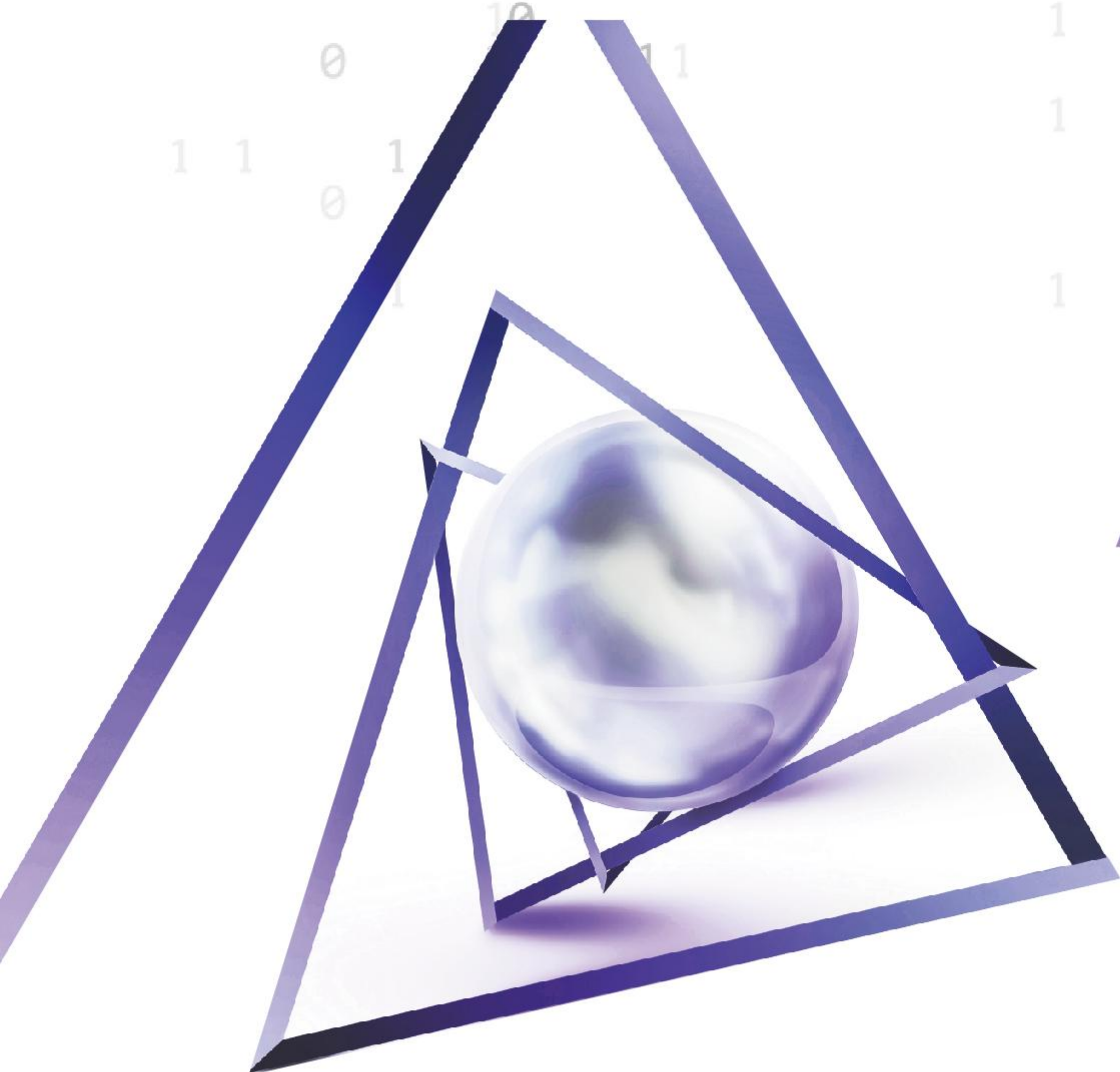


巍巍交大 百年书香
www.jiaodapress.com.cn
bookinfo@sjtu.edu.cn



策划编辑 金颖杰
责任编辑 胡思佳
封面设计 刘文东



Advanced Mathematics

高等数学

(上册)

