高等职业教育公共基础课系列教材

高等应用数学

GAODENG YINGYONG SHUXUE

主 编 聂 鑫 邵菲菲

哈尔滨工程大学出版社
Harbin Engineering University Press

高等职业教育公共基础课系列教材
高等应用数学
主 编 聂 鑫 邵菲菲
哈尔滨工程大学出版社
Harbin Engineering University Press

高等应用数学
GAODENG YINGYONG SHUXUE

选题策划 金颖杰
责任编辑 苏 莉
封面设计 刘文东

ISBN 978-7-5661-4080-7

定价：54.80元

高等职业教育公共基础课系列教材

高等应用数学

GAODENG YINGYONG SHUXUE

主 编 聂 鑫 邵菲菲
副主编 于 丹

哈尔滨工程大学出版社
Harbin Engineering University Press

内 容 简 介

本书共分为 8 个模块，主要内容包括函数、极限与连续，微分学，积分学，向量及空间解析几何，二元函数微积分，概率论初步，数理统计初步，线性代数初步.

本书可作为高等职业院校数学课程的教材，也可作为相关人士的学习资料.

图书在版编目(CIP)数据

高等应用数学 / 聂鑫，邵菲菲主编. — 哈尔滨 ：哈尔滨工程大学出版社，2023.8(2025.1 重印)

ISBN 978-7-5661-4080-7

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①聂… ②邵… Ⅲ. ①应用数学-高等职业教育-教材 Ⅳ. ①O29

中国国家版本馆 CIP 数据核字(2023)第 143394 号

高等应用数学

GAODENG YINGYONG SHUXUE

选题策划 金颖杰
责任编辑 苏　莉
封面设计 刘文东

出版发行 哈尔滨工程大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区南通大街 145 号
邮政编码 150001
发行电话 0451-82519328
传　　真 0451-82519699
经　　销 新华书店
印　　刷 大厂回族自治县聚鑫印刷有限责任公司
开　　本 787 mm×1 092 mm　1/16
印　　张 15.5
字　　数 377 千字
版　　次 2023 年 8 月第 1 版
印　　次 2025 年 1 月第 2 次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5661-4080-7
定　　价 54.80 元
http://www.hrbeupress.com
E-mail:heupress@hrbeu.edu.cn

前言

| PREFACE |

党的二十大报告指出，“加强基础学科、新兴学科、交叉学科建设，加快建设中国特色、世界一流的大学和优势学科”. 高等数学是高等职业教育各专业的公共基础课，可以培养学生的运算能力、抽象思维能力、数据分析整理能力和逻辑推理能力，为学生更好地进行后续专业课的学习打好基础.

本书以高职学生的职业素质培养为目标，结合辽宁城市建设职业技术学院高等数学、应用数学课程改革实例编写而成. 本书注重能力培养，采用案例引入问题驱动的模式，以“边学边做边互动”为手段进行模块化设计，使学生能够利用所学数学知识解决实际问题，形成良好的逻辑思维能力和数据判断能力，养成严谨细致、精益求精的工作态度.

本书共8个模块，主要内容包括函数、极限与连续，微分学，积分学，向量及空间解析几何，二元函数微积分，概率论初步，数理统计初步，线性代数初步. 本书围绕高等职业教育工学结合的人才培养模式，注重应用数学知识解决实际问题能力的培养，注重数学思想方法和数学思维的训练，注重自学能力的培养与提高.

本书主要特色如下：

(1)在教学内容选取方面打破学科体系的系统性，根据高等职业院校学生的需求进行模块化分类，模块1至模块5为微积分的内容，模块6至模块8为数据整理和应用.

(2)每个小节包括导入、基础知识、计算与应用、能力提升四个小模块. 导入模块引导学生自主学习，基础知识模块为老师讲解、纠正、答疑部分，计算与应用模块帮助学生巩固所学知识，能力提升模块主要供有专升本需求的同学进行知识提升.

(3)牢固树立服务专业培养目标意识,尽量与专业结合,真正做到服务专业,使学生学以致用.

本书由辽宁城市建设职业技术学院聂鑫、邵菲菲任主编,辽宁城市建设职业技术学院于丹任副主编.具体编写分工如下:模块1、模块2、模块3、模块5由邵菲菲编写;模块6、模块7、模块8由聂鑫编写;模块4、附录由于丹编写.全书由聂鑫统稿.

由于编者水平有限,书中难免存在疏漏和不足之处,恳请广大读者批评指正.

编　者

目录

|CONTENTS|

上篇 微 积 分

下篇 数据整理和应用

上篇

微 积 分

模块 1　函数、极限与连续

1.1 初等函数

1.1.1　导入模块

学习目标

(1)找到生活中涉及的数学知识.
(2)理解函数的概念并熟悉基本初等函数的图像.
(3)掌握复合函数的复合过程.

情境引入

想想数学在生活中的使用场合,以及在课堂中的作用.

自主探究

1. 函数的概念.

2. 基本初等函数有哪六类?画出它们的大致图像.

3. 复合函数 $y=f(\varphi(x))$ 是怎样复合的?

4. 通过自学，解决下列问题.

(1)求下列函数的定义域并用区间的形式表达.

①$y=\sqrt{\dfrac{3+x}{3-x}}$；②$y=\dfrac{1}{e^x-1}$；③$y=\sqrt{\ln(x-2)}$；④$y=\arcsin x+\tan x$.

(2)判断下列函数是由哪些简单函数复合而成的，尝试写出它们的复合过程.

①$y=\cos^3(1-2x)$；②$y=\ln(\arcsin\sqrt{x})$；③$y=\sin^3(x^2)$；④$y=\sqrt{\cot\dfrac{x}{2}}$.

5. 请将预习过程中遇到的问题列出来.

1.1.2　基础知识模块

1. 函数关系

函数是描述客观事物变化规律的一种数学模型，也是微积分学的基本研究对象. 在生产实践和科学研究过程中，经常需要考察反映两个变量关系的函数.

引例 1　2023 年中国人民银行发布了定期存款基准利率，表 1-1 表示定期存款基准利率 r 与存款时间 t 的对应关系.

表 1-1

时间(t)/月	3	6	12	24	36
利率(r)	1.35	1.55	1.75	2.25	2.75

引例 2　C 语言标准函数库中，开平方函数 $y=\text{sqrt}(x)$表示将变量 x 的算术平方根返回到变量 y 中，其函数关系式为 $y=\sqrt{x}$.

引例 1、引例 2 以不同方式阐述了两个变量之间的对应关系，即一个变量随着另一个变量的变化而变化. 引例 1 以**列表**的方式给出了定期存款基准利率 r 随存款时间 t 的变化而变化的对应关系，引例 2 以**解析式**的方式给出了变量 y 随变量 x 的变化而变化的对应关系. 这种对应关系刻画了客观事物的变化规律，在数学中称为函数关系.

2. 函数的概念

定义　设 x,y 为两个变量，D 为非空实数集合，若对于 $\forall x\in D$，某一对应法则 f 有唯一

确定的数 y 与 x 相对应，则称对应法则 f 是定义在 D 上的函数，习惯上也称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)(x\in D)$，其中 x 称为自变量，y 称为因变量，也称为对应于自变量 x 的函数值 $f(x)$. 数集 D 称为函数 f 的定义域. 函数值 $f(x)$ 的全体所构成的集合称为函数 f 的值域，记作 $R=\{y|y=f(x),x\in D\}$.

注意：(1)按照上述定义，记号 f 和 $f(x)$ 的含义是有区别的，前者表示自变量 x 和因变量 y 之间的对应法则，而后者表示与自变量 x 对应的函数值. 但为了叙述方便，习惯上常用记号"$f(x),x\in D$"或"$y=f(x),x\in D$"来表示定义在 D 上的函数，这时应理解为由它所确定的函数 f.

(2)表示函数的记号是可以任意选取的，除了常用的 f 外，还可用其他英文字母或希腊字母，如 g、F、φ 等. 相应地，函数可记作 $y=g(x)$，$y=F(x)$，$y=\varphi(x)$. 有时还可直接用因变量的记号来表示函数，即把函数记作 $y=y(x)$. 但在同一个问题中，讨论到几个不同的函数时，为了表示区别，需用不同的记号来表示它们.

(3)函数是从实数集到实数集的映射，其值域总在 R 内，因此构成函数的要素是定义域 D 和对应法则 f. 如果两个函数的定义域相同，对应法则也相同，那么这两个函数就是相同的，否则就是不同的.

