

江西省普通高校专升本考试

专用教程	英语
	政治
	信息技术
	大学语文及应用文写作
	高等数学及其应用
考前冲刺卷	英语
	政治
	信息技术
	大学语文及应用文写作
	高等数学及其应用
历年真题	英语
	信息技术

江西省普通高校专升本考试考前冲刺卷·高等数学及其应用

主编 华腾新思专升本考试研究中心

国家开放大学出版社

华腾新思

江西省

主编 华腾新思专升本考试研究中心

普通高校专升本考试考前冲刺卷

高等数学
及其应用

赠册 参考答案及解析

ISBN 978-7-304-13308-5



9 787304 133085 >

定价: 35.00元

保护正版 打击盗版
欢迎举报 查实重奖

• 举报电话: (010) 68182820
• 举报邮箱: OUCP@ouchn.edu.cn



<http://www.crtvup.com.cn>

国家开放大学出版社

国家开放大学出版社

江西省普通高校专升本考试 考前冲刺卷 高等数学及其应用

主编 华腾新思专升本考试研究中心

国家开放大学出版社·北京

图书在版编目 (CIP) 数据

江西省普通高校专升本考试考前冲刺卷. 高等数学及其
应用 / 华腾新思专升本考试研究中心主编. -- 北京 :
国家开放大学出版社, 2025. 8. -- ISBN 978-7-304-
-13308-5

I. G724.4

中国国家版本馆 CIP 数据核字第 2025TT7577 号

版权所有, 翻印必究。

江西省普通高校专升本考试考前冲刺卷·高等数学及其应用

JIANGXI SHENG PUTONG GAOXIAO ZHUANSHENGBEN KAOSHI KAOQIAN CHONGCIJUAN · GAODENG
SHUXUE JIQI YINGYONG

主编 华腾新思专升本考试研究中心

出版·发行: 国家开放大学出版社

电话: 营销中心 010-68180820

总编室 010-68182524

网址: <http://www.crtvup.com.cn>

地址: 北京市海淀区西四环中路 45 号

邮编: 100039

经销: 新华书店北京发行所

策划编辑: 初晓非

版式设计: 张瑞阳

责任编辑: 杜建伟

责任校对: 王玉婷

责任印制: 陈晨 王雅

印刷: 三河市骏杰印刷有限公司

版本: 2025 年 8 月第 1 版

2025 年 8 月第 1 次印刷

开本: 787mm×1092mm 1/8

印张: 5.25 字数: 109 千字

书号: ISBN 978-7-304-13308-5

定价: 35.00 元

(如有缺页或倒装, 本社负责退换)

意见及建议: OUCP_ZYJY@ouchn.edu.cn

前 言

目 录

江西省普通高校专升本考试（以下简称江西专升本考试）是广大考生提升学历、实现自我价值的重要途径，报考人数众多，竞争日益激烈。尤其是实行统考以来，江西专升本考试呈现出一些新的趋势：题型灵活多变，更加注重对基础知识、应用能力及考生的综合素质的考查。

数学作为江西专升本考试的专业基础课之一，一直都是考生备考的重点。为了帮助广大考生系统、全面、精准、高效地复习、备考，我们特组织具有丰富教研经验的教研员，以江西专升本考试数学科目的考试大纲为依据，深入研究近几年考试的命题情况，紧密结合考生的学习特点，精心编写了这本考前冲刺卷。

本书以江西专升本考试数学科目的最新大纲及考试真题为依据进行编写，题型、题量、难度等与考试要求高度一致。考生利用本书可以更好地把握考情，强化对基础知识的理解与运用，学习必备的应试技巧，切实提高应试能力。

