 5 & b & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C}=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$, 则矩阵 $\mathbf{A}=\mathbf{B}$ 的充要条件是 $a=1$,

$b=7, x=2$. 而无论是矩阵 $\mathbf{A}$ 还是矩阵 $\mathbf{B}$, 都不可能等于矩阵 $\mathbf{C}$.

注意

引入矩阵相等的概念后,用一个矩阵等式就可以表达很多的数量等式,如 $A=(a_{ij})_{m_1 \times n_1}=B=(b_{ij})_{m_2 \times n_2}$ 意味着

$$m_1=m_2, n_1=n_2 \text{ 且 } a_{ij}=b_{ij} (i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n).$$

1.2.2 矩阵的加法和减法

引例 3 据统计,有甲、乙、丙三家公司分两批向武汉市的汉阳区、武昌区、青山区(编号为 a, b, c) 捐赠衣物、大米、医药用品(单位:t). 其捐赠方案分别用两个矩阵表示:

$$\begin{array}{ccc} & a & b & c \\ \text{甲} & 12 & 14 & 16 \\ \mathbf{A}_1 = \text{乙} & 7 & 9 & 8 \\ \text{丙} & 10 & 11 & 14 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & a & b & c \\ \text{甲} & 16 & 11 & 15 \\ \mathbf{A}_2 = \text{乙} & 10 & 12 & 11 \\ \text{丙} & 11 & 13 & 12 \end{array}$$

那么,各公司捐赠物品到各区的总量是多少?

根据问题的实际含义,各公司捐赠物品到各区的总量(单位:t)为

$$\begin{array}{ccc} & a & b & c \\ \text{甲} & 12+16 & 14+11 & 16+15 \\ \text{乙} & 7+10 & 9+12 & 8+11 \\ \text{丙} & 10+11 & 11+13 & 14+12 \end{array}$$

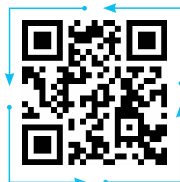
1. 矩阵的加法

定义 3 设两个 $m \times n$ 型矩阵分别为

$$\mathbf{A}=(a_{ij})_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}=(b_{ij})_{m \times n} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix},$$

则矩阵 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 的和,简记为 $\mathbf{A}+\mathbf{B}$,规定为



微课: 矩阵的加法和减法

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

用矩阵的简记符号表示,即为

$$(a_{ij})_{m \times n} + (b_{ij})_{m \times n} = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}.$$

注意

只有同型矩阵才能相加,并且两个矩阵相加是将矩阵对应位置的元素相加.换句话说,矩阵的加法归结为其元素的加法(数的加法).

由于数的加法满足结合律和交换律,因此,矩阵也满足以下运算规律.

(1) 结合律: $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$.

(2) 交换律: $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$.

(3) $\mathbf{A} + \mathbf{O} = \mathbf{O} + \mathbf{A} = \mathbf{A}$.

其中 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ 均为 $m \times n$ 型矩阵, $\mathbf{O}$ 为 $m \times n$ 型零矩阵.

根据结合律和交换律,对于多个形状相同的矩阵相加,我们可以任意调换矩阵的前后顺序,也可以任意添加或去掉括号.因此, s 个 $m \times n$ 型矩阵 $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_s$ 的和就可以简记为 $\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \dots + \mathbf{A}_s$. 特别地,三个 $m \times n$ 型矩阵 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ 相加时,可以记为 $\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}$.

2. 矩阵的减法

定义 4 设矩阵

$$\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

则矩阵 $\mathbf{A}$ 的负矩阵,简记为 $-\mathbf{A}$,规定

$$-\mathbf{A} = (-a_{ij})_{m \times n} = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix}.$$

由此,可以定义矩阵的减法,规定

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B}).$$

其中 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 均为 $m \times n$ 型矩阵. 也就是说, 只有两个形状相同的矩阵才能相减, 并且两个矩阵相减是将矩阵对应位置的元素相减.

显然, $\mathbf{A} - \mathbf{A} = \mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{O}$, $-(-\mathbf{A}) = \mathbf{A}$, $\mathbf{A} - \mathbf{O} = \mathbf{A}$, $\mathbf{O} - \mathbf{A} = -\mathbf{A}$.

例 1-1 已知矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, 矩阵 $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, 求矩阵 $\mathbf{A} + \mathbf{B}$, $\mathbf{A} - \mathbf{B}$.

解 $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0+(-1) & 1+1 \\ 0+1 & 3+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B}) = \begin{pmatrix} 0+1 & 1+(-1) \\ 0+(-1) & 3+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1.2.3 矩阵的数乘

引例 4 三个产地的某瓷砖产品销往 A, B, C, D 四个城市的数量(单位: km^2)用矩阵表示为

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 86 & 95 & 120 & 135 \\ 105 & 155 & 98 & 145 \\ 180 & 88 & 96 & 110 \end{pmatrix}.$$

如果每平方千米的销售价格为 5×10^3 万元, 那么各产地到各销售地的收入(单位: 10^3 万元)可用矩阵表示为

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 5 \times 86 & 5 \times 95 & 5 \times 120 & 5 \times 135 \\ 5 \times 105 & 5 \times 155 & 5 \times 98 & 5 \times 145 \\ 5 \times 180 & 5 \times 88 & 5 \times 96 & 5 \times 110 \end{pmatrix}.$$

这里相当于用 $\mathbf{A}$ 的每个元素都乘 5, 这就是矩阵的数乘运算.

定义 5 设矩阵

$$\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

则数 k 与矩阵 $\mathbf{A}$ 的乘积, 简记为 $k\mathbf{A}$ 或 $\mathbf{A}k$, 规定为

$$k\mathbf{A} = (ka_{ij})_{m \times n} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}.$$

有时, 也将数与矩阵的乘积简称为矩阵的数乘.

注意

数 k 与矩阵 A 的乘积得到的是一个形状与 A 相同的矩阵, 这个矩阵是将矩阵 A 的每一个元素都乘数 k .

数与矩阵的乘积满足以下运算规律.

(1) 分配律: $(k+l)A = kA + lA$, $k(A+B) = kA + kB$.

(2) 结合律: $(kl)A = k(lA)$.

其中 A, B 均为 $m \times n$ 型矩阵; k, l 为常数.

另外, 矩阵 A 的负矩阵 $-A$ 即为数 -1 与矩阵 A 的乘积 $(-1)A$. 通常, 将矩阵的加法和矩阵的数乘这两种运算统称为矩阵的线性运算.

例 1-2 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, 求 $A+2B$.

$$\text{解 } A+2B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 6 & -4 \\ 4 & 2 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -1 \\ 8 & 7 & 16 \end{pmatrix}.$$

例 1-3 求矩阵 X , 使 $3A-2X=B$, 其中

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -11 & 0 & 5 & 5 \\ -10 & 15 & -6 & 1 \\ 10 & -4 & 19 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } X &= \frac{1}{2}(3A-B) = \frac{1}{2} \left[3 \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -11 & 0 & 5 & 5 \\ -10 & 15 & -6 & 1 \\ 10 & -4 & 19 & 6 \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3+11 & 6-0 & 9-5 & 3-5 \\ 0+10 & 9-15 & -6+6 & 3-1 \\ 12-10 & 0+4 & 9-19 & 6-6 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 & -2 \\ 10 & -6 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & -10 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & -1 \\ 5 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -5 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

同样可以得到

$$x_2 = \sum_{k=1}^3 a_{2k} y_k = \sum_{j=1}^3 \left(\sum_{k=1}^3 a_{2k} b_{kj} \right) z_j. \quad (4)$$

如果将 x_1, x_2 与 z_1, z_2, z_3 之间的关系用 c_{ij} ($i=1, 2; j=1, 2, 3$) 表示, 即假设

$$\begin{cases} x_1 = c_{11} z_1 + c_{12} z_2 + c_{13} z_3, \\ x_2 = c_{21} z_1 + c_{22} z_2 + c_{23} z_3. \end{cases} \quad (5)$$

与式③和式④相比较, 得到

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^3 a_{ik} b_{kj}, i=1, 2; j=1, 2, 3. \quad (6)$$

如果将这些变量之间的关系用矩阵表示, 即把变量之间的系数按原来的顺序写成矩阵, 则 x_1, x_2 与 y_1, y_2, y_3 之间的关系为

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix},$$

y_1, y_2, y_3 与 z_1, z_2, z_3 之间的关系为

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}.$$

那么变量 x_1, x_2 与 z_1, z_2, z_3 之间的关系

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix}$$

就可以由式⑥决定. 我们将矩阵 $\mathbf{C}$ 称为矩阵 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 的乘积, 简记为 $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$.

对于一般的矩阵, 有以下定义.

定义 6 设矩阵 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times s}$, $\mathbf{B} = (b_{ij})_{s \times n}$. 矩阵 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 的乘积为一个 $m \times n$ 型矩阵 $\mathbf{C}$, 记作 $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, 其中

$$c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{is} b_{sj} = \sum_{k=1}^s a_{ik} b_{kj} \quad (i=1, 2, \cdots, m; j=1, 2, \cdots, n).$$

按照此定义, 矩阵 $\mathbf{C}$ 的第 i 行第 j 列的元素 c_{ij} 等于第一个矩阵 $\mathbf{A}$ 的第 i 行与第二个矩阵 $\mathbf{B}$ 的第 j 列对应元素的乘积之和.

注意

(1) 矩阵 $\mathbf{A}$ 与矩阵 $\mathbf{B}$ 的乘积 $\mathbf{C}$ 的第 i 行第 j 列 ($i=1, 2, \cdots, m; j=1, 2, \cdots, p$) 元素 c_{ij} 等于矩阵 $\mathbf{A}$ 的第 i 行与矩阵 $\mathbf{B}$ 的第 j 列对应元素的乘积之和.

(2) 不是任意两个矩阵都能相乘. 只有当第一个矩阵 $\mathbf{A}$ 的列数等于第二个矩阵 $\mathbf{B}$ 的行数时, 两个矩阵才能相乘. 且当矩阵 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 能够相乘时, 所得乘积矩阵 $\mathbf{AB}$ 的行数等于第一个矩阵 $\mathbf{A}$ 的行数, 列数等于第二个矩阵 $\mathbf{B}$ 的列数, 即 $\mathbf{A}_{m \times n} \mathbf{B}_{n \times p} = \mathbf{C}_{m \times p}$.

例 1-5 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, 求 A 与 B 的乘积 AB , 以及 B 与 A 的乘积 BA .

解 由于矩阵 A 的列数等于矩阵 B 的行数, 因此乘积 AB 是有意义的, 且是一个三阶方阵.

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 1 \times 2 + 2 \times 2 & 1 \times 1 + 2 \times (-2) & 1 \times 0 + 2 \times 3 \\ 3 \times 2 + (-1) \times 2 & 3 \times 1 + (-1) \times (-2) & 3 \times 0 + (-1) \times 3 \\ (-2) \times 2 + 1 \times 2 & (-2) \times 1 + 1 \times (-2) & (-2) \times 0 + 1 \times 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 & -3 & 6 \\ 4 & 5 & -3 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

同样, 矩阵 B 的列数和矩阵 A 的行数均为 3, 于是乘积 BA 也是有意义的, 且是一个二阶方阵.

$$\begin{aligned} BA &= \begin{pmatrix} 2 \times 1 + 1 \times 3 + 0 \times (-2) & 2 \times 2 + 1 \times (-1) + 0 \times 1 \\ 2 \times 1 + (-2) \times 3 + 3 \times (-2) & 2 \times 2 + (-2) \times (-1) + 3 \times 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -10 & 9 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

例 1-6 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, 求 A 与 B 的乘积 AB , 以及 B 与 A 的乘积 BA .

解 显然, AB 与 BA 都是有意义的, 且均为二阶方阵.

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 2 \times 1 + 1 \times (-2) & 2 \times (-1) + 1 \times 2 \\ 4 \times 1 + 2 \times (-2) & 4 \times (-1) + 2 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \\ BA &= \begin{pmatrix} 1 \times 2 + (-1) \times 4 & 1 \times 1 + (-1) \times 2 \\ (-2) \times 2 + 2 \times 4 & (-2) \times 1 + 2 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

由例 1-5 和例 1-6 可知, 矩阵的乘法不满足交换律, 即 AB 不一定等于 BA .

两个不为零的矩阵相乘可以得到零矩阵, 说明矩阵乘法中消去律不成立. 也就是说, 由 $AB=AC$ 并不能推导出 $B=C$.

但是, 矩阵的乘法满足以下运算规律.

- (1) 乘法结合律: $(AB)C = A(BC)$.
- (2) 乘法与加法的分配律: $A(B+C) = AB+AC$; $(B+C)A = BA+CA$.
- (3) 数乘的分配律: $k(AB) = (kA)B = A(kB)$ (k 是一个常数).

其中, 涉及的矩阵乘法和加法均假定是有意义的.

例 1-7 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, 求 A 与 B 的乘积 AB .

解 由于矩阵 A 的列数等于矩阵 B 的行数, 因此乘积 AB 是有意义的, 且 AB 是一个 3 行 2 列的矩阵. 设乘积 $AB = C = (c_{ij})$, 于是

$$\begin{aligned} c_{11} &= 1 \times 2 + 1 \times 1 = 3, c_{12} = 1 \times 0 + 1 \times (-1) = -1, \\ c_{21} &= (-1) \times 2 + 2 \times 1 = 0, c_{22} = (-1) \times 0 + 2 \times (-1) = -2, \\ c_{31} &= 3 \times 2 + 1 \times 1 = 7, c_{32} = 3 \times 0 + 1 \times (-1) = -1. \end{aligned}$$

这样, 得到

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -2 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}.$$

例 1-8 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 求 AB 与 BA .

解 由于矩阵 A 的列数等于矩阵 B 的行数, 所以 AB 有意义.

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 \times 4 + 3 \times 1 + 0 \times (-1) & -1 \times 0 + 3 \times 2 + 0 \times 1 & -1 \times (-2) + 3 \times 3 + 0 \times 1 \\ 2 \times 4 + (-1) \times 1 + 1 \times (-1) & 2 \times 0 + (-1) \times 2 + 1 \times 1 & 2 \times (-2) + (-1) \times 3 + 1 \times 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 6 & 11 \\ 6 & -1 & -6 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

由于矩阵 B 的列数不等于矩阵 A 的行数, 所以 BA 无意义.

