

“十四五”职业教育河南省规划教材配套用书

# 高等数学习题精练

GAODENG SHUXUE XITI JINGLIAN

主编 李东方 刘会彩 窦慧晗

# 高等数学习题精练

GAODENG SHUXUE XITI JINGLIAN

ISBN 978-7-5635-7572-5



定价: 35.00元

策划编辑: 金颖杰  
责任编辑: 郝永进  
封面设计: 刘文东

“十四五”职业教育河南省规划教材配套用书

高等数学习题精练

主编 李东方 刘会彩 窦慧晗

北京邮电大学出版社



北京邮电大学出版社  
www.buptpress.com

“十四五”职业教育河南省规划教材配套用书

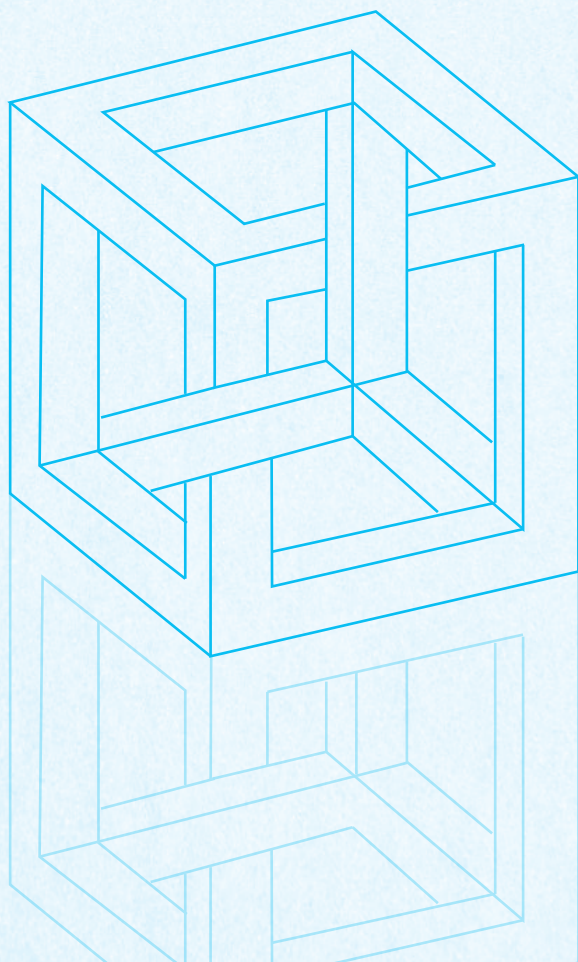
# 高等数学习题精练

GAODENG SHUXUE XITI JINGLIAN

主编 李东方 刘会彩 窦慧晗



北京邮电大学出版社  
[www.buptpress.com](http://www.buptpress.com)



## 内 容 简 介

本书根据教材的章节设置编写,共分为8章,内容包括函数、极限与连续,导数与微分,微分中值定理与导数的应用,不定积分,定积分及其应用,常微分方程,无穷级数以及多元函数微分学.

本书适用于高等职业院校各专业的高等数学课程,并可作为相关人员的学习资料.

## 图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习题精练 / 李东方, 刘会彩, 窦慧晗主编.  
北京: 北京邮电大学出版社, 2025. -- ISBN 978-7-5635-7572-5

I. O13-44

中国国家版本馆 CIP 数据核字第 20251YW036 号

策划编辑: 金颖杰      责任编辑: 郝永进      封面设计: 刘文东

出版发行: 北京邮电大学出版社

社 址: 北京市海淀区西土城路 10 号

邮政编码: 100876

发 行 部: 电话: 010-62282185    传真: 010-62283578

E-mail: publish@bupt.edu.cn

经 销: 各地新华书店

印 刷: 三河市骏杰印刷有限公司

开 本: 787 mm×1 092 mm    1/16

印 张: 11

字 数: 228 千字

版 次: 2025 年 7 月第 1 版

印 次: 2025 年 7 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5635-7572-5

定 价: 35.00 元

• 如有印装质量问题,请与北京邮电大学出版社发行部联系 •

服务电话: 400-615-1233



## 前言

本书依据现阶段我国教育改革的需求,在充分总结高等职业院校一线教师教学经验的基础上编写而成。

本书根据教材的章节设置编写,共分为 8 章,内容包括函数、极限与连续,导数与微分,微分中值定理与导数的应用,不定积分,定积分及其应用,常微分方程,无穷级数以及多元函数微分学。

在编写本书过程中,编者充分考虑到高等职业教育的特点,每节课后均设有练习题,每章后附有本章复习题,书的末尾设有 5 套综合训练题。题型的设置合理,难度适中,能够帮助学生巩固所学知识、查漏补缺、理论与实践结合,达到更好地掌握知识的目的,并培养学生利用数学思维解决实际问题的能力。

本书由许昌电气职业学院李东方、刘会彩,郑州技师学院窦慧晗任主编。在编写本书过程中,编者参考了相关教材与资料,在此向所有相关作者表示诚挚的谢意!