以下是对本书使用方法的一些建议：

（1）限时完成。尽量按照考试规定的时间，在相对封闭的环境中一次性完成整份试卷的作答，以提前熟悉考场上的答题节奏，最大限度地模拟考试。

（2）遵循答题原则。作答试卷时，遵循先易后难、先小题后大题、先熟题后生题等原则，以保证基础分为主，确保会做的题不丢分，不留遗憾。

（3）及时复盘。作答完一套试卷后，充分利用本书的《参考答案及解析》赠册核对答案、计算成绩，并根据其所提供的解析深入理解考点，查漏补缺、举一反三。

专升本考试是人生道路上的一次重要挑战，也是实现梦想的一次宝贵机会。祝愿考生朋友们在即将到来的考试中取得优异成绩，圆梦本科院校！

华腾新思专升本考试研究中心

考前冲刺卷（一）	共 4 页
考前冲刺卷（二）	共 4 页
考前冲刺卷（三）	共 4 页
考前冲刺卷（四）	共 4 页
考前冲刺卷（五）	共 4 页
考前冲刺卷（六）	共 4 页
考前冲刺卷（七）	共 4 页
考前冲刺卷（八）	共 4 页
考前冲刺卷（九）	共 4 页
考前冲刺卷（十）	共 4 页
考前冲刺卷（十一）	共 4 页
考前冲刺卷（十二）	共 4 页
考前冲刺卷（十三）	共 4 页
考前冲刺卷（十四）	共 4 页
考前冲刺卷（十五）	共 4 页
考前冲刺卷（十六）	共 4 页
考前冲刺卷（十七）	共 4 页
考前冲刺卷（十八）	共 4 页
考前冲刺卷（十九）	共 4 页
考前冲刺卷（二十）	共 4 页

考前冲刺卷(一)

一、单项选择题(本大题共 10 小题,每小题 5 分,共 50 分)

1. 若 $F'(x) = \Phi'(x)$, 则下列成立的是().
- A. $F(x) - \Phi(x) = 0$ B. $F(x) - \Phi(x) = C$
- C. $\int F(x) dx = \int \Phi(x) dx$ D. $\frac{d}{dx} \left[\int F(x) dx \right] = \frac{d}{dx} \left[\int \Phi(x) dx \right]$
2. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 下列函数中前者与后者是等价无穷小的是().
- A. $2x - x^2$ 与 $x^2 - x^3$ B. $1 - \cos x$ 与 x^2
- C. $1 - \cos x$ 与 $2 \sin x^2$ D. $\tan x$ 与 $\sin x$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} 2^{\frac{1}{x}} = (\quad)$.
- A. 0 B. $+\infty$
- C. ∞ D. 不存在
4. $\varphi(x) = \int_0^{x^2} \sin t^2 dt$, 则 $\varphi'(x) = (\quad)$.
- A. $\sin x^4$ B. $2x \sin x^4$
- C. $\cos x^4$ D. $2x \cos x^4$
5. 设 $x_1 = 1, x_2 = 2$ 都是函数 $y = a \ln x + bx^2 + 3x$ 的极值点, 则().
- A. $a = 2, b = \frac{1}{2}$ B. $a = -2, b = \frac{1}{2}$
- C. $a = 2, b = -\frac{1}{2}$ D. $a = -2, b = -\frac{1}{2}$
6. 若 $\int_a^b f(x) dx = 2, \int_a^b g(x) dx = 1$, 则 $\int_a^b [3f(x) - 2g(x)] dx = (\quad)$.
- A. 1 B. 2
- C. 3 D. 4
7. 函数 $f(x) = \int_2^x e^{-t} dt$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内().
- A. 单调减少, 曲线为凹的 B. 单调减少, 曲线为凸的
- C. 单调增加, 曲线为凹的 D. 单调增加, 曲线为凸的
8. 下列说法正确的是().
- A. $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 连续, 则 $f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0)$ 均存在
- B. $f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0)$ 均存在, 则 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 连续
- C. $f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0)$ 均存在, 则 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 可微
- D. $f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0)$ 在点 (x_0, y_0) 连续, 则 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 连续

9. 方程 $y'' - 4y' + 4y = 0$ 的两个线性无关的解为().

- A. e^{2x} 与 $e^{2x} + 1$ B. e^{2x} 与 Ce^{2x}
- C. e^{2x} 与 xe^{2x} D. $3e^{2x}$ 与 $-e^{2x}$

10. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + a, & x < 0, \\ 1, & x = 0, \\ b - \cos x, & x > 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续, 则 a 和 b 的值为().