例 1-9 已知 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, 求 AB 和 BA .

$$\text{解 } AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 4 + 1 \times 2 & 2 \times 0 + 1 \times 1 \\ 0 \times 4 + 3 \times 2 & 0 \times 0 + 3 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \times 2 + 0 \times 0 & 4 \times 1 + 0 \times 3 \\ 2 \times 2 + 1 \times 0 & 2 \times 1 + 1 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

注意

任何一个矩阵与单位矩阵 E 相乘都等于其本身;任何一个矩阵与零矩阵 O 相乘,结果都是零矩阵.

设 A 是任意一个 n 阶方阵,规定如下:

$$A^0 = E, A^1 = A, A^{r+1} = A^r A (r \geq 1),$$

即 A^r 表示 r 个 A 相乘.

由矩阵乘法的结合律,对于任意的正整数 r, s ,有以下性质:

$$A^r A^s = A^{r+s}, (A^r)^s = A^{rs}.$$

在给出矩阵乘法概念以后,可以将线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

表示为矩阵形式.

根据矩阵乘法,方程组中的第 i 个方程

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i (i=1, 2, \cdots, m)$$

可以表示为

$$(a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{in}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b_i.$$

因此,线性方程组可以写成矩阵形式:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

如果简记

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

则线性方程组可以简洁地表示为矩阵等式

$$\mathbf{A}\mathbf{X}=\boldsymbol{\beta}.$$

其中, 矩阵 $\mathbf{A}$ 称为线性方程组的**系数矩阵**; 将线性方程组的系数和常数项组成的矩阵

$$\tilde{\mathbf{A}}=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

称为线性方程组的**增广矩阵**, 记为 $\tilde{\mathbf{A}}$.

例 1-10 用矩阵表示线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

解 用矩阵 $\mathbf{A}=(a_{ij})_{m \times n}$ 表示线性方程组未知量的系数(称 $\mathbf{A}$ 为线性方程组的系数矩阵), 用 $\mathbf{X}=(x_{ij})_{n \times 1}$ 表示未知量, 用 $\mathbf{B}=(b_{ij})_{m \times 1}$ 表示常数项(称为常数向量), 即

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \mathbf{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \mathbf{B}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

由矩阵的乘法定义, 线性方程组可用矩阵表示为 $\mathbf{A}\mathbf{X}=\mathbf{B}$.

一般地, n 个变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 与 m 个变量 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 之间的线性关系

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\ \vdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{cases}$$

称为从变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 到变量 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 的一个**线性变换**. 其中, a_{ij} ($i=1, 2, \cdots, m; j=1, 2, \cdots, n$) 为常数, 称为线性变换的系数.

显然, 线性变换与矩形数表 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ 一一对应.

例如,线性变换

$$\begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2, \\ \vdots \\ y_n = x_n \end{cases}$$

称为恒等变换,它对应一个 n 阶单位矩阵

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

又如,线性变换

$$\begin{cases} x_1 = x, \\ y_1 = 0 \end{cases}$$

可以看作 xOy 平面上的向量 $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 变为向量 $\overrightarrow{OP'} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ 的变换(见图 1-1). 由于向量 $\overrightarrow{OP'}$

是向量 $\overrightarrow{OP}$ 在 x 轴上的投影,因此这是一个投影变换. 它对应一个二阶方阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

又如,矩阵 $\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$ 对应的线性变换

$$\begin{cases} x_1 = x \cos \varphi - y \sin \varphi, \\ y_1 = x \sin \varphi + y \cos \varphi \end{cases}$$

可以看作 xOy 平面上的向量 $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 逆时针旋转角度 φ 后,变为向量 $\overrightarrow{OP'} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ 的旋转变换(见

图 1-2).

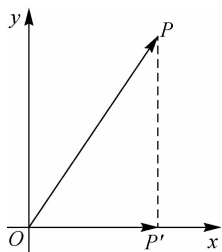


图 1-1

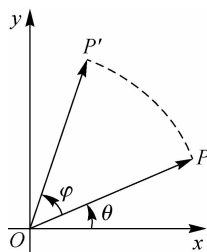


图 1-2

1.2.5 矩阵的转置与对称矩阵

1. 矩阵的转置

定义 7 将 $m \times n$ 矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 的行依次变成列, 则可得到一个 $n \times m$ 型矩阵 $B = (a_{ij})_{n \times m}$, 称矩阵 B 为矩阵 A 的转置, 记作 $B = A^T$.

例如, 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$, 则 $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

一般地, 矩阵的转置满足以下运算规律.

$$(1) (A^T)^T = A.$$

$$(2) (A \pm B)^T = A^T \pm B^T.$$

$$(3) (AB)^T = B^T A^T.$$

$$(4) (kA)^T = kA^T.$$

证明 规律(1)将一个矩阵的行、列互换两次, 就还原为最初的矩阵. 规律(2)和(4)显然成立. 下面证明规律(3). 设矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix},$$

则 AB 是一个 $m \times p$ 型矩阵, 其转置 $(AB)^T$ 是一个 $p \times m$ 型矩阵. 同时, A^T 是 $n \times m$ 型矩阵, B^T 是 $p \times n$ 型矩阵, 因此 $B^T A^T$ 是一个 $p \times m$ 型矩阵, 且是有意义的. 由于 $(AB)^T$ 和 $B^T A^T$ 是相同形状的矩阵, 所以只需证明它们对应位置的元素相等.

根据矩阵乘法的定义, 矩阵 AB 的第 j 行第 i 列元素为

$$(AB)_{ji} = \sum_{k=1}^n a_{jk} b_{ki}.$$

根据矩阵转置的定义, 矩阵 $(AB)^T$ 的第 i 行第 j 列元素为矩阵 AB 的第 j 行第 i 列元素, 即 $\sum_{k=1}^n a_{jk} b_{ki}$. 如果将 A 和 B 的转置分别记为

$$A^T = (a_{ij}^T)_{n \times m}, B^T = (b_{ij}^T)_{p \times n},$$

则有

$$a_{ij}^T = a_{ji}, i=1, 2, \cdots, n; j=1, 2, \cdots, m,$$

$$b_{ij}^T = b_{ji}, i=1, 2, \cdots, p; j=1, 2, \cdots, n.$$

于是,矩阵 $\mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$ 的第 i 行第 j 列元素为 $\mathbf{B}^T$ 的第 i 行与 $\mathbf{A}^T$ 的第 j 列对应元素的乘积之和,即

$$\sum_{k=1}^n b_{ik}^T a_{kj}^T = \sum_{k=1}^n b_{ki} a_{jk} = \sum_{k=1}^n a_{jk} b_{ki}.$$

从而得出 $(\mathbf{AB})^T$ 和 $\mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$ 对应位置的元素相等. 因此, $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$.

规律(3)可以推广到多个矩阵乘积的情形,即

$$(\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \cdots \mathbf{A}_s)^T = \mathbf{A}_s^T \cdots \mathbf{A}_2^T \mathbf{A}_1^T.$$

这个公式使用数学归纳法,并结合矩阵的结合律,容易得出.

2. 对称矩阵

定义 8 设

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

是一个 n 阶方阵. 如果 $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$, 即

$$a_{ij} = a_{ji}, i, j = 1, 2, \cdots, n,$$

则称 $\mathbf{A}$ 为对称矩阵; 如果 $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$, 即

$$a_{ij} = -a_{ji}, i, j = 1, 2, \cdots, n,$$

则称 $\mathbf{A}$ 为反对称矩阵.

注意

对称矩阵的元素以矩阵的主对角线为对称轴, 对应位置的元素相等; 反对称矩阵的元素以矩阵的主对角线为对称轴, 对应位置的元素互为相反数.

值得注意的是, 反对称矩阵的主对角线元素全为零.

例 1-11 证明: 任意一个 n 阶方阵都可以表示为一个对称矩阵与一个反对称矩阵的和.

证明 设 $\mathbf{A}$ 是一个 n 阶方阵. 显然, 可以将 $\mathbf{A}$ 表示为

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{A} + \mathbf{A}^T}{2} + \frac{\mathbf{A} - \mathbf{A}^T}{2}.$$

又因为

$$\left(\frac{\mathbf{A} + \mathbf{A}^T}{2} \right)^T = \frac{\mathbf{A}^T + \mathbf{A}}{2} = \frac{\mathbf{A} + \mathbf{A}^T}{2}, \quad \left(\frac{\mathbf{A} - \mathbf{A}^T}{2} \right)^T = \frac{\mathbf{A}^T - \mathbf{A}}{2} = -\frac{\mathbf{A} - \mathbf{A}^T}{2},$$

所以 $\frac{\mathbf{A} + \mathbf{A}^T}{2}$ 是一个对称矩阵, $\frac{\mathbf{A} - \mathbf{A}^T}{2}$ 是一个反对称矩阵, 且它们的和等于 $\mathbf{A}$. 所以结论成立.

例 1-12 设 A 与 B 均为对称矩阵, 则 AB 是对称矩阵的充要条件是 $AB=BA$.

证明 充分性: 设 $AB=BA$. 由于 $A^T=A, B^T=B$, 则有

$$(AB)^T = B^T A^T = BA = AB.$$

由对称矩阵的定义可知, AB 是对称矩阵.

必要性: 设 AB 为对称矩阵, 即 $(AB)^T = AB$. 又因为 $(AB)^T = B^T A^T = BA$, 所以, $AB=BA$.

例 1-13 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, 试求 $(AB)^T$ 和 $A^T B^T$.

解 $(AB)^T = B^T A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 14 & 6 \end{pmatrix},$

$$A^T B^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 11 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}.$$

此例说明, 一般情况下, $(AB)^T \neq A^T B^T$.

习题 1-2

1. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & 8 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 \\ -1 & 3 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 求 $A+B$.

2. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 求 $2A-3B$.

3. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, 求 AB .

4. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & -4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, 求 $A+B, 3(A-B)$.

5. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, 求 AB 和 BA .

6. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 7 & y \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} u & v \\ y & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ x & v \end{pmatrix}$, $A+2B-C=O$, 求 x, y, u, v .

7. 求矩阵 $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 7 & 0 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ 的乘积.

8. 已知不同商店三种文具的价格、不同人员需要文具的数量以及不同城镇不同人员的数量情况如表 1-2 至表 1-4 所示.

表 1-2 单位:元/件

种 类	价 格	
	商 店 A	商 店 B
笔记本	6	7
水性笔	4	3
文件袋	5	6

表 1-3

人 员	需 求 量		
	笔记本/个	水性笔/支	文件袋/个
人员 A	5	10	3
人员 B	4	5	5

表 1-4 单位:人

城 镇	人 员 数 量	
	人 员 A	人 员 B
城镇 1	1 000	500
城镇 2	2 000	1 000

- 设第一个矩阵为 A , 第二个矩阵为 B , 第三个矩阵为 C .
- (1) 求一个矩阵, 它能给出在每个商店每类人员购买文具的费用.
- (2) 求一个矩阵, 它能确定在每个城镇每种文具的购买量.

1.3 行列式

1.3.1 排列与逆序

定义 9 将由 n 个不同的自然数 $m_1, m_2, \dots, m_n$ 组成的一个有序数组称为一个 n 级排列.

由于这里主要关注这 n 个数的前后次序关系,不妨设这 n 个数为 $1, 2, \dots, n$. 于是,上述定义可以改写为以下定义.

定义 10 由自然数 $1, 2, \dots, n$ 组成的一个有序数组称为一个 n 级排列.

人们通常按照定义 10 给出 n 级排列. 当具体表示 n 级排列时,为简洁起见,在不发生混淆的情况下,只需将数字并排写在一起. 例如,23541 是一个 5 级排列.

根据中学排列组合的知识, n 级排列的总个数为

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!.$$

例 1-14 试写出所有的 3 级排列.

解 由前面的讨论可知,总共有 $3! = 6$ 个不同的 3 级排列,它们分别是

$$123, 132, 213, 231, 312, 321.$$

注意

在上述 3 级排列中,只有 123 中的数是按从小到大的递增顺序排列的. 而在其他排列中,较大的数可能排在较小的数前面. 例如,在排列 213 中,2 比 1 大,但 2 排在 1 的前面.

同样地,在 n 级排列中,也只有排列 $12 \cdots n$ 中的数是按从小到大的递增顺序排列的,而其他的排列都会或多或少地破坏这种顺序.

定义 11 在一个 n 级排列中,如果某两个数的前后位置与大小顺序相反,即前面的数大于后面的数,则称它们为一个**逆序**. 一个排列中逆序的总数称为这个排列的**逆序数**.

通常,用 $\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$ 表示 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 的逆序数,并且规定:

(1) 逆序数为奇数的排列称为**奇排列**;

(2) 逆序数为偶数的排列称为**偶排列**.

一般地,可以利用以下方法计算一个 n 级排列的逆序数: 设 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是一个 n 级排列. 若将排列中排在 $j_i (i=1, 2, \dots, n)$ 前面且比 j_i 大的数的个数记为 s_i , 则 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 的逆序数可以表示为

$$\tau(j_1 j_2 \cdots j_n) = s_1 + s_2 + \cdots + s_n.$$

例如, $\tau(23541) = 0 + 0 + 0 + 1 + 4 = 5$, $\tau(32541) = 0 + 1 + 0 + 1 + 4 = 6$, 因此, 23541 是一个 5 级奇排列, 而 32541 是一个 5 级偶排列. 更一般地, $\tau(12 \cdots n) = 0 + 0 + \cdots + 0 = 0$, 所以 $12 \cdots n$ 是一个 n 级偶排列.

一般地,在 $n!$ 个 n 级排列中,偶排列和奇排列各占一半. 为了说明这个事实,需要进一步研究排列的奇偶性.

定义 12 在一个 n 级排列中,如果将任意两个数 i 和 j 交换位置,而其余的数保持不变,则得到一个新的 n 级排列. 对排列施行这样的变化称为 n 级排列的一次**对换**,用符号 (i, j) 表示.