由于编者水平有限,书中难免存在不足之处,敬请广大读者批评指正。

编 者



|                           |    |
|---------------------------|----|
| <b>第 1 章 函数、极限与连续</b>     | 1  |
| 1.1 函数                    | 1  |
| 1.2 函数的极限                 | 6  |
| 1.3 极限的运算                 | 9  |
| 1.4 两个重要极限                | 12 |
| 1.5 无穷小与无穷大               | 15 |
| 1.6 函数的连续性                | 18 |
| 第 1 章复习题                  | 23 |
| <b>第 2 章 导数与微分</b>        | 29 |
| 2.1 导数的概念                 | 29 |
| 2.2 求导法则                  | 31 |
| 2.3 高阶导数                  | 35 |
| 2.4 函数的微分                 | 37 |
| 第 2 章复习题                  | 38 |
| <b>第 3 章 微分中值定理与导数的应用</b> | 45 |
| 3.1 微分中值定理                | 45 |
| 3.2 洛必达法则                 | 47 |
| 3.3 函数的单调性                | 49 |
| 3.4 函数的极值与最值              | 51 |
| 3.5 曲线的凹凸性与拐点             | 54 |
| 第 3 章复习题                  | 57 |

|                    |     |
|--------------------|-----|
| <b>第4章 不定积分</b>    | 65  |
| 4.1 不定积分的概念与性质     | 65  |
| 4.2 换元积分法          | 68  |
| 4.3 分部积分法          | 72  |
| 第4章复习题             | 75  |
| <b>第5章 定积分及其应用</b> | 79  |
| 5.1 定积分的概念与性质      | 79  |
| 5.2 微积分的基本公式       | 81  |
| 5.3 定积分的换元法和分部积分法  | 83  |
| 5.4 广义积分           | 85  |
| 5.5 定积分的应用         | 87  |
| 第5章复习题             | 91  |
| <b>第6章 常微分方程</b>   | 99  |
| 6.1 微分方程的基本概念      | 99  |
| 6.2 一阶微分方程         | 101 |
| 6.3 可降阶的二阶微分方程     | 104 |
| 6.4 二阶线性微分方程的解法    | 106 |
| 6.5 二阶常系数线性微分方程的解法 | 108 |
| 第6章复习题             | 111 |
| <b>第7章 无穷级数</b>    | 115 |
| 7.1 常数项级数的概念和性质    | 115 |
| 7.2 常数项级数的收敛法则     | 117 |
| 7.3 幂级数            | 120 |
| 7.4 泰勒级数 函数展开成幂级数  | 121 |
| 7.5 傅里叶级数          | 122 |
| 第7章复习题             | 123 |
| <b>第8章 多元函数微分学</b> | 128 |
| 8.1 多元函数的基本概念      | 128 |
| 8.2 偏导数与全微分        | 130 |
| 8.3 多元复合函数的求导法则    | 132 |

|                |     |
|----------------|-----|
| 第 8 章复习题 ..... | 134 |
| 综合训练一 .....    | 138 |
| 综合训练二 .....    | 143 |
| 综合训练三 .....    | 150 |
| 综合训练四 .....    | 156 |
| 综合训练五 .....    | 162 |



# 第 1 章 函数、极限与连续

## 1.1 函 数

### 一、选择题

1. 下列函数  $f(x)$  与  $g(x)$  表示同一函数的是( ).

A.  $f(x) = x^2, g(x) = \sqrt{x^4}$

B.  $f(x) = x, g(x) = (\sqrt{x})^2$

C.  $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}, g(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

D.  $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}, g(x) = x+1$

2. 函数  $f(x) = \sin \frac{1}{\sqrt{x}}$  的定义域为( ).

A.  $(-\infty, 0)$

B.  $(-\infty, 0]$

C.  $(0, +\infty)$

D.  $[0, +\infty)$

3. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1, \\ x + \frac{6}{x} - 6, & x > 1, \end{cases}$  则  $f[f(-3)] = ( )$ .

A.  $\frac{11}{3}$

B. 9

C.  $\frac{2}{3}$

D. 6

4. 设函数  $y = 1 + \ln(x+3)$ , 则此函数的反函数是( ).

A.  $y = e^{x+3} - 3$

B.  $y = e^{x-1} - 3$

C.  $x = \ln(y-1) - 3$

D.  $y = \ln(x-1) - 3$

5. 函数  $y = \sqrt{x-2} + 1 (x \geq 2)$  的反函数是( ).