- A. $a = 1, b = 2$ B. $a = 1, b = -2$
- C. $a = -1, b = 2$ D. $a = -1, b = -2$

二、判断题(本大题共 5 小题,每小题 5 分,共 25 分,正确的打“√”,错误的打“×”)

11. 微分方程 $y'' - 2y' - 8y = 0$ 的通解为 $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{4x}$. ()
12. 函数 $y = x^3 - 3x^2 + 2$ 的极大值点是 $x = 2$. ()
13. 设 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{kx} = e^2$, 则 $k = 6$. ()
14. 设点 $(1, a)$ 是曲线 $y = ax^3 - x^2 - 2x + 3$ 的拐点, 则 $a = \frac{1}{2}$. ()
15. 已知函数 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上连续, 且 $\int_1^{1-2x} f(t) dt = x^2$, 则 $f(x) = \frac{x-1}{2}$. ()

三、填空题(本大题共 5 小题,每小题 5 分,共 25 分)

16. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) = \underline{\hspace{2cm}}$.
17. 设 $f(x)$ 为连续函数, 则 $\int f^2(x) df(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.
18. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin t^2 dt}{x^3} = \underline{\hspace{2cm}}$.
19. $x = 1$ 为函数 $y = \frac{x^4 - 1}{x^3 - 1}$ 的 间断点.
20. 微分方程 $y' = \frac{y}{x}$ 满足初始条件 $y|_{x=1} = 2$ 的特解是 .

四、解答题(本大题共 6 小题,第 21~25 题每小题 8 分,第 26 题 10 分,共 50 分)

21. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x^2 - 1} \right)^x$.

22. 设 $z = xf\left(\frac{y}{x}\right)$, 若 $f(u)$ 可微, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

23. 设由方程 $e^y + x + 2 = \sin(x+y)$ 确定了一个隐函数 $y=y(x)$, 求 $\frac{dy}{dx}$.

24. 求由参数方程 $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t - t \cos t \end{cases}$ 所确定的函数 $y=y(x)$ 的二阶导数 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=\frac{\pi}{3}}$.

25. 求 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ 的极值和单调区间.

26. 求 $\iint_D \ln(x^2 + y^2) dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$.

考前冲刺卷(二)

一、单项选择题(本大题共 10 小题,每小题 5 分,共 50 分)

1. 下列函数对中,互为反函数的是().

A. $y = \sin x, y = \cos x$

B. $y = 3^x, y = 3^{-x}$

C. $y = \tan x, y = \cot x$

D. $y = x^3, y = \sqrt[3]{x}$

2. 当 $x \rightarrow 0$ 时,下列函数为无穷小量的是().

A. $\frac{\sin x}{x}$

B. $x \sin x$

C. $\frac{\cos x}{x}$

D. $1 - \sin x$

3. 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} = ()$.

A. 0

B. $\frac{1}{2}$

C. 1

D. 2

4. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$ 的拐点是().

A. (0, 3)

B. 0

C. 1

D. (1, 1)

5. 若函数 $f(x) = x^{2020} + 2020x$, 则 $f'(1) = ()$.

A. 2020

B. 3030

C. 4040

D. 5050

6. 已知 3^x 是函数 $f(x)$ 的一个原函数, 则 $f(x) = ()$.

A. 3^x

B. $3^x \ln 3$

C. $x3^{x-1}$

D. $\frac{3^x}{\ln 3}$

7. 函数 $y = 2x^3 + 3x^2 + 1$ 的极小值点是().

A. $x = -1$

B. $x = 0$

C. $x = 1$

D. $x = 2$

8. 已知函数 $z = \ln(x+y)$, 则与其他三项不相等的选项是().

A. $\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}$

B. $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

C. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

D. $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

9. 下列定积分结果最小的是().

A. $\int_0^1 \sin x^2 dx$

B. $\int_0^1 \tan x dx$

C. $\int_0^1 x dx$

D. $\int_0^1 x^2 dx$

10. 设区域 $D: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$, 则 $\iint_D 2 dx dy = ()$.

A. 6π

B. 15π

C. 4π

D. 2π

二、判断题(本大题共 5 小题,每小题 5 分,共 25 分,正确的打“√”,错误的打“×”)

11. 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin 3x} = \frac{1}{3}$. ()

12. 函数 $y = 3x^3 - 3x^2 + 2$ 的极大值点是 $x = -1$. ()

13. 已知 $f(x) = \begin{cases} |x-2|, & x \leq 2, \\ 0, & x > 2, \end{cases}$ 则 $f(f(3)) = 2$. ()

14. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} a \sin^2 x, & x < 0, \\ 2x^2 + 3, & x \geq 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 则 $a=1$. ()

15. 已知 $y = e^{2x} + \cos(x+1)$, 则微分 $dy = [2e^{2x} - \sin(x+1)] dx$. ()

三、填空题(本大题共 5 小题,每小题 5 分,共 25 分)

16. 函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x}{x}, & x > 0, \\ x^2 + a, & x \leq 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

17. 设 $z = z(x, y)$ 由方程 $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0$ 确定, 则 z 对 x 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x} = \underline{\hspace{2cm}}$.

18. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-2}{x+1} \right)^{2x} = \underline{\hspace{2cm}}$.

19. 交换二次积分的积分次序 $\int_0^1 dx \int_{x^2}^x f(x, y) dy = \underline{\hspace{2cm}}$.

20. 微分方程 $y'' + y = 0$ 的通解为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

四、解答题(本大题共 6 小题,第 21~25 题每小题 8 分,第 26 题 10 分,共 50 分)

21. 计算 $\int \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx$.

22. $\int_{e^2}^{e^5} \frac{1}{x \ln x} dx.$

23. 计算 $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, 其中 D 是由不等式 $1 \leq x^2 + y^2 \leq e^2$ 所表示的区域.

24. 设曲线 $y=f(x)$ 与 $y=\sin 2x$ 在原点相切, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{nf\left(\frac{4}{n}\right)}.$

25. 求微分方程 $y'' - 4y' - 12y = 0$ 满足初始条件 $y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = 8$ 的特解.

26. 改变二次积分 $I = \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_x^{2x} e^{y^2} dy + \int_{\frac{1}{2}}^1 dx \int_x^1 e^{y^2} dy$ 的积分次序, 并计算 I .

(赠册)

江西省普通高校专升本考试

考前冲刺卷

高等数学及其应用

参考答案及解析

国家开放大学出版社·北京

目 录

考前冲刺卷(一)参考答案及解析	1
考前冲刺卷(二)参考答案及解析	3
考前冲刺卷(三)参考答案及解析	6
考前冲刺卷(四)参考答案及解析	9
考前冲刺卷(五)参考答案及解析	13
考前冲刺卷(六)参考答案及解析	15
考前冲刺卷(七)参考答案及解析	18
考前冲刺卷(八)参考答案及解析	21
考前冲刺卷(九)参考答案及解析	25
考前冲刺卷(十)参考答案及解析	28
考前冲刺卷(十一)参考答案及解析	31
考前冲刺卷(十二)参考答案及解析	35
考前冲刺卷(十三)参考答案及解析	38
考前冲刺卷(十四)参考答案及解析	41
考前冲刺卷(十五)参考答案及解析	44
考前冲刺卷(十六)参考答案及解析	48
考前冲刺卷(十七)参考答案及解析	50
考前冲刺卷(十八)参考答案及解析	54
考前冲刺卷(十九)参考答案及解析	57
考前冲刺卷(二十)参考答案及解析	59

考前冲刺卷(一)参考答案及解析

一、单项选择题

1.【答案】B

【解析】依据不定积分的概念知,原函数之间差一个常数C.

2.【答案】D

【解析】因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\sin x} = 1$,所以 $\tan x$ 与 $\sin x$ 是等价无穷小.

3.【答案】D

【解析】因为 $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$,所以 $\lim_{x \rightarrow 0^-} 2^{\frac{1}{x}} = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} 2^{\frac{1}{x}} = +\infty$,故 $\lim_{x \rightarrow 0} 2^{\frac{1}{x}}$ 不存在.

4.【答案】B

【解析】 $\varphi'(x) = \sin x^4 \cdot 2x = 2x \sin x^4$,故选B.

5.【答案】D

【解析】 $y' = \frac{a}{x} + 2bx + 3$,依题意得 $y'|_{x=1} = 0$, $y'|_{x=2} = 0$,联立这两个方程,解得 $a = -2$, $b = -\frac{1}{2}$.

6.【答案】D

【解析】 $\int_a^b [3f(x) - 2g(x)] dx = 3 \int_a^b f(x) dx - 2 \int_a^b g(x) dx = 3 \times 2 - 2 \times 1 = 4$.

7.【答案】D

【解析】因为 $f'(x) = e^{-x}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内恒大于0,所以函数单调增加;因为 $f''(x) = -e^{-x}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内恒小于0,所以曲线是凸的.

8.【答案】D

【解析】A,B错误.因为由多元函数连续推不出其偏导数存在,反之也一样.C错误.因为由偏导数存在推不出函数可微.D正确,因为偏导数连续的函数一定可微,可微的函数一定连续.