例如,通过对换 $(2, 3)$, 可以将排列 23541 变为 32541, 或将 52431 变为 53421.

容易验证,对一个排列连续施行两次相同的对换,排列会被还原为原来的状态. 由此可知,一个对

换可以将所有 n 级排列两两配对,使每两个配对的排列在这个对换下互相转换.

关于排列的奇偶性,可以不加证明地给出如下定理.

定理 1 任何一个对换都会改变排列的奇偶性.也就是说,经过一次对换,偶排列变为奇排列,奇排列变为偶排列.

推论 当 $n \geq 2$ 时, n 级排列的奇排列和偶排列个数相等,分别为 $\frac{n!}{2}$.

定理 2 设 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是任意一个 n 级排列,则 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 和 $12 \cdots n$ 可以通过一系列对换的互相转换.并且所作对换的次数 $n(j_1 j_2 \cdots j_n)$ 的奇偶性与 $\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$ 的奇偶性相同,即

$$(-1)^{n(j_1 j_2 \cdots j_n)} = (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)}.$$

1.3.2 行列式的概念

下面给出行列式的定义.

定义 13 将由 n^2 个数 a_{ij} ($i, j=1, 2, \cdots, n$) 组成的算式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (1-1)$$

称为 n 阶行列式. 行列式 D 定义为从不同行、不同列中取出的 n 个数的乘积

$$a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \quad (1-2)$$

的代数和,其中 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的一个 n 级排列.

代数和的符号规定:当 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是偶排列时,式(1-2)带正号;当 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是奇排列时,式(1-2)带负号.

行列式的定义公式为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}. \quad (1-3)$$

其中, $\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对所有 n 级排列的求和.

式(1-3)右边的求和项称为行列式 D 的展开式.

注意

在式(1-1)中, a_{ij} ($i, j=1, 2, \cdots, n$) 称为行列式 D 的元素. 其中,元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为行标,表示该元素处于第 i 行;第二个下标 j 称为列标,表示该元素处于第 j 列. 有时,式(1-1)所表示的行列式可以简记为 $D = |a_{ij}|_{n \times n}$.



微课: 行列式的概念

定义 14 在式(1-1)中,元素 $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ 所在的那条对角线称为行列式的**主对角线**,元素 $a_{1n}, a_{2,n-1}, \dots, a_{n1}$ 所在的那条对角线称为行列式的**副对角线**.

特殊类型行列式如下.

1. 对角行列式

如果行列式中除了主对角线上的元素,其余元素全为 0,则称为**对角行列式**.

$$\Lambda_n = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

2. 上三角行列式

如果行列式中主对角线以下的元素全为 0(当 $i > j$ 时, $a_{ij} = 0$),则称为**上三角行列式**.

$$U_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

3. 下三角行列式

如果行列式中主对角线以上的元素全为 0(当 $i < j$ 时, $a_{ij} = 0$),则称为**下三角行列式**.

$$L_n = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

说明:上述行列式中未写出的元素均为 0.

1.3.3 二阶和三阶行列式

1. 二阶行列式

对于二元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \quad (1-4)$$

通过消元法得到

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2, \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}. \end{cases}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时, 方程组(1-4)有唯一解, 即

$$\begin{cases} x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \\ x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \end{cases}$$

为了更简洁地表示上述方程组的解, 引入二阶行列式的概念.

定义 15 由 2×2 个数组成两行两列的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

称为二阶行列式, 记为 D . 称 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 为二阶行列式的值, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

其中, 横排称为行, 竖排称为列. 数 a_{ij} ($i, j=1, 2$) 称为行列式的元素, 其中第一个下标 i 称为行标, 表示该元素位于第 i 行; 第二个下标 j 称为列标, 表示该元素位于第 j 列.

注意

(1) 二阶行列式表示一个数, 其值为 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

(2) 可通过对角线法则来记忆二阶行列式的值: 用主对角线(从左上到右下)的元素乘积减去次对角线(从右上到左下)的元素乘积(见图 1-3).

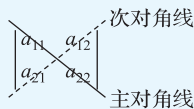


图 1-3

例如, $\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5 \times 1 - (-2) \times 3 = 11.$

方程组(1-4)的解利用二阶行列式的定义可表示为 $\begin{cases} x_1 = \frac{D_1}{D}, \\ x_2 = \frac{D_2}{D}, \end{cases}$ 其中

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1 a_{22} - a_{12} b_2,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11} b_2 - b_1 a_{21}.$$

例 1-15 用行列式解线性方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 = 3, \\ x_1 + 3x_2 = -1. \end{cases}$

解 因为

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \times 3 - (-1) \times 1 = 4 \neq 0,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \times 3 - (-1) \times (-1) = 8,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \times (-1) - 3 \times 1 = -4,$$

所以方程组的解为

$$\begin{cases} x_1 = \frac{D_1}{D} = 2, \\ x_2 = \frac{D_2}{D} = -1. \end{cases}$$

例 1-16 求下列二阶行列式的值.

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}; \quad (2) \begin{vmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix}; \quad (3) \begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

解 (1) $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 1 \times (-2) - 3 \times 4 = -14.$

(2) $\begin{vmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix} = \sin^2 x - (-\cos^2 x) = 1.$

(3) $\begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4x - x^2.$

2. 三阶行列式

同样地,为更简洁地表示三元一次线性方程组的解,引入三阶行列式的定义.

定义 16 由 3×3 个数排成三行三列的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

称为三阶行列式, 记为 D . 它表示的数为

$$D = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32},$$

即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

三阶行列式的值也可以用对角线法则记忆(见图 1-4). 图中实线连接的三个元素乘积项取正号, 图中虚线连接的三个元素乘积项取负号, 最后, 将这些乘积项求代数和.

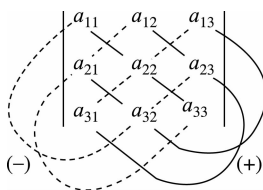


图 1-4

例如, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \times 5 \times 9 + 2 \times 6 \times 7 + 3 \times 4 \times 8 - 3 \times 5 \times 7 - 2 \times 4 \times 9 - 1 \times 6 \times 8 = 0.$

例 1-17 解三元线性方程组
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4. \end{cases}$$

解 因为

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 28 \neq 0, D_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -5 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 13,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 47, D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 21,$$

所以方程组的解为
$$\begin{cases} x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{13}{28}, \\ x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{47}{28}, \\ x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{3}{4}. \end{cases}$$

例 1-18 求下列三阶行列式的值.

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}; \quad (2) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \end{vmatrix}.$$

解 (1)
$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 1 \times 1 \times 3 + 3 \times 2 \times 2 + (-1) \times 4 \times 0 -$$

$$2 \times 1 \times (-1) - 0 \times 3 \times 3 - 1 \times 2 \times 4 = 9.$$

$$(2) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times 4 \times 2 + 2 \times 1 \times 3 + 3 \times 6 \times 2 - 3 \times 4 \times 3 - 2 \times 2 \times 2 - 1 \times 1 \times 6 = 0.$$

1.3.4 行列式按行(列)展开

二阶和三阶行列式有相应的对角线法则,但对于 $n(n>3)$ 阶行列式,则没有直接的对角线法则. 在给出一般的 n 阶行列式计算法则之前,先引入两个概念.

定义 17 在 n 阶行列式 D 中,划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列,剩下的元素按原来的次序构成的 $(n-1)$ 阶子式,称为元素 a_{ij} 的**余子式**,记为 M_{ij} ;元素 a_{ij} 的余子式 M_{ij} 乘以 $(-1)^{i+j}$ 称为元素 a_{ij} 的**代数余子式**,记为 A_{ij} ,即 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

例如,四阶行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix}$ 中元素 $a_{23}=7$ 的余子式和代数余子式分别为

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 9 & 10 & 12 \\ 13 & 14 & 16 \end{vmatrix}, A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 9 & 10 & 12 \\ 13 & 14 & 16 \end{vmatrix}.$$

定理 3(行列式按行(列)展开定理) 一个 n 阶行列式等于它的任一行(或任一列)的各元素与其对

应的代数余子式的乘积之和,即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in} \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

或

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj} \quad (j=1,2,\cdots,n).$$

例 1-19 计算四阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 5 & 6 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

解 行列式按第一行展开

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 5 & 6 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 6 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 0 \times (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$0 \times (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 1 \end{vmatrix} + 2 \times (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 2 \end{vmatrix} = -178.$$

例 1-20

计算四阶行列式 $D = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$

解 行列式按第一行展开

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 4 \times (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \times (-6) - 4 \times (-17) = 56.$$

注意

如果行列式中某一行(列)元素含有较多的零,则按照该行(列)展开计算行列式的值会更加简便.

例 1-21 计算 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 按行列式的第一行展开

$$D = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

由于第一行的其他元素为 0, 其对应的余子式不参与计算.

对得到的 $(n-1)$ 阶行列式按第一行再次展开

$$\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{43} & a_{44} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

继续重复上述步骤, 最终得到

$$D = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \cdots \cdot a_{nn}.$$

1.3.5 行列式的性质

行列式是一个算式, 其计算是行列式研究中的重要问题, 但也是一个相对复杂的任务. 因为 n 阶行列式的展开式包含 $n!$ 项, 每项是 n 个数的乘积的代数和. 当 n 较大时, $n!$ 是一个非常大的数, 因此需借助行列式的性质对其进行必要的简化, 从而提高计算效率.

定义 18 设

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

是一个 n 阶行列式. 如果将行列式 D 的行列互换 (行变为列、列变为行), 就得到一个新的行列式

$$D^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

这个行列式 D^T 称为 D 的转置行列式.

性质 1 行列式与其转置行列式相等, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

也可以写为

$$|a_{ij}|_{n \times n} = |a_{ji}|_{n \times n}. \quad (1-5)$$

证明 在式(1-5)右端的行列式中, 元素 a_{ij} 位于转置行列式的第 j 行第 i 列. 为简化表示, 定义 $b_{ji} = a_{ij}$, 则转置行列式可记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}. \quad (1-6)$$

按式(1-3)展开式(1-6)右端的行列式:

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} b_{1i_1} b_{2i_2} \cdots b_{ni_n}.$$

代入 $b_{ji} = a_{ij}$, 得

$$\sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}.$$

根据行列式定义, 行标 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 和列标 $j_1, j_2, \cdots, j_n$ 的排列可以互换, 因此展开式可等价写为

$$\sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}.$$

而这正是原行列式 D 的展开式. 因此, 结论成立.

例如,

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5, D^T = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5.$$

由此可知,对于行列式的行所具有的性质,它的列也具有相应的性质,反之亦然.

性质 2 交换行列式的任意两行(列),行列式的值只改变符号.

证明 设原行列式为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} & i \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} & j \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

其中第 i 行和第 j 行用 i, j 标明位置,且 $i < j$. 将行列式的第 i 行与第 j 行交换,其他行保持不变,得到新的行列式:

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} & i \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} & j \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

根据行列式的定义, D 中的每一项可以写为

$$a_{1k_1} \cdots a_{ik_i} \cdots a_{jk_j} \cdots a_{nk_n}, \quad (1-7)$$

其中,行标按从小到大的自然顺序排列,列标 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的一个 n 级排列. 这项也是 D_1 中的一项,因为 D_1 的所有元素依然满足“取自不同行不同列”的条件,但第 i 行和第 j 行的位置发生了交换. 因此, D_1 的对应项为

$$a_{1k_1} \cdots a_{jk_j} \cdots a_{ik_i} \cdots a_{nk_n}, \quad (1-8)$$

其中,除了第 i 行和第 j 行的元素互换,其他元素保持不变.

在 D 中,式(1-7)的符号为

$$(-1)^{\tau(k_1 k_2 \cdots k_i \cdots k_j \cdots k_n)}.$$

在 D_1 中,式(1-8)的符号为

$$(-1)^{\tau(k_1 k_2 \cdots k_j \cdots k_i \cdots k_n)},$$

因为 $k_1 k_2 \cdots k_j \cdots k_i \cdots k_n$ 是由 $k_1 k_2 \cdots k_i \cdots k_j \cdots k_n$ 通过一次 (k_i, k_j) 对换得到的.

根据定理 1,经过一次对换,排列的符号改变,即

$$(-1)^{\tau(k_1 k_2 \cdots k_j \cdots k_i \cdots k_n)} = -(-1)^{\tau(k_1 k_2 \cdots k_i \cdots k_j \cdots k_n)}.$$

根据行列式的展开式(1-3),对于 D_1 ,有

$$\begin{aligned} D_1 &= \sum_{k_1 k_2 \cdots k_n} (-1)^{\tau(k_1 \cdots k_j \cdots k_i \cdots k_n)} a_{1k_1} \cdots a_{jk_j} \cdots a_{ik_i} \cdots a_{nk_n} \\ &= - \sum_{k_1 k_2 \cdots k_n} (-1)^{\tau(k_1 \cdots k_i \cdots k_j \cdots k_n)} a_{1k_1} \cdots a_{ik_i} \cdots a_{jk_j} \cdots a_{nk_n} \\ &= -D. \end{aligned}$$

推论 如果行列式中某两行(列)的对应元素都相等,那么行列式的值为零.

性质 3 用常数 k 乘行列式某一行(列)的各元素,等于用数 k 乘此行列式.

例如,
$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

推论 1 如果行列式某一行(列)的各元素有公因子,公因子可以提到行列式的外面.

例如,
$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ ta_{31} & ta_{32} & ta_{33} \end{vmatrix} = k\lambda t \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

推论 2 如果行列式某一行(列)的元素全为零,那么行列式的值为零.

推论 3 如果行列式两行(列)的对应元素成比例,那么行列式的值为零.

性质 4 如果行列式某一行(列)的元素都是两项之和,那么这个行列式可拆分为两个相应行列式的和.

例如,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_1 & a_{22}+b_2 & a_{23}+b_3 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

性质 5 将行列式某一行(列)的各元素乘以常数 k 后加到另一行(列)的对应元素上去,行列式的值不变.

例如,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} + ka_{31} & a_{12} + ka_{32} & a_{13} + ka_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

性质 5 可由性质 4 及性质 3 的推论 3 证明.