A.  $y = 2 - (x-1)^2 (x \geq 2)$

B.  $y = 2 + (x-1)^2 (x \geq 2)$

C.  $y = 2 - (x-1)^2 (x \geq 1)$

D.  $y = 2 + (x-1)^2 (x \geq 1)$

6. 函数  $f(x) = \frac{1}{1+x}$  在其定义域内是( ).

- A. 有界函数  
B. 无界函数  
C. 奇函数  
D. 偶函数

7. 下列函数中为奇函数的是( ).

- A.  $f(x) = \frac{\sin x}{x^2}$   
B.  $f(x) = xe^{-\frac{2}{x}}$   
C.  $f(x) = \frac{2^x - 2^{-x}}{2} \sin x$   
D.  $f(x) = x^2 \cos x + x \sin x$

8. 已知函数  $f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的奇函数. 若  $f(x)$  的最小正周期为 4, 且  $f(1) > 0$ ,

$f(3) = \frac{m-3}{m+1}$ , 则  $m$  的取值范围是( ).

- A.  $-3 < m < 1$   
B.  $m > 1$  或  $m < -3$   
C.  $-1 < m < 3$   
D.  $m > 3$  或  $m < -1$

## 二、填空题

- 函数  $f(x) = \sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{4 - x^2}$  的定义域是\_\_\_\_\_.
- 若函数  $f(x) = x(x+a)$  为偶函数, 则  $a =$ \_\_\_\_\_.
- 已知在  $\mathbf{R}$  上的奇函数  $f(x)$  满足  $f(x+3) = f(x)$ , 则  $f(6) =$ \_\_\_\_\_.
- 函数  $f(x) = x^2 - 5x + 4$  在\_\_\_\_\_内单调减少, 在\_\_\_\_\_内单调增加.
- $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 1 \\ 1 - x, & x < 1 \end{cases}$ , 则  $f[f(-2)] =$ \_\_\_\_\_.

## 三、解答题

1. 求下列函数的定义域.

(1)  $f(x) = \sqrt{3-x} + \ln(x-2)$ ;

(2)  $f(x) = \arcsin \frac{x+1}{2} + \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ ;

(3)  $y = \arcsin|x-2| + \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}$ ;

(4)  $f(x) = \frac{x-1}{\ln x} + \sqrt{16-x^2}$ .

2. 作出下列函数的图像.

$$(1) y = |x - 2| \cdot (x + 1); \quad (2) y = \begin{cases} x + 1, & x \geq 3 \\ x^2 - 5, & x < 3 \end{cases}.$$

3. 指出下列函数由哪些简单函数复合而成.

$$(1) y = \sin(x^2 + 1); \quad (2) y = \ln[\sin(x + 5)];$$

$$(3) y = e^{\cos 2x}; \quad (4) y = \arctan(\ln x).$$

4. 设  $f(x) = 3^x$ ,  $g(x) = \sqrt{x}$ , 求

$$(1) f[g(x)]; \quad (2) g[f(x)].$$

5. 已知  $f(x)$  是一次函数, 且  $f(f(x)) = 4x + 3$ , 求  $f(x)$  的解析式.

6. 已知  $f(x)$  是偶函数,  $g(x)$  是奇函数, 且  $f(x) + g(x) = \frac{1}{x-1}$ , 求  $f(x)$  和  $g(x)$  的解析式.

7. 求下列函数的反函数.

(1)  $y = e^{2x}$ ;

(2)  $y = \ln 2x$ ;

(3)  $y = \frac{x-1}{x+1}$ ;

(4)  $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ ;

(5)  $y = \sin 3x$ ;

(6)  $y = \arcsin 3x$ .

8. 已知函数  $y = f(x)$  是增函数, 且存在反函数  $y = f^{-1}(x)$ . 证明: 反函数  $y = f^{-1}(x)$  是增函数.

9. 判断函数  $f(x) = -x^3 + 1$  的单调性.

10. 已知函数  $f(x)$  的定义域为  $[-1, 3]$ , 求  $f(x+1)$ ,  $f(x^2)$  的定义域.

11. 一工厂生产某种零件, 每个零件的成本为 40 元, 出厂单价为 60 元, 该厂为鼓励销售商订购, 决定当一次订购量超过 100 个时, 每多订购 1 个, 订购的全部零件的单价就降低 0.02 元, 但最低出厂单价不低于 51 元.

(1) 一次订购量为多少个时, 零件的实际出厂价恰好为 51 元?

(2) 设一次订购量为  $x$  个时, 零件的实际出厂价为  $p$  元, 写出  $p = f(x)$ ;

(3) 当销售商一次订购量分别为 500, 1 000 个时, 该工厂的利润分别为多少? (一个零件的利润 = 实际出厂价 - 成本)

## 1.2 函数的极限

### 一、选择题

1. 函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处左、右极限均存在是  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  存在的( ).