9.【答案】C

【解析】微分方程的特征方程为 $r^2 - 4r + 4 = 0$,特征根为 $r_1 = r_2 = 2$,方程有线性无关解 $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = xe^{2x}$,故选C.

10.【答案】A

【解析】因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,所以 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$.又因为 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + a) = a$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (b - \cos x) = b - 1$, $f(0) = 1$,所以 $a = b - 1 = 1$,解得 $a = 1$, $b = 2$.

二、判断题

11.【答案】√

【解析】微分方程 $y'' - 2y' - 8y = 0$ 的特征方程为 $r^2 - 2r - 8 = 0$,特征根为 $r_1 = -2$, $r_2 = 4$,所以微分

方程的通解为 $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{4x}$.

12. 【答案】 \times

【解析】根据题意, $y' = 3x^2 - 6x$, $y'' = 6x - 6$. 令 $y' = 0$, 解得 $x = 2$ 或 $x = 0$. 因为 $y''|_{x=2} = 6 > 0$, $y''|_{x=0} = -6 < 0$, 所以 $x = 2$ 为极小值点, $x = 0$ 为极大值点.

13. 【答案】 \checkmark

【解析】因为 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{kx} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{3x \cdot \frac{k}{3}} = e^{\frac{k}{3}} = e^2$, 所以 $k = 6$.

14. 【答案】 \times

【解析】因为点 $(1, a)$ 是曲线 $y = ax^3 - x^2 - 2x + 3$ 的拐点, 所以 $y''|_{x=1} = (6ax - 2)|_{x=1} = 6a - 2 = 0$, 解得 $a = \frac{1}{3}$.

15. 【答案】 \checkmark

【解析】对等式两边同时求导, 得 $-2f(1-2x) = 2x$, 于是 $f(1-2x) = -x$. 令 $1-2x = t$, 则 $f(t) = \frac{t-1}{2}$, 故 $f(x) = \frac{x-1}{2}$.

三、填空题

16. 【答案】1

【解析】 $\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$, 即 $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$. 又因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1$, 故原极限为 1.

17. 【答案】 $\frac{1}{3} f^3(x) + C$

18. 【答案】 $\frac{1}{3}$

【解析】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin t^2 dt}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{3x^2} = \frac{1}{3}$.

19. 【答案】可去

【解析】因为 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^3}{3x^2} = \frac{4}{3}$, 所以 $x = 1$ 是函数的可去间断点.

20. 【答案】 $y = 2x$

【解析】分离变量, 得 $\frac{dy}{y} = \frac{1}{x} dx$, 两边同时积分, 得 $\ln |y| = \ln |x| + \ln C$, 则 $y = Cx$. 由 $y(1) = 2$, 得 $C = 2$, 故所求特解为 $y = 2x$.

四、解答题

21.【解析】 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x^2-1}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2-1}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x^2-1}\right)^{(x^2-1)}\right]^{\frac{1}{x^2-1} \cdot x} = e^0 = 1.$

22.【解析】 $\frac{\partial z}{\partial x} = f\left(\frac{y}{x}\right) + x \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) f'\left(\frac{y}{x}\right) = f\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x} f'\left(\frac{y}{x}\right), \frac{\partial z}{\partial y} = x \cdot \frac{1}{x} f'\left(\frac{y}{x}\right) = f'\left(\frac{y}{x}\right).$

23.【解析】方程 $e^y + x + 2 = \sin(x + y)$ 两边同时对 x 求导,得

$$e^y \cdot \frac{dy}{dx} + 1 = \cos(x + y) \cdot \left(1 + \frac{dy}{dx}\right),$$

$$\text{整理得 } \frac{dy}{dx} = \frac{\cos(x + y) - 1}{e^y - \cos(x + y)}.$$

24.【解析】 $\frac{dy}{dt} = \cos t - \cos t + t \sin t = t \sin t, \frac{dx}{dt} = -\sin t,$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{t \sin t}{-\sin t} = -t,$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{d\left(\frac{dy}{dt}\right)}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = -1 \cdot \left(-\frac{1}{\sin t}\right) = \frac{1}{\sin t},$$

$$\text{故 } \left.\frac{d^2 y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{3}} = \left.\frac{1}{\sin t}\right|_{t=\frac{\pi}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}.$$

25.【解析】 $f'(x) = 3x^2 - 6x$, 令 $f'(x) = 0$, 解得驻点 $x_1 = 0, x_2 = 2$.