性质 6 行列式某一行(列)的各元素与另一行(列)对应元素的代数余子式乘积的和为零. 具体表达为

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + a_{i3}A_{j3} = 0, \text{ 其中 } i \neq j (i, j = 1, 2, 3).$$

例 1-22 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$.

解 首先利用性质 5, 将第一行的 -1 倍、 -2 倍、 -1 倍分别加到第 2 行、第 3 行、第 4 行上, 得到

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

再利用性质 2, 将第 2 行和第 4 行交换, 得到

$$D = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & -3 & -5 & -1 \end{vmatrix}.$$

对于这个新的行列式, 再利用性质 5, 将第 2 行的 3 倍加到第 4 行上, 然后利用性质 3 的推论 1, 将第 4 行的公因子 (-1) 提到行列式的外面, 得到

$$D = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

然后, 再利用性质 2 将第 3 行和第 4 行交换, 并利用性质 5 将新行列式的第 3 行的 -2 倍加到第 4 行上, 得到

$$D = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = -10.$$

例 1-23 计算 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} x_1 - m & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 - m & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n - m \end{vmatrix}.$$

分析 通过观察发现,该行列式中每一行的所有元素的和相等,都是 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n - m$. 因此,可以利用以下步骤进行化简:先根据性质 5,将第 2 列至第 n 列分别加到第一列;再利用性质 3 的推论 1,将第一列的公因子提到行列式的外面.

解 根据上述分析,将第 2 列至第 n 列分别加到第一列,并提取第一列的公因子,行列式化为

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} x_1 + x_2 + \cdots + x_n - m & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n - m & x_2 - m & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n - m & x_2 & \cdots & x_n - m \end{vmatrix} \\ &= (x_1 + x_2 + \cdots + x_n - m) \begin{vmatrix} 1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 1 & x_2 - m & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_2 & \cdots & x_n - m \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

根据性质 5,将第一列的 $-x_i$ 倍分别加到后面的第 i 列 ($i=2,3,\cdots,n$),行列式化为

$$D = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n - m) \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & -m \end{vmatrix}.$$

展开行列式可得

$$D = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n - m)(-m)^{n-1}.$$

1.3.6 行列式的计算

为了方便地表述行列式的变形过程,常用如下记号.

(1) r_i 表示行列式的第 i 行.

(2) c_j 表示行列式的第 j 列.

(3) $r_i \leftrightarrow r_j$ (或 $c_i \leftrightarrow c_j$) 表示将行列式第 i 行(列)与第 j 行(列)的对应元素互换.

(4) kr_i (或 kc_i) 表示将行列式第 i 行(列)的元素同乘以数 k .

(5) $r_i + kr_j$ (或 $c_i + kc_j$) 表示将行列式第 j 行(列)的元素同乘以数 k 后加到第 i 行(列)的对应元素上.

1. 化三角形法

化三角形法是行列式计算的基本方法之一,即先利用行列式的性质,将原行列式逐步化为三角形行列式,然后再计算主对角线上元素的乘积,从而得出行列式的值.

例 1-24

计算 n 阶上三角形矩阵的行列式 $D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

解 将行列式按第一列展开,得到

$$D_n = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

继续对剩下的行列式按第一列展开,得到

$$D_n = a_{11} a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ 0 & a_{44} & \cdots & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

重复这一过程,直到行列式变为 1×1 的形式为止,最终得到

$$D_n = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

同理, n 阶下三角形矩阵的行列式也等于主对角线上元素的乘积:

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

特别地, 对角矩阵的行列式为

$$\Lambda = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

单位矩阵的行列式为

$$|\mathbf{E}| = 1.$$

根据行列式的性质, 通过线性变换和其他操作, 总可以将给定的行列式化成上(或下)三角形行列式的形式, 从而简便地计算其值.

例 1-25

计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$.

解

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{r_2 - r_1 \\ r_4 + 5r_1}} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 16 & 2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{r_3 + 4r_2 \\ r_4 - 8r_2 + \frac{5}{4}r_3}} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{vmatrix} = 40.$$

例 1-26

计算四阶行列式 $D=$

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

解

$$\begin{aligned} D &\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4 + (-2)r_1]{r_3 + r_1} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -4 \end{vmatrix} \\ &\xrightarrow[r_4 + 3r_2]{r_3 + r_2} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_4 + (-1)r_3} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} \\ &= -1 \times (-1) \times (-2) \times (-2) = 4. \end{aligned}$$

例 1-27

计算四阶行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 0 & -7 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

解

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 0 & -7 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_3} \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ -1 & 7 & -3 & 4 \\ 2 & -9 & 5 & 7 \\ 1 & -7 & 0 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4 + (-1)r_1]{r_2 + r_1, r_3 + (-2)r_1} \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{vmatrix} \\ &\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3 + (-2)r_2]{r_4 + 2r_2} \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} \\ &= -18. \end{aligned}$$

2. 降阶法

计算行列式的另外一种基本方法是选择零元素较多的行(列),按这一行(列)展开,将原行列式化为几个低一阶的行列式进行计算.如果原行列式没有多个元素为零的行或列,可先利用行列式的性质将其某一行(列)化为只有一个或两个非零元素,其他均为零元素,然后按这一行(列)展开.按这种方法

逐步降阶,直到计算出结果.这种方法一般称为降阶法.

例 1-28 计算四阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

解 选择含零元素最多的第一列展开,得

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \times (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \\ = 13 - 20 = -7.$$

例 1-29 计算四阶行列式 $D =$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}.$$

解

$$D \xrightarrow[c_4+c_3]{c_1-2c_3} \begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 & 1 \\ -11 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -5 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 1 \times (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -11 & 1 & -1 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix} \\ \xrightarrow[r_2+r_1]{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -6 & 2 & 0 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix} = 1 \times (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -6 & 2 \\ -5 & -5 \end{vmatrix} \xrightarrow[c_1-c_2]{c_1-c_2} \begin{vmatrix} -8 & 2 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = 40.$$

例 1-30 证明范德蒙德行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j) \quad (n \geq 2).$$

其中,连乘积

$$\prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \cdots (x_n - x_1)(x_3 - x_2) \cdots (x_n - x_2) \cdots (x_n - x_{n-1})$$

是满足条件 $1 \leq j < i \leq n$ 的所有因子 $(x_i - x_j)$ 的乘积.

证明 用数学归纳法证明. 当 $n=2$ 时,

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1 = \prod_{1 \leq j < i \leq 2} (x_i - x_j).$$

因此, 对于 $n=2$, 命题成立.

假设命题对 $n-1$ 阶范德蒙德行列式成立, 即

$$D_{n-1} = \prod_{1 \leq j < i \leq n-1} (x_i - x_j).$$

下面证明命题对 n 阶范德蒙德行列式也成立.

在 D_n 中, 依次将第 i 行乘 $-x_1$ 加到第 $i+1$ 行 ($i=n-1, n-2, \dots, 1$), 得到

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) & \cdots & x_n(x_n - x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & x_3^{n-2}(x_3 - x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}.$$

按第一列展开, 并提出每列的公因子 $(x_i - x_1)$, 得

$$D_n = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \cdots (x_n - x_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

右端行列式是 $n-1$ 阶范德蒙德行列式.

根据归纳假设

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix} = \prod_{2 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j).$$

因此

$$\begin{aligned} D_n &= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \cdots (x_n - x_1) \prod_{2 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j) \\ &= \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j). \end{aligned}$$

1.3.7 方阵的行列式及运算律

定义 19 设

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

将由矩阵 $\mathbf{A}$ 的元素按照矩阵的位置关系所构成的行列式,称为方阵 $\mathbf{A}$ 的行列式,记为 $|\mathbf{A}|$ 或 $\det \mathbf{A}$.

方阵的行列式满足以下运算规律.

$$(1) |\mathbf{A}^T| = |\mathbf{A}|.$$

$$(2) |k\mathbf{A}| = k^n |\mathbf{A}|.$$

$$(3) |\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| = |\mathbf{B}| |\mathbf{A}| = |\mathbf{BA}|.$$

其中, $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 均为 n 阶方阵; k 是一个常数.

注意

虽然 n 阶方阵和 n 阶行列式均为 n^2 个数的一种表达,但我们必须注意它们的区别.这是两个不同的概念: n 阶行列式是 n^2 个数按照一定的运算法则所确定的一个数, n 阶方阵是将这 n^2 个数按照一定的方式排成的一个矩形数阵.

例 1-31

设矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 求 $|3\mathbf{A}|$.

解 因为

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2,$$

所以 $|3\mathbf{A}| = 3^3 |\mathbf{A}| = 54$.

习题 1-3

1. 计算下列二阶行列式.

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}; \quad (2) \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix}; \quad (3) \begin{vmatrix} 1 & \log_a b \\ \log_b a & 1 \end{vmatrix}.$$

2. 计算下列三阶行列式.

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}; \quad (2) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}; \quad (3) \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & -4 & 0 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}.$$

3. 用行列式的定义计算下列行列式.

$$(1) \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}; \quad (2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}.$$

4. 用行列式的性质计算下列行列式.

$$(1) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 3 & 2 \\ 7 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}; \quad (2) \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$5. \text{ 计算 } n \text{ 阶行列式 } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix}.$$

$$6. \text{ 计算行列式 } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

7. 乘火车的乘客排队等候检票,且排队的乘客按一定速度在增加.设每张票的检票时间相同,若车站开放一个检票窗口,30 min 可检票完毕;若同时开放两个检票窗口,则只需要 10 min 即可检票完毕.现有一加班车,若必须在 4 min 内让全部乘客检票进站,则车站至少要同时开放多少个检票窗口?

1.4 逆矩阵

1.4.1 逆矩阵的概念

定义 20 对于 n 阶方阵 A ,如果存在一个 n 阶方阵 B ,使得

$$AB=BA=E, \quad (1-9)$$

那么称 A 为可逆矩阵(或矩阵 A 可逆),称 B 为 A 的逆矩阵,简称逆阵.

由定义 20 可知:

- (1) 可逆矩阵是对方阵而言的,若 A 不是方阵,则一定不可逆;
- (2) 如果 A 是可逆矩阵,那么 B 也是可逆矩阵.并且 A 与 B 互为逆阵;
- (3) 如果 A 是可逆矩阵,那么它的逆阵是唯一的.

证明(3):假设 A 有两个逆阵 B_1 和 B_2 ,根据定义 20,有

$$AB_1=B_1A=E, AB_2=B_2A=E.$$

于是

$$B_1=B_1E=B_1(AB_2)=(B_1A)B_2=EB_2=B_2.$$

因此, A 的逆矩阵是唯一的.

规定 A 的逆矩阵记作 A^{-1} ,则有

$$AA^{-1}=A^{-1}A=E.$$

例 1-32 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$,证明 A 为可逆矩阵.

证明 因为

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

所以 A 为可逆矩阵, 且 $A^{-1} = B$.

例 1-33 若方阵 A 满足等式 $A^2 - A + E = O$, 问 A 是否可逆, 若可逆, 求出其逆阵.

解 由 $A^2 - A + E = O$ 可得

$$A - A^2 = E.$$

利用矩阵乘法的运算法则, 可得

$$A - A^2 = A(E - A) = (E - A)A = E.$$

由定义 20 可知, A 可逆, 且 $A^{-1} = E - A$.

1.4.2 逆矩阵的性质

性质 7 设矩阵 A 可逆, 则 A 的逆矩阵 A^{-1} 也可逆, 且 $(A^{-1})^{-1} = A$.

证明 由逆矩阵的定义

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E,$$

可得 A^{-1} 的逆矩阵 $(A^{-1})^{-1}$ 存在, 且

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

性质 8 设 A, B 为同阶可逆矩阵, 则 AB 也可逆, 且 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

证明 由矩阵乘法的结合律, 可得

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E,$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(AA^{-1})B = B^{-1}EB = B^{-1}B = E.$$

由定义 20 可知, AB 可逆, 且

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

性质 8 可推广到多个可逆矩阵相乘的情况, 即如果 $A_1, A_2, \dots, A_k$ 为同阶可逆矩阵, 那么 $A_1A_2 \cdots A_k$ 也可逆, 且

$$(A_1A_2 \cdots A_k)^{-1} = A_k^{-1} \cdots A_2^{-1}A_1^{-1}.$$

性质 9 设矩阵 A 可逆, 数 $k \neq 0$, 则 kA 可逆, 且

$$(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}.$$

证明 因为 $\mathbf{A}$ 可逆, 所以存在 $\mathbf{A}^{-1}$, 使得 $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{E}$. 于是

$$(k\mathbf{A})\frac{1}{k}\mathbf{A}^{-1}=k\cdot\frac{1}{k}(\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1})=\mathbf{E}.$$

因此, $k\mathbf{A}$ 可逆, 且 $(k\mathbf{A})^{-1}=\frac{1}{k}\mathbf{A}^{-1}$.

性质 10 若 $\mathbf{A}$ 可逆, 则 $\mathbf{A}^T$ 可逆, 且 $(\mathbf{A}^T)^{-1}=(\mathbf{A}^{-1})^T$.

证明 因为 $\mathbf{A}$ 可逆, 所以存在 $\mathbf{A}^{-1}$ 使得 $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{E}$. 根据矩阵转置的运算规律, 有

$$\mathbf{A}^T(\mathbf{A}^{-1})^T=(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})^T=\mathbf{E}^T=\mathbf{E}.$$

因此, $\mathbf{A}^T$ 可逆, 且 $(\mathbf{A}^T)^{-1}=(\mathbf{A}^{-1})^T$.

性质 11 若矩阵 $\mathbf{A}$ 可逆, 则 $|\mathbf{A}^{-1}|=\frac{1}{|\mathbf{A}|}$.

证明 因为 $\mathbf{A}$ 可逆, 所以 $|\mathbf{A}|\neq 0$, 且 $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{E}$. 于是

$$|\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}|=|\mathbf{A}||\mathbf{A}^{-1}|=|\mathbf{E}|=1.$$

因此,

$$|\mathbf{A}^{-1}|=\frac{1}{|\mathbf{A}|}.$$

当方阵 $\mathbf{A}$ 可逆时, 可以将矩阵的幂的概念推广到整数范围, 定义:

$$\mathbf{A}^0=\mathbf{E},$$

$$\mathbf{A}^{-k}=(\mathbf{A}^{-1})^k, \text{ 其中 } k \text{ 为正整数.}$$

当 $\mathbf{A}$ 可逆时, 矩阵的幂满足以下运算规律:

$$\mathbf{A}^l\mathbf{A}^s=\mathbf{A}^{l+s}, (\mathbf{A}^l)^s=\mathbf{A}^{ls},$$

其中 l, s 为整数.