- A. 充分条件                      B. 必要条件  
C. 充要条件                      D. 无关条件

2. 下列极限不存在的是( ).

- A.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{3x^2 + 1}$                       B.  $\lim_{x \rightarrow 1} (4x + 1)$   
C.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x$                       D.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x$

3. 设  $f(x) = \begin{cases} x+2, & x \leq 0 \\ 3x^2-2, & x > 0 \end{cases}$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = ( )$ .

- A. 2                      B. -2  
C. -1                      D. 0

4. 设  $f(x) = |x|$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = ( )$ .

- A. -1                      B. 1  
C. 0                      D. 不存在

5. 设  $f(x) = |x-5|$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = ( )$ .

- A. -5                      B. 5  
C. 0                      D. 不存在

### 二、解答题

1. 写出下列数列的前四项.

(1)  $x_n = \frac{1}{5^n}$ ;

(2)  $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ ;

(3)  $x_n = 1 - \frac{1}{3^n}$ ;

(4)  $x_n = \frac{2n+1}{n^2}$ .

2. 观察下列数列当  $n \rightarrow \infty$  时的极限.

$$(1) x_n = \frac{n}{n+1};$$

$$(2) x_n = \frac{1}{3^n};$$

$$(3) x_n = 2n+1;$$

$$(4) x_n = (-1)^n.$$

3. 作出下列函数的图像, 并判断其极限.

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x;$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow -\infty} 3^x;$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x);$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \pi} (\cos x).$$

$$4. \text{ 求 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + (-1)^n}{2}.$$

$$5. \text{ 求 } \lim_{x \rightarrow \infty} \sin x.$$

6. 判断下列函数在点  $x = 1$  处的极限是否存在, 如果存在, 请写出极限值.

$$(1) f(x) = \begin{cases} 3x-1, & x \leq 1 \\ x+1, & x > 1 \end{cases}; \quad (2) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \leq 1 \\ x^2-2, & x > 1 \end{cases}.$$

7. 设函数  $f(x) = \begin{cases} x^2+2x, & x \leq 0 \\ x, & 0 < x < 1 \\ x-2, & x \geq 1 \end{cases}$ , 试讨论当  $x \rightarrow -1, x \rightarrow 0, x \rightarrow 1, x \rightarrow 2$  时, 函

数  $f(x)$  的极限.

8. 设函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ , 试讨论当  $x \rightarrow 0$  时, 函数  $f(x)$  的极限.

9. 设函数  $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}}, & x < 0 \\ a + \sin x, & x \geq 0 \end{cases}$ , 问  $a$  为何值时  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  存在?

## 1.3 极限的运算

## 一、选择题

1.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ , 则必有( ).

A.  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \infty$

B.  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = 0$

C.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x) + g(x)} = 0$

D.  $\lim_{x \rightarrow a} kf(x) = \infty (k \neq 0)$

2. 若  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 3$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = ( )$ .

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

3. 函数  $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & 0 < x \leq 1 \\ 2-x, & 1 < x \leq 3 \end{cases}$  在( )时极限为 1.

A.  $x \rightarrow \frac{1}{2}$

B.  $x \rightarrow 1$

C.  $x \rightarrow \frac{3}{2}$

D.  $x \rightarrow 2$

4.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8^x}{8^x - 5^x} = ( )$ .

A. 1

B.  $\frac{5}{8}$

C.  $\frac{8}{5}$

D. 0

5.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{x - 1} = 3$ , 则  $a, b$  分别为( ).

A. 1, 1

B. -1, -2

C. -2, 1

D. 1, -2

6. 极限  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 3x + 2} = ( )$ .

A. -3

B. -2

C. 1

D. 2

7. 设  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x < 0 \\ 3^x, & x \geq 0 \end{cases}$ , 则下列等式正确的是( ).

A.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$

B.  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$

C.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 3$

D.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3$

## 二、解答题

1. 计算下列极限.

(1)  $\lim_{x \rightarrow 2} (-2);$

(2)  $\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - x^2 + x - 1);$

(3)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 16}{x - 4};$

(4)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3};$

(5)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + x + 1}{x^3 + 2x^2 - 1};$

(6)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h};$

(7)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x - 1};$

(8)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1});$

$$(9) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^4 + 3x^2 - 10}{3x^4 + x^3 - x^2 + 1};$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x^2 + 5}{100x^2 + 15}.$$

2. 设函数  $f(x) = \begin{cases} e^x - 1, & x \leq 0 \\ 2x + b, & x > 0 \end{cases}$ , 要使极限  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  存在, 则  $b$  应取何值?