高等职业教育本科数学系列教材

高等数学(上册)

主编 王冬琳

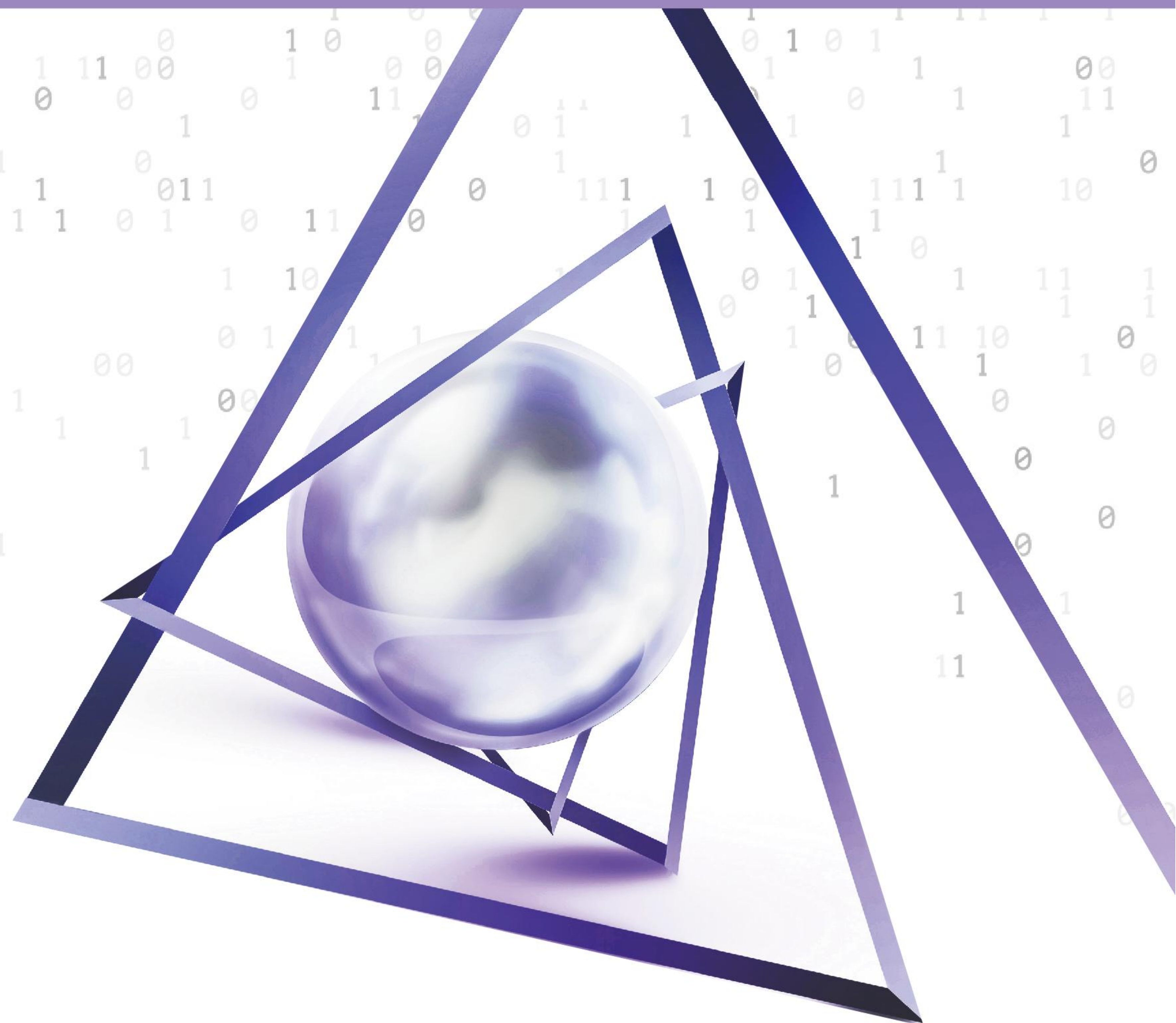
Advanced Mathematics

高等职业教育本科数学系列教材

高等数学

(上册)