例 1 判别函数 $y=x,x\in(-\infty,+\infty)$与函数 $y=\sqrt{x^2},x\in(-\infty,+\infty)$是否为同一函数.

解 这两个函数的定义域相同，但当 $x<0$ 时，$y=x<0$，而 $y=\sqrt{x^2}>0$，可见它们的对应法则不同，值域不同，所以不是同一函数.

课中练习

下列选项中，不是同一函数的是(　　).

A. $y=\dfrac{x^2}{x^3}$ 与 $y=\dfrac{1}{x}$　　　　B. $y=2^{2x}$ 与 $y=4^x$

C. $y=\lg x^2$ 与 $y=2\lg|x|$　　　　D. $y=\sqrt{1-\cos^2 x}$ 与 $y=\sin x$

3. 函数定义域的求法

在实际问题中，函数的定义域是根据问题的实际意义确定的. 不考虑函数的实际意义，而抽象地研究用解析式表达的函数时，规定函数的定义域是使解析式有意义的一切实数组成的集合.

求函数的定义域时，一般考虑以下情况：

(1)当函数是多项式时，定义域为$(-\infty,+\infty)$.

(2)分式函数的分母不能为零.

(3)偶次根式的被开方式必须大于或等于零.

(4)对数函数的真数必须大于零.

(5)反正弦函数与反余弦函数的定义域为$[-1,1]$.

(6)如果函数表达式中含有上述几种函数，则应取各部分定义域的交集.

(7)分段函数的定义域是各个表达式的定义域的并集.

例 2 求下列函数的定义域.

(1)$f(x)=\dfrac{2}{4x^2-3x}$;(2)$f(x)=\sqrt{4-x^2}$;(3)$f(x)=\lg(2x-4)$.

解 (1)要使函数 $f(x)=\dfrac{2}{4x^2-3x}$有意义,必须有 $4x^2-3x\neq0$,解得 $x\neq0$ 且 $x\neq\dfrac{3}{4}$.

所以函数的定义域为$(-\infty,0)\cup\left(0,\dfrac{3}{4}\right)\cup\left(\dfrac{3}{4},+\infty\right)$.

(2)要使函数 $f(x)=\sqrt{4-x^2}$有意义,必须有 $4-x^2\geqslant0$,解得$-2\leqslant x\leqslant2$.

所以函数的定义域为$[-2,2]$.

(3)要使函数 $f(x)=\lg(2x-4)$有意义,必须有 $2x-4>0$,解得 $x>2$.

所以函数的定义域为$(2,+\infty)$.

例3 已知函数 $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$,求 $f(-1),f(0),f(m),f(n-1)$.

解 $f(-1)=\dfrac{-1}{1+(-1)^2}=-\dfrac{1}{2}$,

$f(0)=\dfrac{0}{1+0^2}=0$,

$f(m)=\dfrac{m}{1+m^2}$,

$f(n-1)=\dfrac{n-1}{1+(n-1)^2}=\dfrac{n-1}{n^2-2n+2}$.

4.函数的性质

1)奇偶性

设函数 $f(x)$的定义域 D 关于坐标原点对称,如果对于$\forall x\in D$,恒有 $f(-x)=f(x)$成立,则称 $f(x)$为**偶函数**;如果对于$\forall x\in D$,恒有 $f(-x)=-f(x)$成立,则称 $f(x)$为**奇函数**.

偶函数的图像关于 y 轴对称,奇函数的图像关于坐标原点对称.

2)单调性

设函数 $f(x)$的定义域为 D,区间 $I\subset D$.

若对于区间 I 上任意两点 x_1 和 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,恒有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称函数 $f(x)$在区间 I 上是单调增加的,区间 I 为函数 $f(x)$的单调增区间.

若对于区间 I 上任意两点 x_1 和 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,恒有 $f(x_1)>f(x_2)$,则称函数 $f(x)$在区间 I 上是单调减少的,区间 I 为函数 $f(x)$的单调减区间.

例如,函数 $f(x)=x^2$ 在区间$[0,+\infty)$上单调增加,在区间$(-\infty,0)$上单调减少,但在区间$(-\infty,+\infty)$内不是单调的.

3)有界性

设函数 $f(x)$的定义域为 D,数集 $A\subset D$.如果存在正数 M,使得对于$\forall x\in A$ 有$|f(x)|\leqslant M$,则称函数 $f(x)$在 A 上有界,或称 $y=f(x)$在 A 上为有界函数.如果这样的正数 M 不存在,则称函数 $f(x)$在 A 上无界.

有界函数的图形介于直线 $y=M$ 与 $y=-M$ 之间.

例如,$y=\sin x$,$y=\cos x$,$y=\arctan x$,$y=\operatorname{arccot} x$ 都是区间$(-\infty,+\infty)$上的有界

函数.

4)周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,如果存在不为零的数 T,使得对于 $\forall x\in D$,有 $(x\pm T)\in D$ 且 $f(x+T)=f(x)$ 恒成立,则称函数 $f(x)$ 为周期函数,T 为函数 $f(x)$ 的周期. 通常,周期函数的周期是指最小正周期.

周期函数的特点:每个周期内的图像是相同的.

例如,函数 $f(x)=\sin x$ 是周期函数,它的周期 $T=2\pi$;函数 $f(x)=\sin(2x+3)$ 也是周期函数,它的周期 $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$.

5.反函数

1)反函数的定义

对于函数 $y=f(x)$,如果把 y 看作自变量,x 看作因变量,且由 $y=f(x)$ 能够确定一个新的函数 $x=\varphi(y)$,则称这个新的函数为函数 $y=f(x)$ 的反函数,记作 $x=f^{-1}(y)$. 相对于反函数 $x=f^{-1}(y)$ 来说,$y=f(x)$ 称为直接函数.

函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的图像是相同的. 但是,习惯上以 x 表示自变量,y 表示因变量,于是 $x=f^{-1}(y)$ 常表示为 $y=f^{-1}(x)$. 因此,函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

2)求反函数的一般步骤

(1)把 x 作为未知数,从方程 $y=f(x)$ 中解出,得到 $x=f^{-1}(y)$.

(2)在所得到的表达式中交换字母 x 和 y,得到函数 $y=f(x)$ 的反函数 $y=f^{-1}(x)$.

例 4 求函数 $y=3x-1$ 的反函数.

解 由 $y=3x-1$ 解得 $x=\dfrac{1}{3}y+\dfrac{1}{3}$.

互换 x 和 y,得函数 $y=3x-1$ 的反函数为 $y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{3}$.

6.基本初等函数

常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数.

1)常数函数

函数 $y=C$(C 为常数),它的定义域为 $(-\infty,+\infty)$,图像为平行于 x 轴的一条直线. 当 $C=0$ 时,它表示 x 轴,当 $C\neq0$ 时,它是偶函数,如图 1-1 所示.

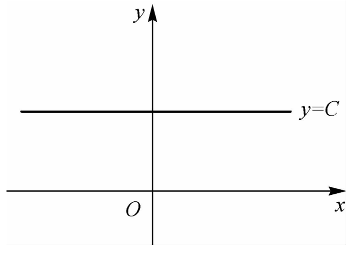

图 1-1

2)幂函数

函数 $y=x^{\alpha}(\alpha\in\mathbf{R})$,它的定义域随 α 的不同而不同,但在 $(0,+\infty)$ 内都有定义.此函数恒过点 $(1,1)$,且在第一象限内,当 $\alpha>0$ 时,是增函数,当 $\alpha<0$ 时,是减函数.常见的幂函数如图 1-2 所示.

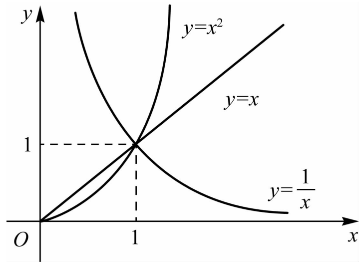

图 1-2

3)指数函数

函数 $y=a^{x}(a>0$ 且 $a\neq1)$,它的定义域为 $(-\infty,+\infty)$,图像在 x 轴上方,且恒过点 $(0,1)$.当 $0<a<1$ 时,它是单调减少函数;当 $a>1$ 时,它是单调增加函数,如图 1-3 所示.