3. 设  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + x + 1}{x} - ax - b \right) = 0$ , 求  $a, b$  的值.

## 1.4 两个重要极限

### 一、选择题

1. 下列等式正确的是( ).

A.  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = 1$

B.  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 1$

C.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 1$

D.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 1$

2. 下列等式正确的是( ).

A.  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin x = 1$

B.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{3x^2 - x - 1} = 1$

C.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

D.  $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}} = \infty$

3. 下列等式正确的是( ).

A.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{2x} = e$

B.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{-x} = e$

C.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{1-x} = e$

D.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{-2x} = e$

4.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{x}{2}\right)^{\frac{3}{x}} = ( )$ .

A.  $e^{-\frac{3}{2}}$

B.  $e^{\frac{3}{2}}$

C.  $e^{-6}$

D.  $e^6$

5. 极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 2x} = ( )$ .

A. 1

B. 2

C.  $\frac{1}{2}$

D. 不存在

### 二、填空题

1. 已知  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-a}{x}\right)^x = 2$ , 则  $a =$  \_\_\_\_\_.

2. 若  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{-kx} = e^{-2}$ , 则  $k =$  \_\_\_\_\_.

3. 若  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{\sin 3x} = -2$ , 则  $a =$  \_\_\_\_\_.

4.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \sin x\right) =$  \_\_\_\_\_.

## 三、解答题

1. 计算下列极限.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{5x};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{\tan nx};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{3} \sin \frac{1}{x};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{2x};$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} x \cot x;$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x}.$$

2. 计算下列极限.

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x;$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2x}\right)^x;$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{1}{x}};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 3x)^{\frac{1}{x}};$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2-x}{2}\right)^{\frac{2}{x}-1};$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x+1}\right)^x.$$

## 1.5 无穷小与无穷大

### 一、选择题

1. 下列结论正确的是( ).

- A. 无穷小是很小的正数  
B. 无穷大是很大的数  
C. 无穷大的倒数是无穷小  
D. 一个很小的正数的倒数是无穷大

2. 当  $x \rightarrow 0$  时, 下列变量中( ) 是无穷小.

- A.  $x \sin \frac{1}{x}$   
B.  $\frac{1}{x} \sin x$   
C.  $\ln x^2$   
D.  $e^x$

3. 当  $x \rightarrow 0$  时, 下列函数中为无穷小的是( ).

- A.  $x + 2$   
B.  $x^2$   
C.  $(x + 1)^2$   
D.  $2^x$

4. 当  $x \rightarrow$  ( ) 时,  $y = \frac{x^2 - 1}{x(x - 1)}$  为无穷大.

- A. 0  
B. 1  
C.  $+\infty$   
D.  $-\infty$

5. 下列函数中, 当  $x \rightarrow 0$  时与  $e^{x^3} - 1$  等价的无穷小是( ).

- A.  $x^2 \sin x$   
B.  $3x^2$   
C.  $\sin x^2$   
D.  $\frac{x^3}{3}$

6. 设  $f(x) = 1 - x$ ,  $g(x) = 1 - \sqrt[3]{x}$ , 则当  $x \rightarrow 1$  时( ).

- A.  $f(x)$  是比  $g(x)$  高阶的无穷小  
B.  $f(x)$  是比  $g(x)$  低阶的无穷小  
C.  $f(x)$  与  $g(x)$  是同阶但不等价的无穷小  
D.  $f(x)$  与  $g(x)$  是等价无穷小

7. 当  $x \rightarrow 0$  时,  $\frac{1}{4}(\cos 3x - \cos x)$  是  $x^2$  的( ).

- A. 高阶无穷小  
B. 同阶但不等价无穷小  
C. 低阶无穷小  
D. 等价无穷小

8. 当  $x \rightarrow 0$  时, 下列选项中为  $x$  的高阶无穷小的是( ).

- A.  $\sin 2x$   
B.  $\sqrt{1-x} - 1$   
C.  $\cos x - 1$   
D.  $\ln(1 - 5x)$

9. 当  $x \rightarrow 0$  时, 与  $2\sin x^2 + 3x^6$  等价的无穷小是( ).

A.  $x^6$

B.  $2x^2$

C.  $x^2$

D.  $3x^6$

## 二、解答题

1. 下列变量在给定的变化过程中, 哪些是无穷小? 哪些是无穷大?

(1)  $y = \frac{1+2x}{x^2} (x \rightarrow 0);$

(2)  $y = \frac{x+1}{x^2-9} (x \rightarrow 3);$

(3)  $y = 2^{-x} - 1 (x \rightarrow 0);$

(4)  $y = \ln x (x \rightarrow 0^+).$

2. 计算下列极限.