例 1-34

设对角矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$, $a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0$, 求 $\mathbf{A}^{-1}$.

解 取矩阵

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_n} \end{pmatrix},$$

则

$$\begin{aligned}\Lambda B &= \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_n} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = E.\end{aligned}$$

因此, $\Lambda^{-1} = B$.

1.4.3 逆矩阵的求法

定义 21 对于 n 阶方阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

设 A_{ij} 是行列式 $|A|$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式, 记

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

则称 A^* 为矩阵 A 的转置伴随矩阵.

显然,

$$\begin{aligned}AA^* &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{pmatrix} = |A|E.\end{aligned}$$

同理可得

$$\mathbf{A}^* \mathbf{A} = |\mathbf{A}| \mathbf{E}.$$

综上,任意方阵 $\mathbf{A}$ 与其转置伴随矩阵 $\mathbf{A}^*$ 满足以下关系:

$$\mathbf{A} \mathbf{A}^* = \mathbf{A}^* \mathbf{A} = |\mathbf{A}| \mathbf{E}.$$

由此,我们可以得到矩阵 $\mathbf{A}$ 可逆的充要条件以及 $\mathbf{A}^{-1}$ 的一种求解方法.

定理 4 n 阶方阵 $\mathbf{A}$ 可逆的充要条件是 $|\mathbf{A}| \neq 0$, 且

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \mathbf{A}^*.$$

证明 必要性: 设 $\mathbf{A}$ 可逆, 则 $\mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$, 对两边取行列式, 得

$$|\mathbf{A} \mathbf{A}^{-1}| = |\mathbf{E}|.$$

由行列式的性质, 得

$$|\mathbf{A}| |\mathbf{A}^{-1}| = 1.$$

因此, 若 $\mathbf{A}$ 为可逆矩阵, 则 $|\mathbf{A}| \neq 0$.

充分性: 设 $|\mathbf{A}| \neq 0$, 由 $\mathbf{A} \mathbf{A}^* = \mathbf{A}^* \mathbf{A} = |\mathbf{A}| \mathbf{E}$, 得

$$\mathbf{A} \cdot \frac{1}{|\mathbf{A}|} \mathbf{A}^* = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}.$$

这表明 $\mathbf{A}$ 可逆, 且 $\mathbf{A}$ 的逆矩阵为

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \mathbf{A}^*.$$

定理 4 既说明了方阵可逆的条件, 又具体给出了利用转置伴随矩阵求逆矩阵的公式.

对于 n 阶方阵 $\mathbf{A}$, 当 $|\mathbf{A}| = 0$ 时, 称 $\mathbf{A}$ 为奇异矩阵; 否则, 称 $\mathbf{A}$ 为非奇异矩阵.

由定理 4 可知: $\mathbf{A}$ 是可逆矩阵的充要条件是 $\mathbf{A}$ 为非奇异矩阵.

例 1-35 判断矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ 是否可逆, 若可逆, 求其逆矩阵.

解 因为 $|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, 所以 $\mathbf{A}$ 可逆.

由 $A_{11}=4, A_{21}=-2, A_{12}=-3, A_{22}=1$ 得到

$$\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix},$$

则

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \mathbf{A}^* = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

例 1-36 求矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

解 因为

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$

所以 $\mathbf{A}$ 可逆.

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -5, A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = 2, A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1, \\ A_{12} &= -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} = 10, A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} = -2, A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2, \\ A_{13} &= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 7, A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -2, A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1. \end{aligned}$$

于是得

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \mathbf{A}^* = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -5 & 2 & -1 \\ 10 & -2 & 2 \\ 7 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 5 & -1 & 1 \\ \frac{7}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

对于阶数较高的矩阵,利用转置伴随矩阵求其逆矩阵的方法较为烦琐.例如在本例中,计算一个三阶矩阵的逆矩阵需要求解一个三阶行列式和 9 个二阶行列式.

例 1-37 证明:若 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 是同阶方阵,且满足 $\mathbf{AB}=\mathbf{E}$ 或 $\mathbf{BA}=\mathbf{E}$,则 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 都可逆,且

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}, \mathbf{B}^{-1} = \mathbf{A}.$$

证明 由 $\mathbf{AB}=\mathbf{E}$ 可得

$$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| = |\mathbf{E}| = 1.$$

因此, $|\mathbf{A}| \neq 0$ 且 $|\mathbf{B}| \neq 0$.

根据定理 4, $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 都是可逆矩阵.

在等式 $\mathbf{AB}=\mathbf{E}$ 的两边同时左乘 $\mathbf{A}^{-1}$,得

$$\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{AB}) = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{E},$$

即 $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$.

在等式 $\mathbf{AB} = \mathbf{E}$ 的两边同时右乘 $\mathbf{B}^{-1}$, 得

$$(\mathbf{AB})\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{EB}^{-1},$$

即 $\mathbf{A} = \mathbf{B}^{-1}$.

若 $\mathbf{BA} = \mathbf{E}$, 类似地, 可以证明 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 都可逆, 且满足 $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}, \mathbf{B}^{-1} = \mathbf{A}$.

这一结论表明, 验证 $\mathbf{B}$ 是 $\mathbf{A}$ 的逆矩阵, 只需验证一个等式 $\mathbf{AB} = \mathbf{E}$ 或 $\mathbf{BA} = \mathbf{E}$ 即可, 而无须按照定义 20 验证两个等式.

1.4.4 矩阵多项式及用逆矩阵解线性方程组

1. 矩阵多项式

设 $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m$ 为 x 的 m 次多项式, $\mathbf{A}$ 为 n 阶矩阵, 记

$$f(\mathbf{A}) = a_0\mathbf{E} + a_1\mathbf{A} + \cdots + a_m\mathbf{A}^m,$$

则 $f(\mathbf{A})$ 仍为一个 n 阶矩阵, 称为矩阵 $\mathbf{A}$ 的 m 次多项式.

矩阵 $\mathbf{A}$ 的任意两个多项式 $f(\mathbf{A})$ 和 $g(\mathbf{A})$ 总是可交换的, 即

$$f(\mathbf{A})g(\mathbf{A}) = g(\mathbf{A})f(\mathbf{A}).$$

因此, 矩阵 $\mathbf{A}$ 的多项式可以像 x 的多项式一样相乘或因式分解.

2. 用逆矩阵解线性方程组

对于矩阵方程

$$\mathbf{AX} = \mathbf{b},$$

如果矩阵 $\mathbf{A}$ 可逆, 那么可以两边同时左乘 $\mathbf{A}^{-1}$:

$$\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{AX}) = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}.$$

利用矩阵乘法的结合律及 $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}$, 得

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}.$$

例 1-38

用逆矩阵解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 = 2, \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$$

解 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix},$

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ -20 \\ 26 \end{pmatrix},$$

$$\text{所以} \begin{cases} x_1 = -18, \\ x_2 = -20, \\ x_3 = 26. \end{cases}$$

习题 1-4

1. 判断下列矩阵是否可逆, 若可逆, 求其逆矩阵.

$$(1) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix};$$

$$(2) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix};$$

$$(3) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix};$$

$$(4) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. 利用逆矩阵解下列线性方程组.

$$(1) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 2, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 3; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = -3, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 8. \end{cases}$$

$$3. \text{判断矩阵 } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \text{ 是否可逆, 若可逆, 求 } \mathbf{A}^{-1}.$$

$$4. \text{已知 } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -12 \\ 12 \\ 18 \end{pmatrix}, \mathbf{AX} = \mathbf{B}, \text{求矩阵 } \mathbf{X}.$$

1.5 分块矩阵

1.5.1 分块矩阵的概念

为了计算简便或理论研究的需要,有时需要将一个行数和列数较多的大型矩阵划分为若干块小矩阵,从而将大矩阵的运算问题转化为小矩阵的运算问题.这种做法称为**矩阵分块**.

矩阵分块是一种简化技巧,也是处理高阶矩阵的重要方法.

定义 22 用若干条纵线和横线将矩阵 $\mathbf{A}$ 分割成若干小矩阵,每个小矩阵称为 $\mathbf{A}$ 的一个子块或子阵,以这些子块为元素的矩阵形式称为**分块矩阵**.

例如,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_3 & \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{O} & 4\mathbf{E}_2 \end{pmatrix},$$

其中 $\mathbf{E}_3$ 和 $\mathbf{E}_2$ 分别表示三阶和二阶单位矩阵,而

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

上述矩阵也可以采用另外的分块方法.例如,令

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix},$$

则有

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{e}_3 \quad \boldsymbol{\alpha}_1 \quad \boldsymbol{\alpha}_2].$$

矩阵的分块方式可以是任意的,但需要根据原矩阵的结构特点和运算内容选择适当的分块方法:子块在参与运算时必须是有意义的,分块应当尽量为运算带来便利.这才是矩阵分块的真正目的.

1.5.2 分块矩阵的基本运算

分块矩阵的运算与普通矩阵的运算类似.可以将每个子块视为矩阵的一个元素来处理,子块与子块之间的运算仍然按照普通矩阵的运算规则进行.

1. 分块矩阵的加法和减法

设 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 均为 $m \times n$ 型矩阵,即 $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ 有意义.对 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 采用相同的分块方法.记

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \cdots & \mathbf{A}_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{A}_{s1} & \cdots & \mathbf{A}_{sr} \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{11} & \cdots & \mathbf{B}_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{B}_{s1} & \cdots & \mathbf{B}_{sr} \end{pmatrix},$$

其中,子块 $\mathbf{A}_{ij}$ 和 $\mathbf{B}_{ij}$ 为同型矩阵.那么

$$\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} \pm \mathbf{B}_{11} & \cdots & \mathbf{A}_{1r} \pm \mathbf{B}_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{A}_{s1} \pm \mathbf{B}_{s1} & \cdots & \mathbf{A}_{sr} \pm \mathbf{B}_{sr} \end{pmatrix}.$$

2. 数与分块矩阵的乘积

设分块矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \cdots & \mathbf{A}_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{A}_{s1} & \cdots & \mathbf{A}_{sr} \end{pmatrix} = (\mathbf{A}_{ij})_{s \times r},$$

则数 k 与 $\mathbf{A}$ 的乘积是将 k 与 $\mathbf{A}$ 的每一个子块相乘,即

$$k\mathbf{A} = \begin{pmatrix} k\mathbf{A}_{11} & \cdots & k\mathbf{A}_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ k\mathbf{A}_{s1} & \cdots & k\mathbf{A}_{sr} \end{pmatrix}.$$

3. 分块矩阵的乘积

设 $\mathbf{A}$ 为 $m \times s$ 型矩阵, $\mathbf{B}$ 为 $s \times n$ 型矩阵,矩阵的乘积 $\mathbf{AB}$ 有意义.在对 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 进行分块时,为使矩阵的乘积 $\mathbf{AB}$ 有意义,需满足:左乘矩阵 $\mathbf{A}$ 的列分法与右乘矩阵 $\mathbf{B}$ 的行分法一致;至于 $\mathbf{A}$ 的行分法与 $\mathbf{B}$ 的列分法,则无要求. $\mathbf{A}$ 被分为 p 行块和 t 列块, $\mathbf{B}$ 被分为 t 行块和 q 列块,即

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \cdots & \mathbf{A}_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{A}_{p1} & \cdots & \mathbf{A}_{pt} \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{11} & \cdots & \mathbf{B}_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{B}_{t1} & \cdots & \mathbf{B}_{tq} \end{pmatrix},$$

其中 $\mathbf{A}_{i1}, \mathbf{A}_{i2}, \dots, \mathbf{A}_{it}$ 的列数分别等于 $\mathbf{B}_{1j}, \mathbf{B}_{2j}, \dots, \mathbf{B}_{tj}$ 的行数. 则分块矩阵的乘积

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & \cdots & \mathbf{C}_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{C}_{p1} & \cdots & \mathbf{C}_{pq} \end{bmatrix},$$

其中

$$\mathbf{C}_{ij} = \sum_{k=1}^t \mathbf{A}_{ik} \mathbf{B}_{kj} \quad (i = 1, 2, \dots, p; j = 1, 2, \dots, q).$$

例 1-39 设

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

将 $\mathbf{A}$ 分块成具有特殊子块的分块矩阵, 并求分块矩阵 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 的乘积.

解 将 $\mathbf{A}$ 分块成

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{O}_{2 \times 2} & \mathbf{A}_{13} \\ \mathbf{O}_{2 \times 2} & 3\mathbf{E}_2 & \mathbf{O}_{2 \times 1} \\ \mathbf{O}_{2 \times 2} & \mathbf{O}_{2 \times 2} & \mathbf{A}_{33} \end{pmatrix},$$

其中, $\mathbf{A}_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}_{13} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{E}_2$ 为二阶单位矩阵, $\mathbf{O}$ 为零矩阵.

将矩阵 $\mathbf{B}$ 分块为

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ \hline 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ \hline 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mathbf{E}_2 \\ \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{O}_{1 \times 2} \end{pmatrix},$$

其中, $\mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

根据分块矩阵的乘法规则,有

$$AB = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{O}_{2 \times 2} & \mathbf{A}_{13} \\ \mathbf{O}_{2 \times 2} & 3\mathbf{E}_2 & \mathbf{O}_{2 \times 1} \\ \mathbf{O}_{2 \times 2} & \mathbf{O}_{2 \times 2} & \mathbf{A}_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\mathbf{E}_2 \\ \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{O}_{1 \times 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mathbf{A}_{11} \\ 3\mathbf{B}_2 \\ \mathbf{O}_{2 \times 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 2 \\ \cdots & \cdots \\ 3 & 6 \\ \cdots & \cdots \\ 9 & 12 \\ \cdots & \cdots \\ 0 & 0 \\ \cdots & \cdots \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. 分块矩阵的转置

设

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \cdots & \mathbf{A}_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{A}_{s1} & \cdots & \mathbf{A}_{sr} \end{pmatrix},$$

则 $\mathbf{A}$ 的转置矩阵为

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}^T & \cdots & \mathbf{A}_{s1}^T \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{A}_{1r}^T & \cdots & \mathbf{A}_{sr}^T \end{pmatrix}.$$

求分块矩阵的转置时,既要将对分块矩阵的行与列互换,同时也要对每一个子块进行转置.