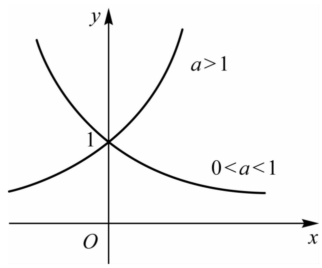

图 1-3

4)对数函数

函数 $y=\log_{a}x(a>0$ 且 $a\neq1)$,它的定义域为 $(0,+\infty)$,图像在 y 轴右侧,且恒过点 $(1,0)$.当 $0<a<1$ 时,它是单调减少函数;当 $a>1$ 时,它是单调增加函数,如图 1-4 所示.

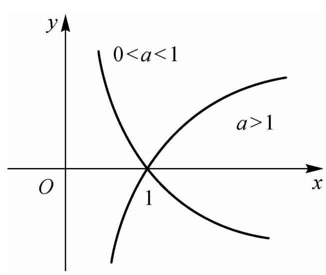

图 1-4

注意:当 $a=\mathrm{e}=2.71828\cdots$ 时,函数 $y=\log_{\mathrm{e}}x=\ln x$ 称为自然对数.

5)三角函数

(1)正弦函数 $y=\sin x$,它的定义域为 $(-\infty,+\infty)$,值域为 $[-1,1]$.该函数为有界函

数、奇函数、周期为 2π 的周期函数,如图 1-5 所示.

(2)余弦函数 $y=\cos x$,它的定义域为 $(-\infty,+\infty)$,值域为 $[-1,1]$. 该函数为有界函数、偶函数、周期为 2π 的周期函数,如图 1-6 所示.

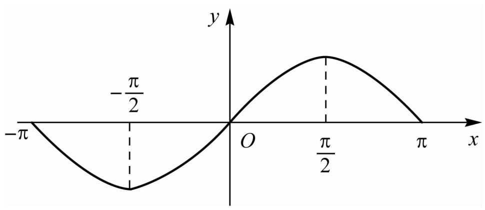

图 1-5

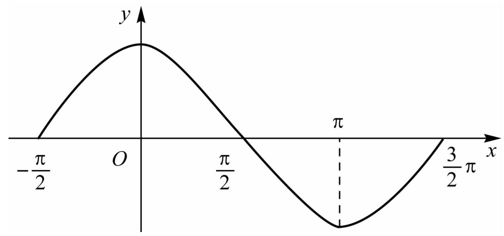

图 1-6

(3)正切函数 $y=\tan x$,它的定义域为 $\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)(k\in\mathbf{Z})$,值域为 $(-\infty,+\infty)$. 该函数为无界函数、奇函数、周期为 π 的周期函数,如图 1-7 所示.

(4)余切函数 $y=\cot x$,它的定义域为 $(k\pi,k\pi+\pi)(k\in\mathbf{Z})$,值域为 $(-\infty,+\infty)$. 该函数为无界函数、奇函数、周期为 π 的周期函数,如图 1-8 所示.

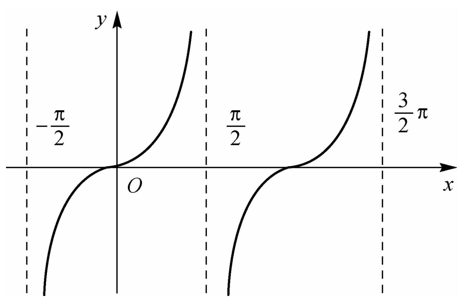

图 1-7

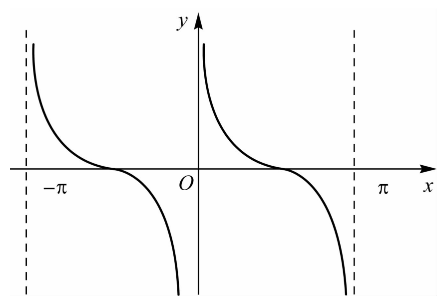

图 1-8

(5)正割函数 $y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$.

(6)余割函数 $y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$.

6)反三角函数

(1)反正弦函数 $y=\arcsin x$,它的定义域为 $[-1,1]$,值域为 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. 该函数是有界函数、奇函数、单调增加函数、非周期函数,如图 1-9 所示.

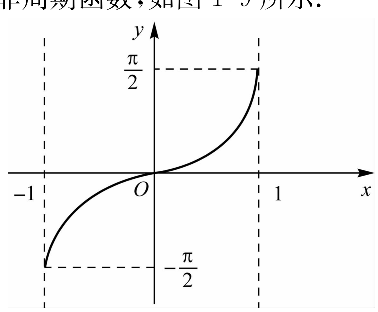

图 1-9

(2)反余弦函数 $y=\arccos x$，它的定义域为$[-1,1]$，值域为$[0,\pi]$. 该函数是有界函数、非奇非偶函数、单调减少函数、非周期函数，如图 1-10 所示.

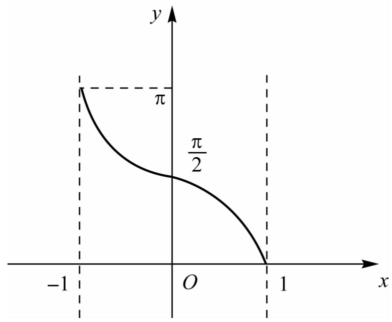

图 1-10

(3)反正切函数 $y=\arctan x$，它的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$. 该函数是有界函数、奇函数、单调增加函数、非周期函数，如图 1-11 所示.

(4)反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$，它的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$(0,\pi)$. 该函数是有界函数、非奇非偶函数、单调减少函数、非周期函数，如图 1-12 所示.

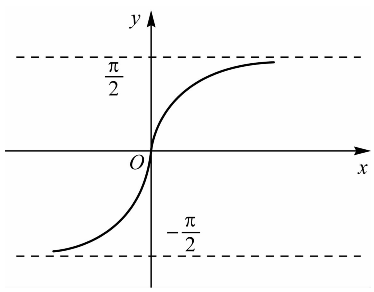

图 1-11

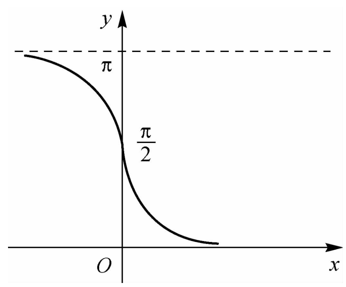

图 1-12

7. 复合函数与初等函数

1)复合函数

函数 $y=u^2$，$u=\sin x$，把 $u=\sin x$ 代入前一个函数，得 $y=\sin^2 x$，那么 $y=\sin^2 x$ 就称为由 $y=u^2$ 和 $u=\sin x$ 复合而成的函数.

一般地，由函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 复合而成的函数，称为复合函数，记作 $y=f[g(x)]$，u 称为中间变量. 例如，函数 $y=\ln x^2$ 是由 $y=\ln u$ 和 $u=x^2$ 两个基本初等函数复合而成的，函数 $y=\sin\sqrt{1-x^2}$ 是由 $y=\sin u$，$u=\sqrt{v}$，$v=1-x^2$ 复合而成的.

注意：把一个复合函数分解时，应将它分解成基本初等函数，或者由常数及基本初等函数经过四则运算(加、减、乘、除)得到的表达式.

2)初等函数

由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次函数的复合步骤构成，并可用一个式子表示的函数，称为初等函数. 例如，$y=x+\sin x^2$，$y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 都是初等函数.

1.1.3 计算与应用模块

1. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$；

(2) $y=\lg 4x-3$；

(3) $y=\dfrac{\sqrt{x-1}}{\ln x}$；

(4) $y=\dfrac{\ln(x-1)}{\sqrt{5-x}}$.

2. 设函数 $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$，求 $f(-1),f(0),f(4),f(a),f(b-1)$.

3. 已知函数 $f(x+2)=x^2+3x+5$，求 $f(x),f(x-1)$.

4. 指出下列函数的复合过程.

(1) $y=\sqrt{2x+1}$；

(2) $y=\mathrm{e}^{\cos x}$；

(3) $y=\arctan 3^x$；

(4) $y=\ln(\sin 2x)$.

1.1.4 能力提升模块

1. $f(x)$的定义域为$[0,1]$，则 $f(\ln x)$的定义域为(　　).

A. $[0,\mathrm{e}]$　　B. $[\mathrm{e},1]$　　C. $[1,\mathrm{e}]$　　D. $[0,1]$

2. 函数 $z=\dfrac{1}{\sqrt{xy}}$的定义域是(　　).

A. $\{(x,y)|x\neq0,y\neq0\}$

B. $\{(x,y)|x>0,y>0\}$

C. $\{(x,y)|x\geqslant0,y\geqslant0\}$

D. $\{(x,y)|x>0,y>0$ 或 $x<0,y<0\}$

3. 设 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有定义，则下列函数中必为奇函数的是(　　).