(1)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1};$

(2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\sin 5x};$

(3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{2x};$

(4)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x}.$

3. 当  $x \rightarrow 0$  时,  $(1+x^2)^k - 1$  与  $1 - \cos x$  为等价无穷小, 求  $k$  的值.

4. 比较下列各组无穷小的阶.

(1)  $1-x$  与  $\frac{1}{2}(1-x^2)$  ( $x \rightarrow 1$ );

(2)  $\sin 2x - \tan 2x$  与  $x$  ( $x \rightarrow 0$ );

(3)  $1-x$  与  $1-\sqrt[3]{x}$  ( $x \rightarrow 1$ );

(4)  $1 - \cos 2x$  与  $x^2$  ( $x \rightarrow 0$ ).

## 1.6 函数的连续性

### 一、选择题

1. 下列说法正确的是( ).

- A. 若函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处连续, 则  $f(x)$  在点  $x_0$  处必有极限
- B. 若函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处有极限, 则  $f(x)$  在点  $x_0$  处必连续
- C. 若函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处连续, 则  $f(x)$  在点  $x_0$  处不一定有极限
- D. 以上说法都不正确

2. 函数  $f(x)$  在  $(-1, 1)$  内有定义, 且  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2, f(0) = 0$ , 则( ).

- A.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  不存在
- B.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  存在, 但不等于零
- C.  $f(x)$  在点  $x = 0$  处不连续
- D.  $f(x)$  在点  $x = 0$  处连续

3. 如果函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处连续, 并且在点  $x_0$  的某个去心邻域内  $f(x) > 0$ , 那么( ).

- A.  $f(x_0) \geq 0$
- B.  $f(x_0) > 0$
- C.  $f(x_0) = 0$
- D.  $f(x_0) < 0$

4. 若函数  $f(x) = \begin{cases} 3e^x, & x \leq 0 \\ \frac{\sin x}{x} + a, & x > 0 \end{cases}$  在点  $x = 0$  处连续, 则  $a =$  ( ).

- A. 0
- B. 1
- C. 2
- D. 3

5. 已知  $f(x) = \begin{cases} (1+2x)^{\frac{1}{x}}, & x \neq 0 \\ k, & x = 0 \end{cases}$  在点  $x = 0$  处连续, 则  $k =$  ( ).

- A.  $e$
- B.  $e^{\frac{1}{2}}$
- C.  $e^2$
- D. 1

6. 设函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{2\,019}{x} \sin x + x \sin \frac{2\,020}{x}, & x < 0 \\ a - 1, & x = 0 \\ (1-x)^{\frac{b}{x}}, & x > 0 \end{cases}$  在  $(-\infty, +\infty)$  内连续, 则

$a + b =$  ( ).

- A.  $2\,021 + \ln 2\,020$
- B.  $2\,021 - \ln 2\,020$
- C.  $2\,020 + \ln 2\,019$
- D.  $2\,020 - \ln 2\,019$

7. 函数  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 6x + 8}$  的第二类间断点为( ).

- A.  $x = -4$                       B.  $x = 4$                       C.  $x = 2$                       D.  $x = -2$

8. 对于函数  $y = \frac{x^2 - 4}{x(x - 2)}$ , 以下结论中正确的是( ).

- A.  $x = 0$  是第一类间断点,  $x = 2$  是第二类间断点  
 B.  $x = 0$  是第二类间断点,  $x = 2$  是第一类间断点  
 C.  $x = 0$  是第一类间断点,  $x = 2$  也是第一类间断点  
 D.  $x = 0$  是第二类间断点,  $x = 2$  也是第二类间断点

9. 设  $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}-1} - 1}{e^{\frac{1}{x}-1} + 1}$ , 则  $x = 0$  是  $f(x)$  的( ).

- A. 可去间断点                      B. 跳跃间断点  
 C. 第二类间断点                      D. 连续点

## 二、填空题

1. 若当  $x \neq 0$  时,  $f(x) = \frac{1 - \sqrt{1+x}}{x}$ , 且  $f(x)$  在点  $x = 0$  处连续, 则  $f(0) =$  \_\_\_\_\_.

2. 设函数  $f(x)$  在区间  $(-\infty, +\infty)$  内连续, 且  $f(x) = \frac{3^x - 2^x}{x} (x > 0)$ , 则  $f(0) =$  \_\_\_\_\_.

3. 设函数  $f(x) = \begin{cases} e^{x^2}, & x \leq 1 \\ ax, & x > 1 \end{cases}$ , 当  $a =$  \_\_\_\_\_ 时, 函数  $f(x)$  在点  $x = 1$  处连续.

4. 设函数  $f(x) = \frac{\sin x}{x(x+3)}$ , 则  $x =$  \_\_\_\_\_ 是可去间断点.

5. 设  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上连续, 且  $f(2) = 3$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{x} f\left(\frac{\sin 2x}{x}\right) =$  \_\_\_\_\_.