例如,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 5 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \\ \mathbf{A}_{31} & \mathbf{A}_{32} \end{pmatrix},$$

将矩阵 $\mathbf{A}$ 转置为

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}^T & \mathbf{A}_{21}^T & \mathbf{A}_{31}^T \\ \mathbf{A}_{12}^T & \mathbf{A}_{22}^T & \mathbf{A}_{32}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 5 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

特别地,形如

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \cdots & \mathbf{A}_{1t} \\ & \mathbf{A}_{22} & \cdots & \mathbf{A}_{2t} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \mathbf{A}_{tt} \end{pmatrix} \text{ 和 } \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & & & \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \mathbf{A}_{t1} & \mathbf{A}_{t2} & \cdots & \mathbf{A}_{tt} \end{pmatrix}$$

的分块矩阵,其中 $\mathbf{A}_{ii} (i=1,2,\cdots,t)$ 均为方阵,分别称为上三角形分块矩阵和下三角形分块矩阵.

形如

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & & & \\ & \mathbf{A}_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{A}_{tt} \end{pmatrix}$$

的分块矩阵,其中 $\mathbf{A}_{ii} (i=1,2,\cdots,t)$ 均为方阵,称为对角分块矩阵.

上述对角分块矩阵具有以下运算规律.

(1) 同结构的对角分块矩阵的和与积仍是对角分块矩阵.

例如,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & & & \\ & \mathbf{A}_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{A}_{tt} \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{11} & & & \\ & \mathbf{B}_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{B}_{tt} \end{pmatrix},$$

则

$$\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} \pm \mathbf{B}_{11} & & & \\ & \mathbf{A}_{22} \pm \mathbf{B}_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{A}_{tt} \pm \mathbf{B}_{tt} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{11} & & & \\ & \mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{A}_{tt}\mathbf{B}_{tt} \end{pmatrix}.$$

(2) 对角分块矩阵的行列式性质.

$$|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}_{11}| |\mathbf{A}_{22}| \cdots |\mathbf{A}_{tt}|.$$

根据此性质,若 $|A_{ii}| \neq 0 (i=1, 2, \dots, t)$, 则 $|A| \neq 0$, 并且

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & & \\ & A_{22}^{-1} & \\ & & \ddots \\ & & & A_{tt}^{-1} \end{pmatrix}, A^k = \begin{pmatrix} A_{11}^k & & \\ & A_{22}^k & \\ & & \ddots \\ & & & A_{tt}^k \end{pmatrix},$$

其中 k 为整数.

例 1-40 设 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 求 A^{-1} .

解 对矩阵 A 进行分块:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & O_{2 \times 2} \\ O_{2 \times 2} & 2E_2 \end{pmatrix},$$

其中

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, A_{11}^{-1} = \frac{1}{|A_{11}|} A_{11}^* = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

单位矩阵 E_2 的逆阵为 E_2 , 因此

$$(2E_2)^{-1} = \frac{1}{2}E_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

根据分块矩阵求逆阵的性质, 得

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & O_{2 \times 2} \\ O_{2 \times 2} & (2E_2)^{-1} \end{pmatrix}.$$

所以

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

习题 1-5

1. 已知 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, 用分块矩阵计算 $kA, A+B, AB$.

2. 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, 求 $|A|, A^{-1}, A^{2n}$ (n 为自然数).

3. 设 $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 求 A^{-1} .

4. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, 求 $|A|$.

5. 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

1.6 矩阵的初等变换和初等矩阵

1.6.1 矩阵的初等变换概念

定义 23 将下面的三种变换称为矩阵的初等行变换.

(1) **倍乘变换**: 用一个非零数 k 乘以矩阵的某一行 (例如 k 乘以第 i 行, 简记为 kr_i).

(2) **倍加变换**: 用任意一个数 k 乘以矩阵的某一行加到另外一行上 (例如 k 乘以第 i 行加到第 j 行

上, 简记为 $kr_i + r_j$).

(3) **对调变换**: 对调矩阵某两行的位置 (例如对调第 i 行和第 j 行, 简记为 $r_i \leftrightarrow r_j$).

将定义 23 中的“行”换成“列”, 即可得到矩阵的**初等列变换**的定义, 其简记符号只需将“ r ”换成“ c ”.

例如, 对调第 i 列和第 j 列, 简记为 $c_i \leftrightarrow c_j$.

矩阵的初等行变换和初等列变换统称为矩阵的**初等变换**.

运用矩阵的初等变换表示后, 求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 3, \end{cases}$$

就可以只对方程组的增广矩阵

$$\tilde{\mathbf{A}} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 3 \end{array} \right)$$

进行变化. 矩阵中的虚线“ $|$ ”用于区分系数部分和常数项部分.

利用矩阵的初等变换解方程组的过程如下 (与消元过程一一对应).

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}} &\xrightarrow{\substack{-2r_1+r_2 \\ -r_1+r_3}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 3 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{-3r_2+r_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -6 & 4 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{\frac{1}{4}r_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{2r_3+r_2 \\ -r_3+r_1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{2r_2+r_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 1 \end{array} \right). \end{aligned}$$

得到的矩阵对应的方程组为

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_4 = 3, \\ x_2 = 1, \\ x_3 - \frac{3}{2}x_4 = 1. \end{cases}$$

易得解为

$$\begin{cases} x_1 = 3 - \frac{1}{2}c, \\ x_2 = 1, \\ x_3 = 1 + \frac{3}{2}c, \\ x_4 = c, \end{cases}$$

其中 c 为任意常数.

显然,一个矩阵经过倍乘变换 kr_i (或 kc_i),再经过倍乘变换 $k^{-1}r_i$ (或 $k^{-1}c_i$),即可变回本身;经过倍加变换 $kr_i + r_j$ (或 $kc_i + c_j$),再经过倍加变换 $-kr_i + r_j$ (或 $-kc_i + c_j$),也能变回本身;经过对调变换 $r_i \leftrightarrow r_j$ (或 $c_i \leftrightarrow c_j$),再经过同样的变换 $r_i \leftrightarrow r_j$ (或 $c_i \leftrightarrow c_j$),同样可以变回本身. 因此,三种初等行(列)变换是可逆的,且其逆变换与原变换属于同一类型.

1.6.2 初等矩阵的概念

定义 24 单位矩阵 E 经过一次初等行变换所得到的矩阵称为**行初等矩阵**;单位矩阵 E 经过一次初等列变换所得到的矩阵称为**列初等矩阵**. 将行初等矩阵和列初等矩阵统称为**初等矩阵**.

对于三种初等行变换所对应的行初等矩阵,分别记为 $R_i(k)$, $R_{ij}(k)$, R_{ij} ;对于三种初等列变换所对应的列初等矩阵,分别记为 $C_i(k)$, $C_{ij}(k)$, C_{ij} . 具体形式如下.

1. 倍乘变换 $R_i(k) = C_i(k)$

$$R_i(k) = C_i(k) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & k & \\ & & & & 1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \end{matrix} \quad (1-10)$$

其中第 i 行或第 j 列元素为 k ($k \neq 0$),其余元素与单位矩阵相同.

2. 倍加变换 $R_{ij}(k) = C_{ji}(k)$

$$R_{ij}(k) = C_{ji}(k) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & \vdots & \ddots & & \\ & & k & \cdots & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} i \\ j \end{matrix} \quad (1-11)$$

其中第 i 行加上 k 倍的第 j 行, 或第 i 列加上 k 倍的第 j 列.

3. 对调变换 $R_{ij} = C_{ij}$

$$R_{ij} = C_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & \cdots & 1 \\ & & & & 1 & \\ & & \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & & & & 1 \\ & & 1 & \cdots & 0 & \\ & & & & & 1 \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} i \\ j \end{matrix} \quad (1-12)$$

其中第 i 行和第 j 行互换, 或第 i 列和第 j 列互换.

定理 5 设 $A = (a_{ij})$ 是一个 $m \times n$ 型矩阵, 则对 A 做一次初等行变换得到的矩阵, 等于在 A 的左边乘以相应的 m 阶初等矩阵; 对 A 做一次初等列变换得到的矩阵, 等于在 A 的右边乘以相应的 n 阶列初等矩阵. 具体表述如下.

- (1) $R_i(k)A$ 等于将 A 的第 i 行乘以 $k (k \neq 0)$ 所得到的矩阵.
- (2) $R_{ij}(k)A$ 等于将 A 的第 i 行乘以 k 加到第 j 行上所得到的矩阵.
- (3) $R_{ij}A$ 等于将 A 的第 i, j 两行对调所得到的矩阵.

(4) $AC_i(k)$ 等于将 A 的第 i 列乘以 $k (k \neq 0)$ 所得到的矩阵.

(5) $AC_{ij}(k)$ 等于将 A 的第 i 列乘以 k 加到第 j 列上所得到的矩阵.

(6) AC_{ij} 等于将 A 的第 i, j 两列对调所得到的矩阵.

证明 这里只对行的情况进行证明, 列的情况可以类似证明. 不妨将 A 的每一行看作一个整体, 记作 $\alpha_1^T, \alpha_2^T, \dots, \alpha_m^T$, 即

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_m^T \end{pmatrix},$$

其中 α_i^T 是 A 的第 i 行元素组成的 n 维行向量.

设 $P = (p_{ij})$ 是一个 m 阶方阵, 则通过矩阵的乘法法则, 得到

$$PA = \begin{pmatrix} p_{11}\alpha_1^T + p_{12}\alpha_2^T + \dots + p_{1m}\alpha_m^T \\ p_{21}\alpha_1^T + p_{22}\alpha_2^T + \dots + p_{2m}\alpha_m^T \\ \vdots \\ p_{m1}\alpha_1^T + p_{m2}\alpha_2^T + \dots + p_{mm}\alpha_m^T \end{pmatrix}.$$

(1) 当 $P = R_i(k)$ 时,

$$PA = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \vdots \\ \alpha_{i-1}^T \\ k\alpha_i^T \\ \alpha_{i+1}^T \\ \vdots \\ \alpha_m^T \end{pmatrix},$$

即 PA 等于将 A 的第 i 行乘以 k 所得到的矩阵.

(2) 当 $P = R_{ij}(k)$ 时,

$$PA = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \vdots \\ \alpha_i^T \\ \vdots \\ k\alpha_i^T + \alpha_j^T \\ \vdots \\ \alpha_m^T \end{pmatrix},$$

即 PA 等于将 A 的第 i 行乘以 k 加到第 j 行上所得到的矩阵.

(3) 当 $P=R_{ij}$ 时,

$$PA = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \vdots \\ \alpha_j^T \\ \vdots \\ \alpha_i^T \\ \vdots \\ \alpha_m^T \end{pmatrix},$$

即 PA 等于将 A 的第 i, j 两行对调所得到的矩阵.

直接计算可得, 初等矩阵的行列式均不为 0, 因此初等矩阵均为可逆矩阵, 且其逆矩阵分别为

$$R_i(k)^{-1} = R_i(k^{-1}), R_{ij}(k)^{-1} = R_{ij}(-k), R_{ij}^{-1} = R_{ij},$$

$$C_i(k)^{-1} = C_i(k^{-1}), C_{ij}(k)^{-1} = C_{ij}(-k), C_{ij}^{-1} = C_{ij}.$$

上述结论也可以通过定理 5 及矩阵初等变换的可逆性得到.

1.6.3 矩阵的初等变换和初等矩阵的应用

1. 矩阵等价标准形

定义 25 满足下列条件的矩阵称为行阶梯形矩阵:

- (1) 零行(元素全为零的行)位于矩阵的下方;
- (2) 各非零行的首非零元所在的列位于前一行(如果有的话)首非零元的右边.

例如, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 是行阶梯形矩阵, 而 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 不是行阶梯形矩阵.

定义 26 满足下列条件的行阶梯形矩阵称为行最简形矩阵:

- (1) 各非零行的首非零元都是 1;
- (2) 每个首非零元所在列的其余元素都是 0.

例如, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 是行最简形矩阵, 而 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 不是行最简形矩阵.

行最简形矩阵在后续章节中有非常重要的应用.

定义 27 设 A, B 均为 $m \times n$ 型矩阵. 如果 A 经过一系列初等行变换得到 B , 则称 A 与 B 行等价, 简记为 $A \stackrel{r}{\sim} B$; 如果 A 经过一系列初等列变换得到 B , 则称 A 与 B 列等价, 简记为 $A \stackrel{c}{\sim} B$; 如果 A 经过一系列初等变换得到 B , 则称 A 与 B 等价, 简记为 $A \sim B$.

容易验证, 矩阵之间的等价满足以下性质.

(1) 自反性: $A \sim A$.

(2) 对称性: 如果 $A \sim B$, 那么 $B \sim A$.

(3) 传递性: 如果 $A \sim B$, 且 $B \sim C$, 那么 $A \sim C$.

其中, A, B, C 均为 $m \times n$ 型矩阵.

定理 6 设 A 是一个 $m \times n$ 型矩阵, 那么 A 必与形如

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}_{r \times r} \quad (1-13)$$

的矩阵等价, 其中 $0 \leq r \leq \min\{m, n\}$. 将上述矩阵称为矩阵 A 的等价标准形. 由于该矩阵的前 r 行前 r 列所组成的 r 阶方阵是单位矩阵 E_r , 所以上述矩阵可以简写为

$$\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m \times n}. \quad (1-14)$$

其中, 左上角的零矩阵是 $O_{r(n-r)}$, 左下角的零矩阵是 $O_{(m-r)r}$, 右下角的零矩阵是 $O_{(m-r)(n-r)}$.

注意

- (1) 任何矩阵都等价于形如式(1-13)的具有简单形式的矩阵.
- (2) 根据等价关系的传递性和对称性, 等价于同一个等价标准形矩阵的两个矩阵必然是等价的.