A. $y=-|f(x)|$

B. $y=|f(x)|$

C. $y=C$

D. $y=xf(x^2)$

4. 设 $f(x)$的定义域为$[0,2a]$，则 $f(x+a)$的定义域是(　　).

A. $[-a,a]$　　B. $[-a,0]$　　C. $[0,a]$　　D. $[0,2a]$

5. 设 $f\left(\dfrac{1}{x}-1\right)=\cos x$，则 $f(x)=$(　　).

A. $\cos\dfrac{1}{x+1}$

B. $\cos\dfrac{x}{x-1}$

C. $\cos\dfrac{x}{x+1}$

D. $\cos\dfrac{4x}{x+1}$

6. 函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$在区间$\left[\dfrac{1}{2},1\right]$上(　　).

A. 有上界无下界

B. 有下界无上界

C. 有界，且 $2\ln\dfrac{1}{2}\leqslant f(x)\leqslant 0$

D. 有界，且 $\ln\dfrac{1}{2}\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{1}{4}$

7. 函数 $y=\lg(\sqrt{1+x^2}+x)$(　　).

A. 是奇函数，非偶函数

B. 是偶函数，非奇函数

C. 既不是奇函数，也不是偶函数

D. 既是奇函数，又是偶函数

8. 设 $f(x)$的定义域为$[1,2]$，则 $f(1-\lg x)$的定义域为__________.

9. 设 $f(x)$的定义域为$[0,1]$，则 $f(2x-1)$的定义域为__________.

10. 函数 $y=\dfrac{\ln(x-6)}{\sqrt{9-x}}$的定义域是__________.

11. 函数 $y=\dfrac{\arcsin(1-x)}{\ln(x+2)}$的定义域是____________________.

12. 函数 $y=\sqrt{x-3}+\ln(x-1)$的定义域是____________________.

13. 函数 $f(x)=\dfrac{\arcsin x}{\ln x}$的定义域是__________.

1.2　函数的极限与连续

1.2.1　导入模块

学习目标

(1)掌握极限的思想.

(2)能够求函数的极限.

情境引入

你听过刘徽的割圆术吗？你知道 $0.\dot{9}$与 1 的大小关系吗？

自主探究

1. 极限的概念.

2. 求函数极限有几种情况？

3. 通过自学，解决下列问题.

(1)$\lim\limits_{x\to 5}x=$__________；　　(2)$\lim\limits_{x\to -1}x^2=$__________；

(3)$\lim\limits_{x\to \pi}\tan x=$__________；　　(4)$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\cos x=$__________；

(5) $\lim\limits_{x\to 0}(x^2+1)=$__________；　　(6) $\lim\limits_{x\to 0}2^x=$__________；

(7) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1}{x}=$__________；　　(8) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{1}{x}=$__________；

(9) $\lim\limits_{x\to +\infty}\arctan x=$__________；　　(10) $\lim\limits_{x\to -\infty}\arctan x=$__________.

4. 请将预习过程中遇到的问题列出来.

1.2.2　基础知识模块

本模块通过观察列表和图像给出表达函数变化趋势的量——极限的描述性定义，然后以此为基础讨论无穷小和无穷大的基本概念与性质.

极限是微积分学的基础，微积分学中几乎所有的基本概念(包括连续、导数、微分、积分等)都建立在极限概念的基础之上. 事实上，微积分学创立之初，牛顿、莱布尼茨等人并没有给出极限的严格定义，直到 19 世纪，柯西、魏尔斯特拉斯等人才给出了极限的严格定义. 而即便没有严格的极限定义，微积分学仍然在相当长的一段时间内在“争议”中迅速发展，为社会生产实践做出了重要贡献.

引例 1(刘徽割圆术)　早在魏晋时期，我国数学家刘徽就提出了著名的“割圆术”，这是建立在直观基础上的一种原始的极限思想的应用. 在计算半径为 R 的圆的面积时，刘徽提出：“割之弥细，所失弥少。割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣. ”刘徽的思想可理解为用圆的内接正 n 边形的面积 S_n 来近似圆的面积 S(图 1-13)，并不断增加正 n 边形的边数 n，利用一个不断变化的量(S_n)来计算一个常量(S). 在这个过程中，随着 n 的增加，S_n 越来越接近 S. 这个常量 S 在数学上称为变量 S_n 当 n 无限增大时的极限. 也就是说，极限是某个不断变化的变量(正 n 边形的面积 S_n)最终的变化趋势(圆的面积 S).

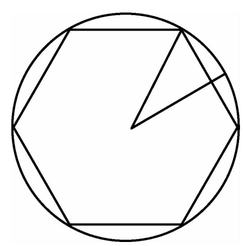

图 1-13

引例 2　考察函数 $f(x)=\frac{1-x^2}{1+x}$. 该函数在 $x=-1$ 处没有定义. 通过列表和图像来观察当 x 越来越接近 -1 时，对应的函数值的变化趋势.

列表(表 1-2).

表 1-2

x	-1.1	-1.01	-1.001	-1.0001	…	-0.9999	-0.999	-0.99	-0.9
$f(x)$	2.1	2.01	2.001	2.0001	…	1.99999	1.999	1.99	1.9

作图(图 1-14).

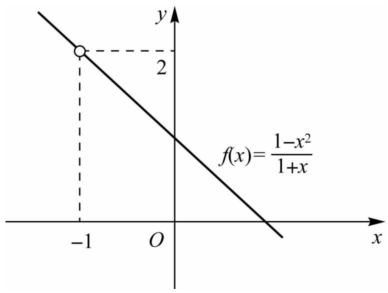

图 1-14

通过列表和图像可以看出，无论 x 从左侧还是右侧接近 -1，对应的函数值趋于一个固定的常数 2，于是称常数 2 是函数 $f(x)=\frac{1-x^2}{1+x}$ 当 x 趋于 -1 时的极限，记作 $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=2$.

引例 3　考察函数 $f(x)=\frac{1}{x}$. 通过列表和图像来讨论当 $|x|$ 不断增大时，对应的函数值的变化趋势.

列表(表 1-3).

表 1-3

x	10	100	1000	10000	100000	1000000	…
f(x)	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001	0.000001	…
x	−10	−100	−1000	−10000	−100000	−1000000	…
f(x)	−0.1	−0.01	−0.001	−0.0001	−0.00001	−0.000001	…

作图(图 1-15).

通过列表和图像可以看出，当 $|x|$ 无限增大(记为 $x\to\infty$)，即 x 与原点距离无限增大时，对应的函数值趋于一个固定的常数 0，于是称常数 0 是函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 当 x 趋于无穷大时的极限，记作 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$.

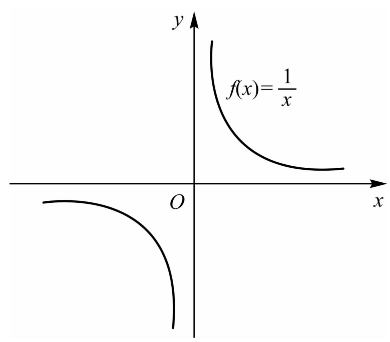

图 1-15

根据引例 1、引例 2、引例 3 中对函数极限的讨论，可以得到函数极限的描述性定义.

1. 函数极限的定义

1) 当 $x\to x_0$(有限值)时函数 $f(x)$ 的极限

定义 1　设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某空心邻域内有定义，如果当 x 无限趋近于 x_0 时，对应的函数值无限趋近于常数 A，则称当 x 趋近于 x_0 时，$f(x)$ 的极限是 A，记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

例如，对于常数函数 $f(x)=C$，通过列表和图像观察可知 $\lim\limits_{x\to x_0}C=C$，即常数的极限是常数本身；又如，对于正比例函数 $f(x)=x$，通过列表和图像观察可知 $\lim\limits_{x\to x_0}x=x_0$.

极限描述了函数的变化趋势，极限值和函数值是两个不同的概念. 如在引例 2 中，尽管函数 $f(x)=\frac{1-x^2}{1+x}$ 在 $x=-1$ 处无定义，但当 x 趋近于 -1 时，对应的函数值无限趋近于 2，所以当 x 趋近于 -1 时，该函数的极限值为 2. 也就是说，虽然函数 $f(x)=\frac{1-x^2}{1+x}$ 在 $x=-1$ 处无定义，但当 x 趋近于 -1 时函数的极限值却是存在的.