## 三、解答题

1. 讨论函数  $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \geq 0 \\ x + 1, & x < 0 \end{cases}$  在点  $x = 0$  处的连续性.

2. 确定常数  $a, b$  的值, 使函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{x+a}{x^2+1}, & x < 0 \\ b, & x = 0 \\ \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x, & x > 0 \end{cases}$  在点  $x = 0$  处连续.

3. 讨论函数  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x$  的连续性, 若有间断点, 判断其类型.

4. 求下列各极限.

(1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x;$

(2)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x-1}{x^2-2x-3};$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 1} \ln(2x^2 + 1);$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \ln(\sin x).$$

5. 证明: 方程  $x^3 - 4x^2 + 1 = 0$  在区间  $(0, 1)$  内至少有一个根.

6. 设函数  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 且  $f(0) \neq 0, 0 < f(1) < 1$ . 证明: 存在  $x_0 \in (0, 1)$ , 使得  $f^2(x_0) = x_0$ .

7. 证明: 方程  $xe^x = 2$  在区间  $(0, 1)$  内有且仅有一个实根.

8. 设函数  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 且  $f(x) \geq 0, f(0) = f(1) = 0$ . 证明: 对任意实数  $a (0 < a < 1)$ , 必有实数  $\xi \in [0, 1]$ , 使得  $f(\xi) = f(\xi + a)$ .

9. 证明: 方程  $x \ln(1 + x^2) = 2$  有且仅有一个小于 2 的正实根.

## 第1章复习题

## 一、选择题

1. 函数  $f(x) = \sqrt{2^x - 1} + \arctan \frac{1}{x-1}$  的定义域为( ).

- A.  $[0, 1)$  B.  $(1, +\infty)$   
C.  $[0, 1) \cup (1, +\infty)$  D.  $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

2. 已知函数  $f(x+1)$  的定义域为  $[2, 5]$ , 则函数  $y = \frac{f(3x)}{\sqrt{\log_2(4-x^2)}}$  的定义域为( ).

- A.  $[1, +\infty)$  B.  $[1, \sqrt{3})$   
C.  $(1, +\infty)$  D.  $[\frac{1}{3}, \sqrt{3})$

3. 下列命题中为真命题的是( ).

① 函数  $y = \frac{1}{2} \ln \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$  与  $y = \ln \tan \frac{x}{2}$  是同一函数;

② 若函数  $y = f(x)$  与  $y = g(x)$  的图像关于直线  $y = x$  对称, 则函数  $y = f(2x)$  与  $y = \frac{1}{2}g(x)$  的图像也关于直线  $y = x$  对称;

③ 若奇函数  $f(x)$  对定义域内的任意  $x$  都有  $f(x) = f(2-x)$ , 则  $f(x)$  为周期函数.

- A. ①② B. ①③  
C. ②③ D. ②

4. 下列函数中既是偶函数又在  $(0, +\infty)$  内单调减少的是( ).

- A.  $f(x) = e^x - 1$  B.  $f(x) = x + \frac{1}{x}$   
C.  $f(x) = \frac{1}{x^4}$  D.  $f(x) = \lg|x|$

5. 设函数  $y = 2 + \ln(x+3)$ , 则此函数的反函数是( ).

- A.  $y = e^{2x+3} - 3$  B.  $y = e^{x-2} - 3$   
C.  $x = \ln(y-2) - 3$  D.  $y = \ln(x-2) - 3$

6. 函数  $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & 0 < x \leq 1 \\ 2-x, & 1 < x \leq 3 \end{cases}$  在( ) 时极限为 1.

- A.  $x \rightarrow \frac{1}{2}$  B.  $x \rightarrow 1$  C.  $x \rightarrow \frac{3}{2}$  D.  $x \rightarrow 2$

7. 当  $x \rightarrow 0$  时, 下列变量中与  $x$  是等价无穷小的是( ).

- A.  $\sin^{\frac{1}{2}} x$  B.  $\ln(1+x)$   
C.  $\cos x$  D.  $2x^2 - x$

8. 下列式子中正确的是( ).

- A.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 1$  B.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \sin x = 1$   
C.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} = 1$  D.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} = 1$

9.  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2\sin x)^{\frac{2}{\sin x}} = ( )$ .

- A.  $e$  B.  $e^2$   
C.  $e^4$  D. 1

10. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} a + \ln x, & x \geq 1 \\ 2ax - 1, & x < 1 \end{cases}$  在点  $x = 1$  处连续, 则  $a = ( )$ .

- A. 1 B. -1  
C. 0 D. 3

11. 要使函数  $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x > 0 \\ a + x^2, & x \leq 0 \end{cases}$  在  $(-\infty, +\infty)$  内连续, 则  $a = ( )$ .