推论 1 设 A 是一个 n 阶方阵. 那么, A 是可逆矩阵的充要条件是 A 可以表示为若干个 n 阶初等矩阵的乘积.

推论 2 设 A 是一个 n 阶方阵, 则以下结论等价:

- (1) A 是可逆矩阵;

$$(2) A \cong E_n;$$

$$(3) A \stackrel{r}{\cong} E_n;$$

$$(4) A \stackrel{c}{\cong} E_n.$$

定理 7 设 A, B 均为 $m \times n$ 型矩阵, 那么

$$(1) A \stackrel{r}{\cong} B \text{ 的充要条件是存在 } m \text{ 阶可逆矩阵 } R, \text{ 使得 } B=RA;$$

$$(2) A \stackrel{c}{\cong} B \text{ 的充要条件是存在 } n \text{ 阶可逆矩阵 } C, \text{ 使得 } B=AC;$$

$$(3) A \cong B \text{ 的充要条件是存在 } m \text{ 阶可逆矩阵 } R \text{ 和 } n \text{ 阶可逆矩阵 } C, \text{ 使得 } B=RAC.$$

2. 初等变换法求逆矩阵

设 A 是一个 n 阶可逆矩阵. 由定理 6 的推论 1 可知, A 可以表示为若干个 n 阶初等矩阵的乘积. 又因为初等矩阵是可逆的, 且其逆矩阵仍为同类型的初等矩阵, 因此存在 n 阶初等矩阵 $P_1, P_2, \dots, P_s$, 使得

$$P_1 P_2 \cdots P_s A = E_n. \quad (1-15)$$

由矩阵可逆判别的定理和推论可得

$$A^{-1} = P_1 P_2 \cdots P_s = P_1 P_2 \cdots P_s E_n. \quad (1-16)$$

由 $R_i(k) = C_i(k), R_{ij}(k) = C_{ji}(k), R_{ij} = C_{ij}$, 可知每个行初等矩阵也是列初等矩阵, 列初等矩阵也是行初等矩阵. 因此, 由式(1-15)和式(1-16)可知: 经过一系列初等行变换可以将 A 化为单位矩阵 E_n , 而经过相同的一系列初等行变换可以将单位矩阵 E_n 化为 A^{-1} .

可以将可逆矩阵 A 和单位矩阵 E_n 并排放在一起, 组成一个 $n \times 2n$ 型矩阵 (A, E_n) . 于是

$$P_1 P_2 \cdots P_s (A, E_n) = (P_1 P_2 \cdots P_s A, P_1 P_2 \cdots P_s E_n) = (E_n, A^{-1}),$$

即

$$(A, E_n) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (E_n, A^{-1}).$$

同理, 存在 n 阶初等矩阵 $Q_1, Q_2, \dots, Q_t$, 使得

$$A Q_1 Q_2 \cdots Q_t = E_n,$$

且

$$A^{-1} = Q_1 Q_2 \cdots Q_t = E_n Q_1 Q_2 \cdots Q_t.$$

因此, 经过一系列初等列变换可以将 A 化为单位矩阵 E_n , 而经过相同的一系列初等列变换可以将单位矩阵 E_n 化为 A^{-1} , 可以将可逆矩阵 A 和单位矩阵 E_n 上下并排放在一起, 组成一个 $2n \times n$ 型矩阵

$$\begin{pmatrix} A \\ E_n \end{pmatrix}.$$

于是

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{E}_n \end{pmatrix} \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2 \cdots \mathbf{Q}_t = \begin{pmatrix} \mathbf{A} \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2 \cdots \mathbf{Q}_t \\ \mathbf{E}_n \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2 \cdots \mathbf{Q}_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_n \\ \mathbf{A}^{-1} \end{pmatrix},$$

即

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{E}_n \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_n \\ \mathbf{A}^{-1} \end{pmatrix}.$$

值得注意的是,在求可逆矩阵的逆矩阵时,若采用对 $(\mathbf{A}, \mathbf{E}_n)$ 进行初等行变换的方式,或对 $\begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{E}_n \end{pmatrix}$ 进行初等列变换的方式,必须在整个求解过程中统一使用初等行变换或初等列变换,不能混合使用两种方式.

例 1-41 判断矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

是否可逆并求逆矩阵.

解 由于 $|\mathbf{A}|=2 \neq 0$,因此 $\mathbf{A}$ 是可逆矩阵.对增广矩阵 $(\mathbf{A}, \mathbf{E}_n)$ 进行初等行变换:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}, \mathbf{E}_n) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 + r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3 + 3r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 1 & 3 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow[\frac{1}{2}r_3]{-r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{array} \right) \xrightarrow{r_1 - r_2 - 2r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{array} \right). \end{aligned}$$

于是

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

例 1-42 设

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

求解矩阵方程

$$\mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} - 3\mathbf{X}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} - \mathbf{E} = \mathbf{O}.$$

解 由 $\mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} - 3\mathbf{X}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} - \mathbf{E} = \mathbf{O}$ 得

$$(\mathbf{A} - 3\mathbf{E})\mathbf{X}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{E}.$$

因此,

$$\mathbf{X} = (\mathbf{A} - 3\mathbf{E})^{-1}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{-1} = [\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(\mathbf{A} - 3\mathbf{E})]^{-1} = (\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} - 3\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{-1}.$$

而

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} - 3\mathbf{A}^{\mathrm{T}} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 3 & -3 & 3 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -4 & 3 \\ -4 & 6 & -5 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

利用初等行变换法,求得

$$\mathbf{X} = (\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} - 3\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{-1} = \frac{1}{34} \begin{pmatrix} -13 & -7 & 2 \\ -7 & -9 & -12 \\ 2 & -12 & -16 \end{pmatrix}.$$

例 1-43 设 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$, 求 $\mathbf{A}^{-1}$.

$$\begin{aligned} \text{解 } (\mathbf{A}, \mathbf{E}) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 6 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow[r_3+2r_2]{r_1-4r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[r_1+3r_3]{-r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{array} \right), \end{aligned}$$

所以 $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

例 1-44 用初等行变换解矩阵方程 $\mathbf{AX}=\mathbf{B}$, 其中

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

解 $(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \left(\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & -2 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & -2 & 5 \end{array} \right)$

$$\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow[r_3+3r_2]{r_2 \leftrightarrow r_3, \frac{1}{5}r_2} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{r_1-2r_2+2r_3} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \end{array} \right).$$

因此

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

习题 1-6

1. 对矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & 8 & 3 \end{pmatrix}$ 做初等行变换, 将其化为行阶梯形矩阵及行最简形矩阵.

2. 已知矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}$, 求矩阵 $\mathbf{A}$ 的等价标准形.

3. 用初等变换法求矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

1.7 矩阵的秩

对于 n 阶方阵 A , 当其为非奇异矩阵 ($|A| \neq 0$) 时, 可以探讨其可逆性的相关性质, 然而, 对于 $m \times n$ 型矩阵, 则不存在通常意义上的逆矩阵. 为了深入讨论一般矩阵的性质, 需要引入矩阵的秩这一概念. 矩阵的秩作为矩阵的一个基本属性, 在求解逆矩阵和线性方程组等问题中具有重要的应用.

1.7.1 矩阵的秩的概念

为建立矩阵的秩的定义, 需先引入矩阵子式的定义.

定义 28 在 $m \times n$ 型矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 中, 任取 k 行与 k 列 ($1 \leq k \leq \min\{m, n\}$), 位于这些行和列交叉处的 k^2 个元素按原来的位置次序构成一个 k 阶行列式, 称为矩阵 A 的一个 k 阶子式.

例如, 由矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

的每一个元素构成的一阶行列式就是其一阶子式. 一阶子式共有 $C_3^1 C_4^1 = 12$ 个. 由矩阵 A 的第一、三

两行与第二、三列相交处的元素构成的二阶子式为 $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}$, 二阶子式共有 $C_3^2 C_4^2 = 18$ 个. 由矩阵 A 的

第一、二、三行与第一、二、四列相交处的元素构成的三阶子式为 $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 8 \end{vmatrix}$, 三阶子式共有 $C_3^3 C_4^3 =$

4 个.

注意

(1) 矩阵的 k 阶子式是行列式而非矩阵.

(2) 对于 $m \times n$ 型矩阵, 其 k 阶子式共有 $C_m^k C_n^k$ 个.

有了子式的定义, 就可以定义矩阵的秩.

定义 29 设 A 是 $m \times n$ 型矩阵, 如果 A 中存在一个不为零的 r 阶子式 D , 而任何 $r+1$ 阶子式 (如果存在的话) 均为零, 则称 D 为矩阵 A 的最高阶非零子式, 并称 r 为矩阵 A 的秩, 记作 $R(A) = r$.

规定:零矩阵的秩为0.

根据行列式的性质,如果矩阵 $\mathbf{A}$ 的所有 $r+1$ 阶子式全为零,那么其所有高于 $r+1$ 阶的子式也必然全为零.因此,矩阵的秩就是其不等于零的子式的最高阶数.

例如,矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的非零行有3行,可知 $\mathbf{A}$ 的所有4阶子式全为零.而由矩阵 $\mathbf{A}$

的第一、二、三行和第一、二、四列相交处的元素构成的三阶子式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ 是一个上三角行列式,显然

不等于0,因此 $R(\mathbf{A})=3$.

1.7.2 矩阵的秩的性质

性质 12 $R(\mathbf{A})=R(\mathbf{A}^T)$.

证明 由行列式与其转置行列式相等的性质可知,若行列式 D 是矩阵 $\mathbf{A}$ 的一个最高阶非零子式,则 D^T 也是矩阵 $\mathbf{A}^T$ 的一个最高阶非零子式.因此 $R(\mathbf{A})=R(\mathbf{A}^T)$.

性质 13 如果矩阵 $\mathbf{A}$ 存在一个 k 阶非零子式,则 $R(\mathbf{A}) \geq k$;如果矩阵 $\mathbf{A}$ 的 l 阶子式全为零,则 $R(\mathbf{A}) < l$.

证明 根据矩阵的秩是矩阵中非零子式的最高阶数,以及行列式按行(列)展开的性质,很容易得到上述结论.

性质 14 初等变换不改变矩阵的秩,即如果 $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$,则 $R(\mathbf{A})=R(\mathbf{B})$.

证明 因为 $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$ 意味着 $\mathbf{A}$ 经过一系列初等变换可以变到 $\mathbf{B}$,所以只需证明:如果 $\mathbf{A}$ 经过一次初等变换变到 $\mathbf{B}$,那么 $R(\mathbf{A})=R(\mathbf{B})$.

设 $\mathbf{A}$ 是 $m \times n$ 型矩阵, $R(\mathbf{A})=r$,且 $\mathbf{A}$ 的某个 r 阶子式 $D \neq 0$.下面针对初等行变换的三种情况分别讨论,初等列变换的情况可以类似证明.

(1)当 $\mathbf{A}$ 经过倍乘变换变到 $\mathbf{B}$,即 $\mathbf{A} \xrightarrow{kr_i} \mathbf{B}$, $k \neq 0$ 时,总可以找到 $\mathbf{B}$ 的一个子式 D_1 ,使得 $D_1 = kD$ (若 D 包含第 i 行),或者 $D_1 = D$ (若 D 不包含第 i 行).因此,矩阵 $\mathbf{B}$ 存在一个非零子式 D_1 .由性质 13 可知, $R(\mathbf{B}) \geq r$.

(2)当 $\mathbf{A}$ 经过倍加变换变到 $\mathbf{B}$,即 $\mathbf{A} \xrightarrow{kr_i+r_j} \mathbf{B}$ 时,如果 D 不包含第 j 行,则 D 也是 $\mathbf{B}$ 的一个 r 阶非零子式;如果 D 包含第 j 行,不妨将矩阵 $\mathbf{B}$ 中取自与 D 相同行和列的行列式记为 D_1 .

①若 D 也包含第 i 行, 则 $D_1 = D \neq 0$ 是 B 的一个 r 阶非零子式.

②如果 D 不包含第 i 行, 则 D_1 可以写成 $D_1 = D + kM$, 其中 M 也是 B 的一个 r 阶子式. 由于 $D \neq 0$, 因此 D_1 和 M 不可能同时为零, 总能找到一个非零子式 $N (N = D_1 \text{ 或 } N = M)$.

无论哪种情况, 都能找到一个 r 阶非零子式, 因此 $R(B) \geq r$.

(3) 当 A 经过对调变换变到 B , 即 $A \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} B$ 时, 总可以找到 B 的一个子式 D_1 , 使得 $D_1 = D$ 或 $D_1 = -D$. 因此, 矩阵 B 存在一个非零子式 D_1 , 从而 $R(B) \geq r$.

综上, 矩阵 A 经过一次初等行变换变到 B 后, 有 $R(A) \leq R(B)$. 由于初等变换是可逆的, B 也可以经过一次初等行变换变回 A , 因此 $R(B) \leq R(A)$. 由此得 $R(A) = R(B)$.

推论 设 A 是一个 $m \times n$ 型矩阵, P, Q 分别为 m 阶、 n 阶可逆矩阵, 则

$$R(PAQ) = R(A).$$

性质 15 设 A 是一个 n 阶方阵, 则 $|A| \neq 0$ 的充要条件是 $R(A) = n$.

证明 必要性: 若 $|A| \neq 0$, 则 $|A|$ 是 A 的一个 n 阶非零子式, 因此 $R(A) \geq n$. 由于 $0 \leq R(A) \leq n$, 所以 $R(A) = n$.

充分性: 若 $R(A) = n$, 则 A 存在一个 n 阶非零子式. 而 A 的 n 阶子式只有 $|A|$, 因此 $|A| \neq 0$.

因此, 通常也将可逆矩阵称为**满秩矩阵**, 将不可逆矩阵称为**降秩矩阵**.

例 1-45 计算下列矩阵的秩.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

解 对于矩阵 A , 计算得

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{3r_1 + r_2 \\ -2r_1 + r_3}} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 11 & -4 \\ 0 & -5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & -4 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = 13.$$

因为 $|A| \neq 0$, 所以由性质 15 可知, $R(A) = 3$.