需要注意的是，在 x 无限趋近于 x_0 的过程中，既包括从 x_0 的左侧趋近于 x_0(此时 $x<x_0$)，又包括从 x_0 的右侧趋近于 x_0(此时 $x>x_0$). $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 是指 x 不论以何种方式趋近

于 x_0，函数 $f(x)$的变化趋势都无限地接近 A.

但有些函数并不具有这样的性质，如函数 $f(x)=\begin{cases}x, & x<0\\2, & x\geqslant 0\end{cases}$，当 x 从左侧趋于 0 时，函数 $f(x)$趋于 0；当 x 从右侧趋于 0 时，函数 $f(x)$趋于 2(图 1-16). 所以当 $x\to 0$ 时，这个函数的极限不存在. 为了说明这种情况，我们给出单侧极限的概念.

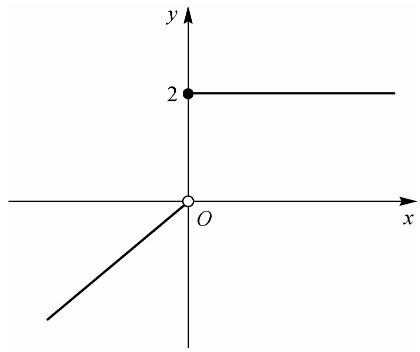

图 1-16

定义 2 设函数 $f(x)$在 x_0 左侧附近有定义(可以在 x_0 处没有定义)，如果当 x 从 x_0 左侧无限趋近于 x_0 时(记作 $x\to x_0^-$)，对应的函数值 $f(x)$无限趋近于常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$当 $x\to x_0^-$ 时的左极限，记作 $f(x_0^-)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$.

定义 3 设函数 $f(x)$在 x_0 右侧附近有定义(可以在 x_0 处没有定义)，如果当 x 从 x_0 右侧无限趋近于 x_0 时(记作 $x\to x_0^+$)，对应的函数值 $f(x)$无限趋近于常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$当 $x\to x_0^+$ 时的右极限，记作 $f(x_0^+)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$.

左极限和**右极限**统称为**单侧极限**.

结合极限的定义，对于单侧极限有如下结论：

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^+}f(x)=\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A.$$

例 1 当 $x\to\frac{\pi}{2}$时，求下列函数的极限.

(1) $y=x$；(2) $y=\sin x$；(3) $y=3$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}x=\frac{\pi}{2}$；

(2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x=1$；

(3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}3=3$.

例 2 已知函数 $f(x)$的图像如图 1-17 所示，通过图像讨论当 $x\to -2$，$x\to -1$，$x\to 0$，$x\to 3$ 时，函数 $f(x)$的极限.

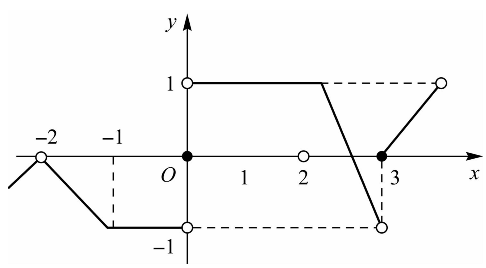

图 1-17

解 $f(x)$在 $x=-2$ 处没有定义，但当 $x\to -2$ 时，$f(x)$的左、右极限存在且均等于 0，所以 $\lim\limits_{x\to -2}f(x)=0$.

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=-1$,所以$\lim\limits_{x\to -1} f(x)=-1$.

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-1$,而$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$,所以$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$不存在.

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=-1$,而$\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=0$,所以$\lim\limits_{x\to 3} f(x)$不存在.

例 3　已知函数 $f(x)=\begin{cases} x+1, & x>0 \\ 0, & x=0. \\ x-1, & x<0 \end{cases}$

(1)求 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$;

(2)求 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$;

(3)讨论极限$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$是否存在.

解　作出这个函数的图像(图 1-18).

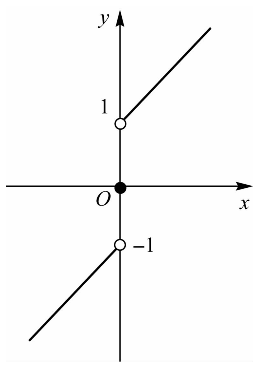

图 1-18

观察图像可知

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x-1)=-1,$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x+1)=1.$$

因为当 $x\to 0$ 时,函数 $f(x)$的左、右极限虽各自存在但不相等,所以 $f(x)$不能无限趋近于某一个常数,即$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$不存在.

这就是说,如果

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)\neq \lim_{x\to x_0^-} f(x),$$

那么极限$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$不存在.

2)当 $x\to\infty$时函数 $f(x)$的极限

引例 2、引例 3 中分别给出的两个极限的区别在于一个是自变量趋于有限值时函数的极限,另一个是自变量趋于无穷时函数的极限.下面讨论自变量趋于无穷时函数的极限.

定义 4　设函数 $f(x)$当$|x|$大于某一正数时有定义,当$|x|$无限增大(记作 $x\to\infty$)时,对

应的函数值 $f(x)$ 无限接近于常数 A，则称当 $x\to\infty$ 时，$f(x)$ 的极限是 A，记作 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

定义 5　设函数 $f(x)$ 当 x 大于某一正数时有定义，当 $x>0$ 且无限增大（记作 $x\to+\infty$）时，对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于常数 A，则称当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)$ 的极限是 A，记作 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$.

定义 6　设函数 $f(x)$ 当 x 小于某一负数时有定义，当 $x<0$ 且无限减小（记作 $x\to-\infty$）时，对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于常数 A，则称当 $x\to-\infty$ 时，$f(x)$ 的极限是 A，记作 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$.

例 4　分别讨论当 $x\to+\infty$，$x\to-\infty$ 时，下列函数的变化趋势.

(1) $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$；　　　　(2) $y=2^x$.

解　(1) 由图 1-19 可以看出，当 $x\to+\infty$ 时，$y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ 无限趋近于 0，即 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x=0$；当 $x\to-\infty$ 时，$y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x\to+\infty$.

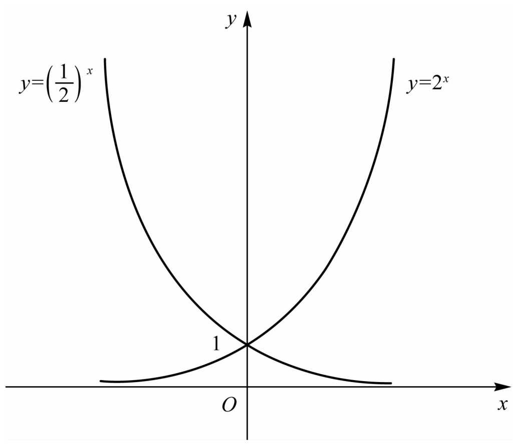

图 1-19

(2) 当 $x\to+\infty$ 时，$y=2^x\to+\infty$，当 $x\to-\infty$ 时，$y=2^x$ 无限趋近于 0，即 $\lim\limits_{x\to-\infty}2^x=0$.

例 5　观察反正切函数的图像，求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x$；

(2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$.

解　反正切函数的图像如图 1-20 所示，由图像可以看出：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$；

(2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$；

(3) 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$，所以当 $x\to\infty$ 时，$\arctan x$ 不能趋近于

某一个常数，即$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$不存在.

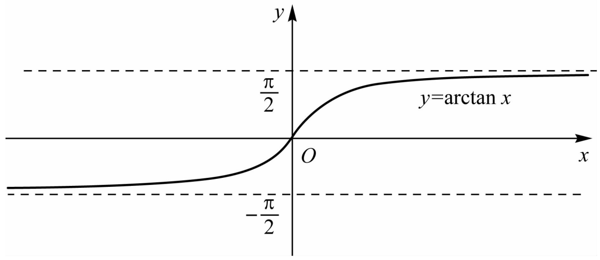

图 1-20

2. 函数极限的性质

(1)唯一性. 如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，那么其值必唯一.

(2)局部有界性.

若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，则在点$x_0$的某一去心邻域内，$f(x)$有界.

若$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$存在，则一定存在$X>0$，当$|x|>X$时，$f(x)$有界.

(3)局部保号性.

以$x\to x_0$为例. 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A>0$（或$A<0$），则在点$x_0$的某一去心邻域内，$f(x)>0$（或$f(x)<0$）. 反之，若$f(x)\geqslant 0$（或$f(x)\leqslant 0$），则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\geqslant 0$（或$A\leqslant 0$）.