表 1

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	上升	极大值	下降	极小值	上升

由表可知函数的极大值 $f(0) = 1$, 极小值 $f(2) = -3$.

函数的单调增加区间是 $(-\infty, 0], [2, +\infty)$; 单调减少区间是 $[0, 2]$.

26.【解析】积分区域 D 可表示为 $\{(\theta, r) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi, 1 \leq r \leq 2\}$, 则

$$\begin{aligned} \iint_D \ln(x^2 + y^2) dx dy &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 r \ln r^2 dr = 4\pi \int_1^2 r \ln r dr \\ &= 4\pi \left(\frac{1}{2} r^2 \ln r \Big|_1^2 - \frac{1}{2} \int_1^2 r dr \right) = (8 \ln 2 - 3)\pi. \end{aligned}$$

考前冲刺卷(二) 参考答案及解析

一、单项选择题

1.【答案】D

【解析】A 选项中函数不互为反函数; B, C 选项中函数互为倒数; D 选项中, $y = x^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y} \Rightarrow y = \sqrt[3]{x}$, 互为

反函数.

2.【答案】B

【解析】选项 A 中,当 $x \rightarrow 0$ 时, $\frac{\sin x}{x}$ 的极限为 1; 选项 C 中,当 $x \rightarrow 0$ 时, $\frac{\cos x}{x}$ 的极限为 ∞ ; 选项 D 中,当 $x \rightarrow 0$ 时, $1 - \sin x$ 的极限为 1; 选项 B 中,当 $x \rightarrow 0$ 时, $x \sin x \sim x^2$, 是比 x 高阶的无穷小量, 故选 B.

3.【答案】D

【解析】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x} = 2.$

4.【答案】D

【解析】 $f'(x) = 3x^2 - 6x, f''(x) = 6x - 6$, 令 $f''(x) = 0$, 解得 $x = 1$. 当 $x > 1$ 时, $f''(x) > 0$; 当 $x < 1$ 时, $f''(x) < 0$, 且 $f(1) = 1$, 故拐点为 $(1, 1)$.

5.【答案】C

【解析】因为 $f(x) = x^{2020} + 2020x$, 所以 $f'(x) = 2020x^{2019} + 2020$, 故 $f'(1) = 4040$. 故选 C.

6.【答案】B

【解析】由题意知 $f(x) = (3^x)' = 3^x \ln 3$.

7.【答案】B

【解析】根据题意, $y' = 6x^2 + 6x, y'' = 12x + 6$. 令 $y' = 0$, 解得 $x = -1$ 或 $x = 0$. 因为 $y''|_{x=0} = 6 > 0$, $y''|_{x=-1} = -6 < 0$, 所以 $x = 0$ 为极小值点.

8.【答案】A

【解析】因为 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x+y}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x+y}$, 所以 $\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{(x+y)^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{(x+y)^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{1}{(x+y)^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{1}{(x+y)^2}$, 故选 A.

9.【答案】A

【解析】因为当 $x \in (0, 1)$ 时, $\tan x > x > x^2 > \sin x > \sin x^2 > 0$, 所以由定积分的性质, $\int_0^1 \tan x dx >$

$$\int_0^1 x dx > \int_0^1 x^2 dx > \int_0^1 \sin x^2 dx.$$

10.【答案】A

【解析】 $\iint_D 2 dx dy = 2 \iint_D dx dy = 2S_D = 2(\pi \times 2^2 - \pi \times 1^2) = 6\pi.$

二、判断题

11.【答案】√

【解析】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{3x} = \frac{1}{3}.$

12.【答案】×

【解析】根据题意, $y' = 9x^2 - 6x, y'' = 18x - 6$. 令 $y' = 0$, 解得 $x = \frac{2}{3}$ 或 $x = 0$. 因为 $y''|_{x=0} = -6 < 0$,

$y''|_{x=\frac{2}{3}} = 6 > 0$, 所以 $x = 0$ 为极大值点.

13. 【答案】√

【解析】根据题意, $f(3) = 0$, 所以 $f(f(3)) = f(0) = |0 - 2| = 2$.

14. 【答案】×

【解析】因为函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$. 又因为 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{a \sin^2 x}{x^2} = a$, $f(0) = 3$, 所以 $a = 3$.