- A. 1 B. 0  
C. 任意实数 D. 不存在

12. 关于函数  $f(x)$ , 下列说法错误的是( ).

- A. 当  $x \rightarrow 0$  时,  $f(x)$  是无穷小, 则  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$   
B. 若函数在点  $x = 0$  处存在极限, 则函数在点  $x = 0$  处连续  
C. 若  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$ , 则  $f(x)$  在点  $x = 0$  处连续  
D. 若  $f(x) = \frac{5}{x-3}$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \infty$

13. 函数  $f(x) = \frac{x-4}{x^2-3x-4}$  间断点的个数为( ).

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

14.  $x = 0$  是函数  $f(x) = \frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$  的( ).

- A. 连续点 B. 可去间断点  
C. 跳跃间断点 D. 第二类间断点

## 二、填空题

1. 函数  $f(x) = \arcsin \frac{x-1}{3} - \frac{1}{\sqrt{16-x^2}}$  的定义域为\_\_\_\_\_.
2. 设  $f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的奇函数, 且当  $x \geq 0$  时,  $f(x) = \log_2(x+1) + m + 1$ , 则  $f(-3) =$ \_\_\_\_\_.
3.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x} =$ \_\_\_\_\_.
4. 已知极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x - \sqrt{ax^2 - x + 1})$  存在, 则  $a$  的值为\_\_\_\_\_.
5. 若函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 3x}{x}, & x < 0 \\ k, & x = 0 \\ 3x^2 + x + 3, & x > 0 \end{cases}$  在点  $x = 0$  处连续, 则  $k =$ \_\_\_\_\_.
6. 设函数  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x|(x-1)}$ , 则  $f(x)$  的第一类间断点为\_\_\_\_\_.

## 三、判断题

1. 函数  $f(x) = x^2 + x + 1$  与函数  $g(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$  相同. ( )
2. 如果  $|f(x)| > M$  ( $M$  为一个常数), 则  $f(x)$  为无穷大. ( )
3. 如果数列有界, 则极限存在. ( )
4.  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = a, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ . ( )
5. 如果  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ , 则  $f(x) = A + \alpha$  (当  $x \rightarrow \infty$  时,  $\alpha$  为无穷小). ( )
6. 如果  $\alpha \sim \beta$ , 则  $\alpha - \beta = o(\alpha)$ . ( )
7. 当  $x \rightarrow 0$  时,  $1 - \cos x$  与  $x^2$  是同阶无穷小. ( )
8.  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} = 0$ . ( )
9.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ . ( )
10. 点  $x = 0$  是函数  $y = \frac{|x|}{x}$  的无穷间断点. ( )
11. 函数  $f(x) = \frac{1}{x}$  必在闭区间  $[a, b]$  上取得最大值、最小值. ( )

#### 四、解答题

1. 求函数  $y = \sqrt{x-2} + 1$  的反函数.

2. 判断函数  $f(x) = \frac{2x}{x-1}$  在区间  $(0, 1)$  内的单调性.

3. 求下列极限.

(1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - x}{\sin 3x + x};$

(2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2 - x \sin 2x + 4};$

(3)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+3}{x+6} \right)^{\frac{x-1}{2}};$

(4)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{(e^x - 1) \sin x};$

(5)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - \cos \pi x}{x^2 - 4x + 4};$

$$(6) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^2 + n - 1} + \frac{1}{n^2 + n - 2} + \cdots + \frac{1}{n^2 + n - n} \right).$$

4. 设  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \frac{f(x)}{x}} - 1}{x^2} = A (A \neq 0)$ , 试确定常数  $a, b$ , 使  $x \rightarrow 0$  时,  $f(x)$  与  $ax^b$  等价.

5. 设  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x}{1+x^{2n}}$ , 求  $f(x)$  的间断点并分类.

6. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{ax}{\sqrt{1+x}-1}, & x > 0 \\ 2b+1, & x = 0 \\ b+2\cos x, & x < 0 \end{cases}$  在点  $x=0$  处连续, 求实数  $a, b$ .

7. 证明: 方程  $x^5 - 2x^2 + x + 1 = 0$  在  $(-1, 1)$  内至少有一个实根.

8. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续,  $c, d \in (a, b)$ ,  $t_1 > 0, t_2 > 0$ . 证明: 在  $[a, b]$  内存在一点  $\xi$ , 使得  $(t_1 + t_2)f(\xi) = t_1f(c) + t_2f(d)$ .

9. 设函数  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 且  $f(1) = 1$ . 证明: 对于任意  $\lambda \in (0, 1)$ , 存在  $\xi \in (0, 1)$ , 使  $f(\xi) = \frac{\lambda}{\xi^2}$ .