3. 无穷小和无穷大

在日常的学习生活中，经常遇到"无穷小、无穷大"之类的表述，那么到底什么才是无穷小，什么才是无穷大？在微积分中应该怎样定义无穷小和无穷大呢？实际上，这个问题在历史上有许多著名学者做出过解释，如牛顿曾认为"无穷小是比任何数的绝对值都要小的数"，莱布尼茨认为"无穷小有时是零，有时却不是零". 从现代数学的角度来看，这些解释都不尽如人意. 直到极限的概念确立之后，人们才看清无穷小的本质.

早在春秋战国时期，《庄子・天下篇》中就提出了一个有关无穷小的命题："一尺之棰，日取其半，万世不竭. "其含义是：一尺之棰，今天取其一半，明天取其一半的一半，如是"日取其半"，总有一半留下，所以"万世不竭". 一尺之棰是一个有限的物体，但它却可以无限地被分割下去，其剩余的长度是一个无穷小. 这个命题讲的是有限和无限的统一，有限之中有无限，其中正体现了"无穷小"的思想. 可以对这一过程进行数学抽象：设棰之剩余长度为y，天数为x，则依据此命题的含义，y与x应具有函数关系$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$. 从极限的角度来看，当$x\to+\infty$时，此函数极限为零. 因此，可以从极限的角度来理解无穷小，认为无穷小是一个以零为极限的函数.

1)无穷小

定义 7　如果函数$f(x)$当$x\to x_0$（或$x\to\infty$）时的极限为零，则称函数$f(x)$为当$x\to x_0$（或$x\to\infty$）时的无穷小.

性质 1　有限个无穷小的和也是无穷小.

性质 2　有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

推论 1　常数与无穷小的乘积是无穷小.

推论 2　有限个无穷小的乘积也是无穷小.

2)无穷大

定义 8　如果函数 $f(x)$当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时,对应的函数值的绝对值$|f(x)|$无限增大,则称函数 $f(x)$为当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的无穷大,记作$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$(或$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$).

3)无穷小和无穷大的关系

在自变量的同一变化过程中,如果 $f(x)$为无穷大,则$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷小;反之,如果 $f(x)$为无穷小,且 $f(x)\neq 0$,则$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷大.

4.函数极限的运算法则

记号“lim”下面没有标明自变量的变化过程,就表示 $x\to x_0$ 和 $x\to\infty$都是成立的.如果$\lim f(x)=A$,$\lim g(x)=B$,则有以下极限的运算法则.

法则 1　$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$.

法则 2　$\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$.

法则 3　$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}(B\neq 0)$.

法则 4　$\lim[Cf(x)]=C\lim f(x)=C\cdot A$($C$是常数).

法则 5　$\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n=A^n$($n$为正整数).

例 6　求$\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)$.

解　$\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)=\lim\limits_{x\to 1}2x-\lim\limits_{x\to 1}1=2\lim\limits_{x\to 1}x-1=2\times 1-1=1$.

例 7　求$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-x^2+1}{x+1}$.

解　这里分母的极限不为零,所以

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-x^2+1}{x+1}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(x^3-x^2+1)}{\lim\limits_{x\to 2}(x+1)}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}x^3-\lim\limits_{x\to 2}x^2+\lim\limits_{x\to 2}1}{\lim\limits_{x\to 2}x+\lim\limits_{x\to 2}1}=\frac{\left(\lim\limits_{x\to 2}x\right)^3-\left(\lim\limits_{x\to 2}x\right)^2+\lim\limits_{x\to 2}1}{\lim\limits_{x\to 2}x+\lim\limits_{x\to 2}1}$$

$$=\frac{2^3-2^2+1}{2+1}=\frac{5}{3}.$$

由例 6 和例 7 可以发现,求有理整函数或有理分式函数当 $x\to x_0$ 的极限时,只要用 x_0 代替函数中的 x 即可.

课中练习

求下列极限.

(1)$\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{1-x^2}$;(2)$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\cos x$;(3)$\lim\limits_{x\to 100}(\lg^2 x+3\lg x+4)$.

注意：当有理分式函数的分母代入数值后为 0 时，则需要特殊考虑.

例 8　求极限 $\lim\limits_{x \to 4}\dfrac{x^2-16}{x-4}$.

解　$\lim\limits_{x \to 4}\dfrac{x^2-16}{x-4}=\lim\limits_{x \to 4}\dfrac{(x+4)(x-4)}{x-4}$（按平方差公式因式分解）

$=\lim\limits_{x \to 4}(x+4)$（约分后再计算）

$=4+4=8$.

例 9　求极限 $\lim\limits_{x \to 3}\dfrac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}$.

解　将原式进行分子有理化，约分后再求极限.

$\lim\limits_{x \to 3}\dfrac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}=\lim\limits_{x \to 3}\dfrac{(\sqrt{x+6}-3)(\sqrt{x+6}+3)}{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)}$（分子、分母同乘以有理化因式）

$=\lim\limits_{x \to 3}\dfrac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)}=\lim\limits_{x \to 3}\dfrac{1}{\sqrt{x+6}+3}$（按平方差公式计算、约分）

$=\dfrac{1}{3+3}=\dfrac{1}{6}$.

例 10　求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x \to \infty}\dfrac{2x^2+x}{3x^2+2x+1}$；

(2) $\lim\limits_{x \to \infty}\dfrac{5x^2+1}{x^3-1}$；

(3) $\lim\limits_{x \to \infty}\dfrac{x^3+x^2-2x+5}{x^2+2x+1}$.

解　(1)将原式分子、分母同除以 x^2，然后按照极限的运算法则求极限.

$$\lim_{x \to \infty}\frac{2x^2+x}{3x^2+2x+1}=\lim_{x \to \infty}\frac{2+\frac{1}{x}}{3+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x \to \infty}\left(2+\frac{1}{x}\right)}{\lim\limits_{x \to \infty}\left(3+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x \to \infty}2+\lim\limits_{x \to \infty}\frac{1}{x}}{\lim\limits_{x \to \infty}3+2\lim\limits_{x \to \infty}\frac{1}{x}+\lim\limits_{x \to \infty}\frac{1}{x^2}}=\frac{2+0}{3+2\times0+0}=\frac{2}{3}.$$

(2)将原式分子、分母同除以 x^3，然后按照极限的运算法则求极限.

$$\lim_{x \to \infty}\frac{5x^2+1}{x^3-1}=\lim_{x \to \infty}\frac{\frac{5}{x}+\frac{1}{x^3}}{1-\frac{1}{x^3}}=\frac{\lim\limits_{x \to \infty}\left(\frac{5}{x}+\frac{1}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x \to \infty}\left(1-\frac{1}{x^3}\right)}=\frac{5\lim\limits_{x \to \infty}\frac{1}{x}+\lim\limits_{x \to \infty}\frac{1}{x^3}}{\lim\limits_{x \to \infty}1-\lim\limits_{x \to \infty}\frac{1}{x^3}}=\frac{0+0}{1-0}=0.$$

(3)将原式分子、分母同除以 x^2，然后按照极限的运算法则求极限.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2-2x+5}{x^2+2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{x^2}}{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}x+\lim\limits_{x\to\infty}1-2\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}+5\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty}1+2\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}}$$

$$=\frac{\infty+1-0+0}{1+0+0}=\infty.$$

由例 10 可以得出以下结论：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & m=n\\ 0, & m>n\\ \infty, & m<n\end{cases}.$$

根据这个结论，对于例 10 这样的极限可以直接得出结果.

5. 函数的连续性

连续性是函数的重要性质之一，它反映了许多自然现象的一个共同特性. 例如，气温的变化、动植物的生长、空气的流动等，都是随着时间在连续不断地变化着，这些现象反映在数学上，就是函数的连续性.

从直观上看，我们说一个函数在点 x_0 处连续是指这个函数的图像在点 x_0 处没有中断. 图 1-21 给出了连续函数与不连续函数的几种情况.