15. 【答案】√

【解析】 $dy = d[e^{2x} + \cos(x+1)] = d(e^{2x}) + d[\cos(x+1)] = [2e^{2x} - \sin(x+1)]dx$.

三、填空题

16. 【答案】2

【解析】因为 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$. 又因为 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin 2x}{x} = 2$, $f(0) = a$, 所以 $a = 2$.

17. 【答案】 $\frac{x-1}{2-z}$

【解析】令 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10$, 则 $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x - 2$, $\frac{\partial F}{\partial z} = 2z - 4$, 于是 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} =$

$$\frac{x-1}{2-z}.$$

18. 【答案】 e^{-6}

【解析】 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 + \frac{-2}{x}\right)^{\frac{x}{-2} \cdot (-4)}}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x}} = \frac{e^{-4}}{e^2} = e^{-6}$.

19. 【答案】 $\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x, y) dx$

20. 【答案】 $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

【解析】特征方程为 $r^2 + 1 = 0$, 特征值为 $r_{1,2} = \pm i$, 故方程的通解为 $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

四、解答题

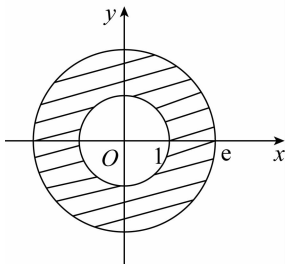
21. 【解析】令 $\sqrt{x-1} = t$, 则 $x = t^2 + 1$, $dx = 2tdt$, 故

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx &= \int \frac{t}{t^2+1} \cdot 2tdt = 2 \int \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) dt \\ &= 2t - 2\arctan t + C \\ &= 2\sqrt{x-1} - 2\arctan \sqrt{x-1} + C. \end{aligned}$$

22. 【解析】 $\int_{e^2}^{e^5} \frac{1}{x \ln x} dx = \int_{e^2}^{e^5} \frac{1}{\ln x} d(\ln x) = \ln(\ln x) \Big|_{e^2}^{e^5} = \ln \frac{5}{2}$.

23.【解析】由题意知,积分区域如图中阴影部分所示.由被积函数知本题用极坐标的形式计算较为简单,积分区域 $D = \{(\theta, r) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi, 1 \leq r \leq e\}$,故

$$\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^e r \cdot r dr = 2\pi \cdot \frac{1}{3} r^3 \Big|_1^e = \frac{2\pi}{3}(e^3 - 1).$$



第 23 题图

24.【解析】由曲线 $y = f(x)$ 与 $y = \sin 2x$ 在原点相切知, $f(0) = 0, f'(0) = 2\cos 2x \Big|_{x=0} = 2$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{nf\left(\frac{4}{n}\right)} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{f\left(\frac{4}{n}\right)}{\frac{4}{n}}} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{f\left(\frac{4}{n}\right) - f(0)}{\frac{4}{n} - 0}} = 2\sqrt{f'(0)} = 2\sqrt{2}.$$

25.【解析】微分方程 $y'' - 4y' - 12y = 0$ 对应的特征方程为 $r^2 - 4r - 12 = 0$, 解得 $r_1 = -2, r_2 = 6$, 于是微

分方程的通解为 $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{6x}$. 又因为 $\begin{cases} y|_{x=0} = C_1 + C_2 = 0, \\ y'|_{x=0} = -2C_1 + 6C_2 = 8, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} C_1 = -1, \\ C_2 = 1, \end{cases}$ 所以微分方

程的特解为 $y = -e^{-2x} + e^{6x}$.

26.【解析】交换积分次序后为 $I = \int_0^1 dy \int_{\frac{y}{2}}^y e^{y^2} dx$, 由此得 $I = \int_0^1 e^{y^2} \cdot \frac{y}{2} dy = \frac{1}{4} \int_0^1 de^{y^2} = \frac{1}{4}(e - 1)$.

考前冲刺卷(三) 参考答案及解析

一、单项选择题

1.【答案】B

【解析】由题意得 $f(2) = 1$, 所以 $f(f(2)) = f(1) = 0$.

2.【答案】C

【解析】根据定义即可判断.

3.【答案】A

【解析】因为 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \cos x = 1, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x+1) = 1$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

4.【答案】B

【解析】 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{a} \cdot a} = e^a = 4$, 所以 $a = \ln 4 = 2\ln 2$, 故选 B.