对于矩阵 B , 计算得 $|B| = 0$. 因此, $R(B) < 3$. 但是, 矩阵 B 存在一个二阶子式:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

由性质 13 可知, $R(B) \geq 2$. 从而 $R(B) = 2$.

对于矩阵 C , 其已是行阶梯形矩阵, 直接观察非零行, 显然 C 存在一个二阶非零子式:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

同时所有三阶子式全为零. 因此, $R(C)=2$.

由例 1-45 中矩阵 C 的求秩过程可以看出, 对于一个具有 r 个非零行的行阶梯形矩阵, 可以很容易找到一个 r 阶非零子式(该子式由这 r 个非零行和各非零行的首个非零元素所在的 r 列组成, 其形式为上三角行列式). 因此, 行阶梯形矩阵的秩就是其非零行的行数.

根据性质 14, 对于任意矩阵 A , 特别是当 A 的行数和列数较高时, 可以通过初等行变换将 A 化为一个行阶梯形矩阵 B . 此时只需直接观察 B 中非零行的个数 r , 即可得出矩阵 B 的秩, 从而得到矩阵 A 的秩为 r .

例 1-46 求矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & -11 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

的秩 $R(A)$, 并求 A 的一个最高阶非零子式.

解 对矩阵 A 进行初等行变换, 将其化为行阶梯形矩阵:

$$\begin{aligned} A &\xrightarrow{\substack{r_2-2r_1 \\ r_3+r_1 \\ r_4-r_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -12 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{3}r_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{r_3+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_4-r_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

由于最后得到的矩阵为行阶梯形矩阵, 其非零行数为 3, 因此 $R(A)=3$.

既然 $R(A)=3$, 那么 A 的最高阶非零子式为三阶子式. 矩阵 A 的三阶子式共有 $C_4^3 \cdot C_5^3 = 40$ 个, 逐一验证较为烦琐. 从初等变换过程中可以看出, 我们仅进行了行变换, 没有改变列顺序. 因此, 可以从矩阵 A 的第一、二、四列组成的 4×3 矩阵 B 中选取子式进行验证. 对矩阵 B 做同样的初等行变换, 得到

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

因此, $R(\mathbf{B})=3$, 矩阵 $\mathbf{B}$ 中存在一个三阶非零子式. 从 $\mathbf{B}$ 的前三行中取出一个子式:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -7 & -8 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -6 \neq 0.$$

因此, 子式 D 是矩阵 $\mathbf{A}$ 的一个最高阶非零子式.

习题 1-7

1. 求下列矩阵的秩.

$$(1) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix};$$

$$(2) \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. 已知矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$, 求矩阵 $\mathbf{A}$ 的秩.

3. 求矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 的秩.

1.8 矩阵的应用

随着互联网的广泛应用, 以及个人通信、多媒体通信、办公自动化、电子邮件、电子自动转账支付系统和自动零售业务网的建立与实现, 信息安全保护问题显得尤为重要. 密码技术是信息安全的核心技术. 在密码学中, 原始消息称为明文, 加密后伪装的明文称为密文, 从明文转换为密文的过程称为加密, 而将密文还原为明文的过程称为解密. 明文和密文之间的转换是通过密钥来实现的.

编制密钥的方法有多种, 其中一种是复合图表法. 在复合图表法中, 矩阵运算起到了重要的作用.

在英文中, 有一种用于消息保密的措施, 即将消息中的英文字母用对应的整数来表示, 然后传送这组整数. 例如, 按照表 1-5 的规则发送 “She is a girl” 这十个字母, 可以用数字序列 19, 8, 5, 9, 19, 1, 7, 9, 18, 12 来表示. 这种直接使用数字编码的方法存在高频数字容易被破译的风险.

表 1-5

$A \rightarrow 1$	$H \rightarrow 8$	$O \rightarrow 15$	$V \rightarrow 22$
$B \rightarrow 2$	$I \rightarrow 9$	$P \rightarrow 16$	$W \rightarrow 23$
$C \rightarrow 3$	$J \rightarrow 10$	$Q \rightarrow 17$	$X \rightarrow 24$
$D \rightarrow 4$	$K \rightarrow 11$	$R \rightarrow 18$	$Y \rightarrow 25$
$E \rightarrow 5$	$L \rightarrow 12$	$S \rightarrow 19$	$Z \rightarrow 26$
$F \rightarrow 6$	$M \rightarrow 13$	$T \rightarrow 20$	
$G \rightarrow 7$	$N \rightarrow 14$	$U \rightarrow 21$	

为了进一步提升安全性,可以通过矩阵乘法对这些编码消息进行加密处理.首先,将编码消息组成一个矩阵

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 19 & 8 & 5 & 9 & 19 \\ 1 & 7 & 9 & 18 & 12 \end{pmatrix}.$$

称矩阵 $\mathbf{B}$ 为明文矩阵.

接着,取一个行列式非零的二阶整数方阵 $\mathbf{A}$,作为密钥矩阵.这是消息发送者和接收者事先约定的密码.例如,假设密钥矩阵为

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$

其逆矩阵为

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

在消息传递过程中,利用密钥矩阵对原文矩阵进行加工.具体地,计算密文矩阵 $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$,即

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 19 & 8 & 5 & 9 & 19 \\ 1 & 7 & 9 & 18 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41 & 37 & 37 & 72 & 74 \\ 61 & 52 & 51 & 99 & 105 \end{pmatrix}.$$

然后,发送密文矩阵 $\mathbf{C}$,即传递数字序列 41,37,37,72,74,61,52,51,99,105.

接收者在收到密文后,按照事先约定,将这些数字恢复成原来的矩阵形式 $\mathbf{C}$,然后,利用密钥矩阵的逆矩阵 $\mathbf{A}^{-1}$ 解密.计算 $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}$ 即可恢复原来的明文矩阵 $\mathbf{B}$.

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 41 & 37 & 37 & 72 & 74 \\ 61 & 52 & 51 & 99 & 105 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 8 & 5 & 9 & 19 \\ 1 & 7 & 9 & 18 & 12 \end{pmatrix},$$

最后,接收者可以根据表 1-5 将明文矩阵 $\mathbf{B}$ 转换为“*She is a girl*”.

《九章算术》

《九章算术》，又称《九章算经》，是中国古代著名的数学著作之一，也是中国数学史上最早的数学专著之一。它汇集了中国古代数学家们长期积累的数学知识和解题方法，展现了古代中国数学的辉煌成就。全书共分九章，包括《方田》《商功》《分田》《均田》《算经》《比》《精广》《尽算》和《杂题》，内容涵盖了代数、几何和算术等多个领域。

《方田》主要涉及土地测量和土地面积的计算。书中提出了通过简单的测量方法计算不规则形状土地面积的技巧，并介绍了相关的实用方法。

《商功》和《分田》讨论了如何根据土地的产出进行分配和计算，强调了公平和效率，提出了一些公平分配土地的方法。

《均田》进一步探讨了土地的均分和平均分配问题，提出了基于土地性质和产出进行合理分配的计算方法。

《算经》是整部著作中最为重要的章节之一，主要讨论了代数方面的问题，如方程的解法和数值计算等。这一章节系统地总结了古代中国数学家在代数方面的研究成果，提出了一些实用的解题方法。

《比》探讨了比例和比较大小的问题，介绍了用于商业和日常生活的比较技巧和方法，具有重要的实际意义。

《精广》主要涉及几何方面的知识，包括勾股定理和几何图形的计算，展示了古代中国数学家在几何领域的造诣。

《尽算》和《杂题》则是对前述内容的补充与扩展，涉及更多实际问题的解决方法，展现了古代中国数学家在应用数学方面的智慧和技巧。

总的来说，《九章算术》作为中国古代数学的经典之作，其成就不仅体现在具体的数学知识和解题方法上，更在于对古代中国数学思想的系统整合与传承。它对后世中国数学的发展产生了深远影响，也为世界数学史的发展做出了重要贡献。

资料来源：作者整理。



第1章复习题

1. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 & 4 \\ 0 & -3 & 5 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & x^2 & 4 \\ 0 & x+y & 5 & y-z \end{pmatrix}$, 若 $A=B$, 求 x, y, z .

2. 设 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, 求 $A+B, A-B, 3A-2B$.

3. 设 $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, 若矩阵 X 满足 $A+2X=B$, 求 X .

4. 计算下列矩阵的乘积.

(1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} (4 \ 5);$

(2) $(2 \ 4 \ 6) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix};$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix};$

(4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$

5. 如果 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, 求 $AB+AC$.

6. 设 $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, 求 AB 和 BA .

7. 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

求 $A^T, B^T, AB, B^T A^T$.

8. 判断下列方阵是否可逆, 如果可逆, 求其逆矩阵.

$$(1) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} (ad-bc \neq 0); \quad (2) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix};$$

$$(3) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}; \quad (4) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. 用逆矩阵解下列矩阵方程, 求出未知矩阵 $\mathbf{X}$.

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$(2) \mathbf{X} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

10. 求下列矩阵的秩.

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad (2) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$(3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (4) \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

11. 利用初等行变换将下列矩阵化成行阶梯形矩阵.

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ -3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (2) \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix};$$

$$(3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix};$$

$$(4) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

12. 利用初等行变换求下列矩阵的逆矩阵.

$$(1) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$(2) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

13. 根据行列式的定义, 计算下列行列式.

$$(1) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix};$$

$$(2) \begin{vmatrix} n & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n-1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

14. 如果 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, 用 D 表示 $\begin{vmatrix} 4a_{11} & 2a_{11}-3a_{12} & a_{13} \\ 4a_{21} & 2a_{21}-3a_{22} & a_{23} \\ 4a_{31} & 2a_{31}-3a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 的值.

15. 计算下列行列式.

$$(1) \begin{vmatrix} 200 & 427 & 227 \\ 300 & 643 & 343 \\ 400 & 721 & 421 \end{vmatrix};$$

$$(2) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 4 \end{vmatrix};$$

$$(3) \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix};$$

$$(4) \begin{vmatrix} c & a & b & a \\ a & c & a & b \\ b & a & c & a \\ a & b & a & c \end{vmatrix}.$$

16. 根据行列式的性质, 计算下列行列式.

$$(1) \begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix};$$

$$(2) \begin{vmatrix} a & b+a & c+b+a & d+c+b+a \\ a & b+2a & c+2b+3a & d+2c+3b+4a \\ a & b+3a & c+3b+6a & d+3c+6b+10a \\ a & b+4a & c+4b+10a & d+4c+10b+20a \end{vmatrix}.$$

17. 按第 3 列展开, 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & -1 & b & -1 \\ -1 & -1 & c & -1 \\ -1 & 1 & d & 0 \end{vmatrix}.$$

18. 设

$$\begin{vmatrix} 1 & a & -2 \\ 8 & 3 & 5 \\ -1 & 4 & 6 \end{vmatrix}$$

的代数余子式 $A_{21}=4$, 则 a 为何值?

19. 设 $a \neq b$, 证明: n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix} = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b}.$$

20. 证明:

$$\begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} = a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n.$$

21. 计算 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

22. 已知 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$, A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式, 求 $A_{31} + A_{32} + A_{33}$ 和 $A_{34} + A_{35}$.

应用拓展

矩阵线性化解决人脸识别问题

图 1-5 中有两张照片是同一个人的,但计算机不会像人类那样直接分辨出来.那么,计算机怎么办?一种行之有效的办法是线性化.



图 1-5

首先,给出该人的多张照片(见图 1-6),并将其中某张照片分为眼、鼻、嘴三个部位,这是人脸最重要的三个部位.通过某种算法,可以用三个实数分别表示这三个部位.例如,得到的数值分别为 150,30,20(见图 1-7).



图 1-6

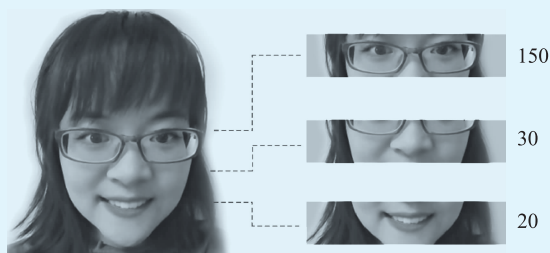


图 1-7

将图 1-6 中所有照片的特征数值计算出来,用三维坐标表示得到的结果.将这些三维坐标点标注在直角坐标系中,发现这些点都落在某个平面上,或在该平面的附近(见图 1-8).因此,可以认为此人的脸可以通过该平面进行线性化表示.在线性代数中,可以用一个矩阵来表示该平面.

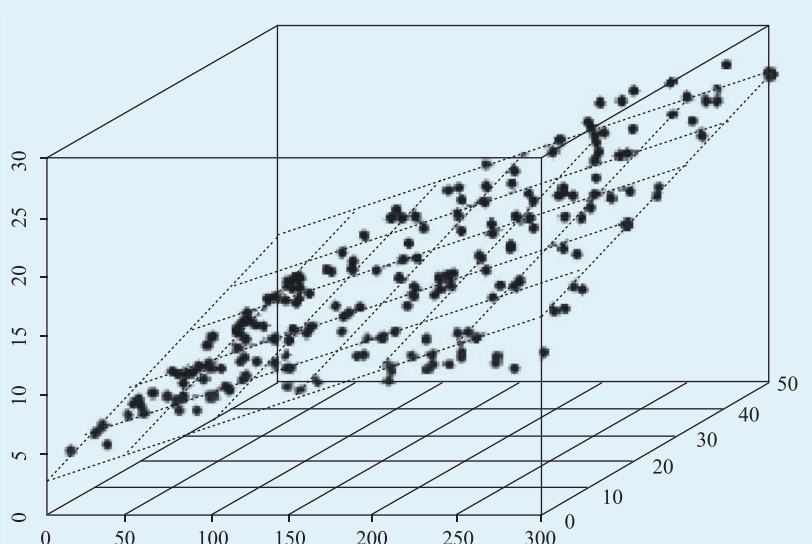


图 1-8

然后,利用线性代数的一些性质,可以方便地判断图 1-5 中的照片是否在之前线性化得到的平面上.若不在平面上,则表示这个人的图像和样本中的人物图像不同,计算机即可识别.