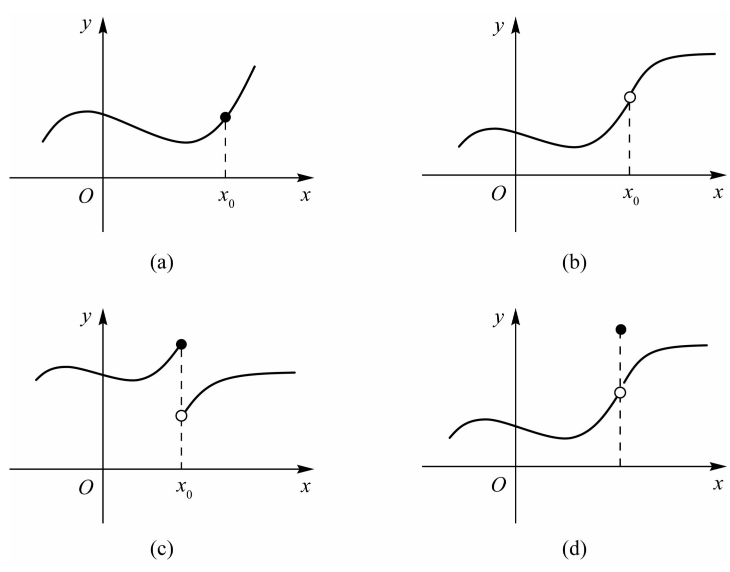

图 1-21

在图 1-21 中，(a)的函数图像在点 x_0 处是连续的，(b)(c)(d)的函数图像在点 x_0 处断开了，即在点 x_0 处是不连续的. (b)的函数在点 x_0 处没有定义；(c)的函数在点 x_0 处的极限不存在；(d)的函数在点 x_0 处的极限存在，但不等于函数在点 x_0 处的函数值.

一般地，函数 $f(x)$在点 x_0 处连续必须满足以下三个条件：

(1)函数 $f(x)$在点 x_0 处及其附近有定义.

(2)$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在.

(3)$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

下面给出函数 $f(x)$在点 x_0 处连续的定义.

定义9　设函数 $y=f(x)$在点 x_0 处及其附近有定义，如果极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，并且

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0),$$

那么就称函数 $f(x)$在点 x_0 处连续.

上述三个条件中，只要有一个条件不满足，函数 $y=f(x)$在点 x_0 处就是不连续的，这时的点 x_0 称为函数 $f(x)$的间断点.

函数的间断点可以分为两大类.

(1)若函数 $f(x)$在点 x_0 处的左极限和右极限都存在且不等于 $f(x_0)$，则称点 x_0 为函数 $f(x)$的第一类间断点. 如果 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)\neq f(x_0)$(或 $f(x_0)$没有定义)，则称点 x_0 为 $f(x)$的可去间断点；如果 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$，则称点 x_0 为 $f(x)$的跳跃间断点.

(2)若函数 $f(x)$在点 x_0 处的左极限和右极限至少有一个不存在，则称点 x_0 为函数 $f(x)$的第二类间断点. 如果 $f(x)$的左极限或右极限是无穷大，则称点 x_0 为 $f(x)$的无穷间断点.

例如，函数 $f(x)=\tan x$ 在 $x=\frac{\pi}{2}$处没有定义，且$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x=+\infty$，故称 $x=\frac{\pi}{2}$是函数 $f(x)=\tan x$ 的无穷间断点.

又如，函数 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$在$x=0$ 处没有定义，且当 $x\to 0$ 时，函数值在-1 和 1 之间无限次地变动，故称 $x=0$ 是函数 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$的振荡间断点.

例11　讨论下列函数在给定点处的连续性.

(1)$f(x)=\frac{1}{x}$，在 $x=0$ 处.

(2)$g(x)=\sin x$，在 $x=0$ 处.

解　(1)函数 $f(x)=\frac{1}{x}$在$x=0$ 处没有定义，因而它在 $x=0$ 处不连续，即 $x=0$ 是函数 $f(x)=\frac{1}{x}$的间断点.

(2)因为$\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0=\sin 0$，所以 $g(x)=\sin x$ 在 $x=0$ 处是连续的.

如果函数 $y=f(x)$在点 x_0 及其右侧(或左侧)有定义，而且 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$(或 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$)，那么就说函数 $f(x)$在点 x_0 处右连续(或左连续).

如果函数 $f(x)$在开区间(a,b)内每一点处都连续，则称函数 $f(x)$在开区间(a,b)内连续，或称 $f(x)$是开区间(a,b)内的连续函数. 如果函数 $f(x)$在开区间(a,b)内连续，在左端点

$x=a$ 处右连续，在右端点 $x=b$ 处左连续，则称函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续.

例如，函数 $y=x^2$ 在闭区间 $[-1,1]$ 上连续，而函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在开区间 $(0,1)$ 内连续，在闭区间 $[0,1]$ 上不连续，因为它在左端点 $x=0$ 处不是右连续.

例 12 讨论下列函数在给定点处的连续性.

(1) $f(x)=\begin{cases} x^2+1, x\geqslant 0 \\ x+1, x<0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处.

(2) $g(x)=\begin{cases} x^2, x\geqslant 0 \\ x+1, x<0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处.

解　画出这两个函数的图像，如图 1-22 所示. 从图像上可以直观地看出，函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，函数 $g(x)$ 在 $x=0$ 处不连续.

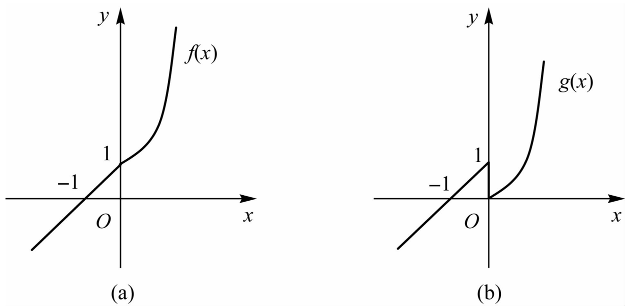

图 1-22

用函数连续的定义或绘制函数图像来判断分段函数在分段点处的连续性是很麻烦的，可以用更加简便的方法.

将分段点 $x=0$ 分别代入分段函数的两个式子，如果值相等，那么在分段点 $x=0$ 处函数连续，否则不连续.

由于 $0^2+1=0+1$，所以函数 $f(x)=\begin{cases} x^2+1, x\geqslant 0 \\ x+1, x<0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续.

由于 $0^2\neq 0+1$，所以函数 $g(x)=\begin{cases} x^2, x\geqslant 0 \\ x+1, x<0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处不连续.

1.2.3　计算与应用模块

1. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2+3x+4}{x}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+5}{x^2+3}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}$；

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+1}{2x^2-x+3}$；　　(6) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{3-x}}{x-1}$；

(7) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2}{x^2+1}$；　　(8) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2-x+1}{3x^2-x+1}$；

(9) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2x+3}{x^3+1}$；

(10) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-x^2-6x^3}{2x-5x^2-3x^3}$；

(11) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4-2x^2+1}{x^3+1}$；

(12) $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)$.

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases}2x, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 3-x, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$.

(1)求极限 $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)$；

(2)求极限 $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)$；

(3)讨论极限 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 是否存在.

3. 选择题.

(1)下列极限不存在的是(　　).

A. $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x$　　B. $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x$　　C. $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$　　D. $\lim\limits_{x\to 0}\arctan x$

(2)设函数 $f(x)=\begin{cases}x+1, x\geqslant 0\\ x-1, x<0\end{cases}$,则极限 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 的值是(　　).

A. 1　　B. -1　　C. 0　　D. 不存在

(3)已知函数 $f(x)=\begin{cases}x-1, & x>0\\ 0, & x=0\\ x+1, & x<0\end{cases}$,则极限 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 的值是(　　).

A. 0　　B. -1　　C. 1　　D. 不存在

(4)已知极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax^2-2x+3}{bx^2+3x-6}=\dfrac{2}{3}$,那么 a 与 b 的值可以是(　　).

A. 2 和 3　　B. 4 和 6　　C. $\dfrac{1}{3}$ 和 $\dfrac{1}{2}$　　D. 以上均正确

(5)已知极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{ax^2+x+5}{bx^2-x-7}=0$,那么 a 与 b 的值为(　　).

A. $a=0$ 或 $b=0$　　B. $a=0$ 且 $b=0$　　C. $a=0,b\neq 0$　　D. $a\neq 0,b=0$

(6)若函数 $f(x)=\begin{cases}2x+a, & x\leqslant 0\\ x^2, & x>0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,则 a 的值等于(　　).

A. 0　　B. -1　　C. 1　　D. 2

(7)若函数 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x\leqslant 0\\ a+x, & x>0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的极限存在,则 a 的值等于(　　).

A. 0　　B. 1　　C. -1　　D. 0

1.2.4　能力提升模块

1. 下列等式不成立的是(　　).

A. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{x}}=1$　　B. $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=1$

C. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{\sin x}=1$　　D. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\tan x)}{x}=1$

2. 设 $f(x)=\begin{cases} x+\dfrac{\sin x}{x}, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x\cos\dfrac{1}{x}, & x>0 \end{cases}$,则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的(　　).

A. 连续点　　B. 可去间断点　　C. 跳跃间断点　　D. 第二类间断点

3. 下列命题正确的是(　　).

A. 无穷小是一个很小很小的数　　B. 无穷大是一个很大很大的数

C. 无穷大必是无界变量　　D. 无界变量必是无穷大

4. 若函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x>0 \\ a+x^2, & x\leqslant 0 \end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续,则 $a=$(　　).

A. 2　　B. 0　　C. 1　　D. -1

5. 若函数 $f(x)=\begin{cases} x+4, & x\leqslant 0 \\ -2x-1, & x>0 \end{cases}$,则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的(　　).

A. 可去间断点　　B. 跳跃间断点　　C. 振荡间断点　　D. 连续点

6. 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{1+x}+ax-b\right)=1$,则 $a=$__________,$b=$__________.

7. 若 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+ax+b}{x^2-x-2}=2$,则 $a=$__________,$b=$__________.

8. 若函数 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x^2}, & x\neq 0 \\ a, & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,则 $a=$__________.

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^3+10n+8}{(2n+1)(6n^2-1)}=$__________.

10. 若函数 $f(x)=\begin{cases} 3x+a, & x<0 \\ e^x+1, & x\geqslant 0 \end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续,则 $a=$__________.

11. 求 $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ 的间断点,并判断其类型.

1.3 两个重要极限

1.3.1 导入模块

学习目标

(1)理解两个重要极限.

(2)能够灵活应用两个重要极限.

情境引入

思考 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$ 是否存在.

自主探究

1. 当 $x\to x_0$ 时，函数极限的求法.

2. 当 $x\to\infty$时，函数极限的求法.

3. 通过自学，解决下列问题.

(1) 理解并求解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=$__________；

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=$__________，$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=$__________，认真理解这两个极限的关系.

1.3.2　基础知识模块

引例 1　利用刘徽割圆术，根据初等几何知识可以求出 $S_n=\dfrac{nR^2}{2}\sin\dfrac{2\pi}{n}$. 当 n 趋向于无穷大时，则可以得到圆的面积，即 $S=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{nR^2}{2}\sin\dfrac{2\pi}{n}$. 如果令 $x=\dfrac{1}{n}$，则这个极限可化为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{R^2\sin 2\pi x}{2x}$，可利用极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$ 来计算.

下面通过列表和作图来讨论极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$ 的结果.

列表(表 1-4).

表 1-4

x(弧度)	$\sin x$	$\dfrac{\sin x}{x}$
0.17453	0.17365	0.995
0.08727	0.08716	0.9987
0.034907	0.034899	0.9998
0.017453	0.017452	0.99994
0.0087266	0.0087265	0.99999
0	0	没有定义
−0.0087266	−0.0087265	0.99999
−0.017453	−0.017452	0.99994
−0.034907	−0.034899	0.9998
−0.08727	−0.08716	0.9987
−0.17453	−0.17365	0.995

作图(图 1-23).

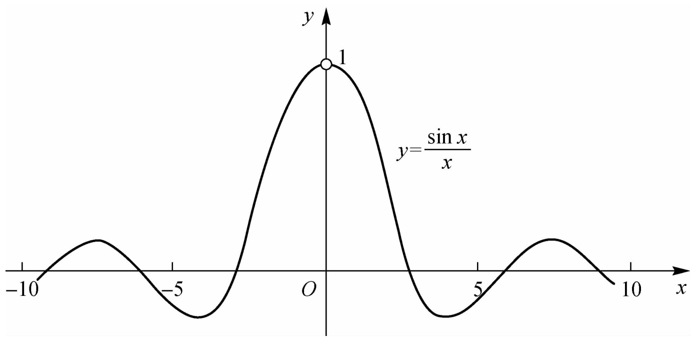

图 1-23

从表格和图像中可以清楚地看到,当 x 从 0 的两侧越来越接近 0 时(但没有到达 0 值),$\frac{\sin x}{x}$越来越接近 1,于是得到结论:$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

引例 2　自然对数 e 在科技生产中被广泛使用.以 e 为底数,许多式子都能得到简化.e 是“自然律”的精髓,在数学上它是函数 $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 当 $x\to\infty$时的极限.人们在研究一些实际问题(如物体的冷却、细胞的繁殖、放射性元素的衰变)时,都会涉及极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$及自然对数 e.正是这种从无限变化中获得的有限,充分体现了宇宙的形成、发展及衰亡中最本质的东西.

下面通过列表和图像来观察极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.

列表(表 1-5).

表 1-5

x	10	100	1000	10000	100000	1000000	10000000	…
$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$	2.59374	2.70481	2.711692	2.71815	2.71827	2.71828	2.718281	…

作图(图 1-24).

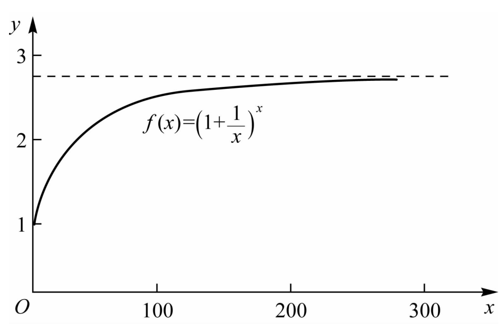

图 1-24

从表格和图像中可以看出，当 $x\to+\infty$时，$f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$ 越来越接近一个介于 2 与 3 之间的数，这个数就是自然对数 e，e=2.71828…，于是得到结论：$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$.

用同样的方法可得 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$，所以有

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}.$$

1. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

例 1　求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\times 2\right)$（将函数化为公式型）

$=2\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)$（按极限的运算法则 4）

$=2\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}$（变量 x 化为 t：令 $t=2x$，当 $x\to 0$ 时，$t\to 0$）

$=2$（按公式得出）.

例 2　求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)$$\left(\text{应用三角公式 }\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}$（按极限的运算法则 2）

$=1\cdot\frac{1}{\cos 0}$$\left(\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\text{为连续函数的极限}\right)$$=1$.

2. 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$，$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$

例 3　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}$.

解　$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{2}$（将函数化为公式型）

$=\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{2}$（按极限的运算法则 5）$=\mathrm{e}^{2}$（按公式得出）.

例 4　求 $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}\times 2}$（将函数化为公式型）

$=[\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}}]^{2}$（按极限的运算法则 5）

$=[\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}]^{2}$（变量 x 化为 t：令 $t=2x$，当 $x\to 0$ 时，$t\to 0$）

$=\mathrm{e}^{2}$（按公式得出）.

1.3.3 计算与应用模块

1. 选择题.

(1)极限$\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=$(　　).

A. e^{-1}　　B. $e^{\frac{1}{2}}$　　C. e　　D. e^2

(2)极限$\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}=$(　　).

A. e^{-1}　　B. $e^{\frac{1}{2}}$　　C. e　　D. e^2

(3)极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=$(　　).

A. 1　　B. ∞　　C. 0　　D. 不存在

2. 计算下列极限.

(1)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$;

(2)$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(x^2-1)}{x-1}$;

(3)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}$;

(4)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{\tan 4x}$;

(5)$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{2}}$;

(6)$\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}$;

(7)$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x+2}$;

(8)$\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{2}{x}}$.

1.3.4 能力提升模块

1. 下列各式正确的是(　　).

A. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=0$

B. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=1$

C. $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=1$

D. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\sin\frac{1}{x-1}=0$

2. 下列等式不成立的是(　　).

A. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{x}}=1$

B. $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=1$

C. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{\sin x}=1$

D. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(\tan x)}{x}=1$

3. 极限$\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{2}{x}}=$(　　).

A. $e^{-\frac{2}{3}}$　　B. e^6

C. e^{-6}　　D. e

4. 极限$\lim\limits_{x\to 0}(1+3\tan^2 x)^{\cot^2 x}=$(　　).

A. e^{-3}　　B. e^3

C. e　　D. e^2

5. 极限$\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{x-1}{x}}=$(　　).

A. 0　　　　B. 1

C. $e^{-\frac{1}{2}}$　　　　D. ∞

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\tan 3x}=$__________.

7. $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=$__________.

8. 设$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+k}{x-2k}\right)^{x}=8$,则 $k=$__________.

9. $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{3}{\sin x}}=$__________.

10. 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0^{+}}\dfrac{\ln(\tan 5x)}{\ln(\tan 2x)}$.

11. 计算极限$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\cot^{2}x}$.