主编 王冬琳



上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS



扫描二维码
关注上海交通大学出版社
官方微信

ISBN 978-7-313-33573-9



9 787313 335739 >

定价:49.90元

免费提供
精品教学资料包
服务热线:400-615-1233
www.xinsijiaocai.com



上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

Advanced Mathematics

高等职业教育本科数学系列教材

高等数学

(上册)

主编 王冬琳
副主编 王瑜 闫琳静 孔祥铭



上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

内容提要

本书以职业本科院校专业群建设需求和高等数学课程教学改革实践为背景,融入职业教育“学数学、用数学”的教学理念,并在分析国内外同类教材发展趋势的基础上编写而成.全书旨在帮助学生系统掌握高等数学的基本概念、基本理论和基本方法,提升逻辑推理能力、空间想象能力以及解决实际问题的能力.

本书分为上、下两册.本册为上册,共八章,内容包括映射与函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用和常微分方程.

本书既可作为职业本科院校高等数学课程的教材,也可作为相关人员的学习参考资料.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.上册 / 王冬琳主编. -- 上海: 上海交通大学出版社, 2025. 11. -- ISBN 978-7-313-33573-9

I. O13

中国国家版本馆 CIP 数据核字第 2025WZ1147 号

高等数学(上册)

GAODENG SHUXUE(SHANGCE)

主 编:王冬琳

出版发行:上海交通大学出版社

邮政编码:200030

印 制:河北龙大印务有限公司

开 本:850 mm×1 168 mm 1/16

字 数:530 千字

版 次:2025 年 11 月第 1 版

书 号:ISBN 978-7-313-33573-9

定 价:49.90 元

地 址:上海市番禺路 951 号

电 话:021-64071208

经 销:全国新华书店

印 张:16.75

印 次:2025 年 11 月第 1 次印刷

版权所有 侵权必究

告读者:如您发现本书有印装质量问题请与印刷厂质量科联系

联系电话:0316-3655788

前言

中共中央、国务院印发的《教育强国建设规划纲要(2024—2035年)》明确提出“稳步扩大职业本科学校数量和招生规模”。这一部署凸显了职业本科教育在我国教育体系中的重要地位,是顺应新时代发展要求、服务经济社会高质量发展的重要制度安排。作为现代化职业教育体系的重要组成部分,职业本科教育面向产业发展和技术进步的需求,重点培养具备较强实践能力和综合素养的高层次技术技能人才,并通过推动产教深度融合,实现人才培养与产业链关键岗位需求的有效衔接。

为提升职业本科人才培养的针对性和适用性,我们组织编写了“高等职业教育本科数学系列教材”。本系列教材紧密围绕职业本科人才培养目标,坚持以实践应用为导向,在系统阐述数学基本理论的基础上,注重强化数学方法在专业领域中的应用,引导学生在解决实际问题的过程中深化对数学知识的理解,着力提升其应用能力与工程素养。高等数学是一门重要的公共基础课程,是学生学习专业知识、提升职业技能、提高文化素养和培养获取新知识能力的重要基础,同时也是学生今后生活与工作实践中的重要工具。本书以职业本科院校专业群建设需求和高等数学课程教学改革实践为背景,融入职业教育“学数学、用数学”的教学理念,并在分析国内外同类教材发展趋势的基础上编写而成。全书旨在帮助学生系统掌握高等数学的基本概念、基本理论和基本方法,提升逻辑推理能力、空间想象能力以及解决实际问题的能力。

本书分为上、下两册。本册为上册,共八章,内容包括映射与函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用和常微分方程。

本书具有以下特点。

1. 落实立德树人根本任务,融入思政元素

《关于推动现代职业教育高质量发展的意见》提出“坚持立德树人、德技并修,推动思想政治教育与技术技能培养融合统一”。本书在各章设置“数学文化”栏目,注重培养学生的数学思想、爱国精神和求实精神。

2. 遵循学生认知规律,合理安排知识结构

本书全面涵盖职业本科高等数学课程所需知识点,构建了较为完整的知识体系。各知识点逻辑关系明确,有利于系统培养学生的数学素养和应用能力。行文力求语言简洁明了、表述通俗易懂,使学生在较为轻松的学习氛围中体会数学之美。

3. 落实因材施教的原则,注重应用拓展

本书精选大量具有针对性的例题进行讲解,强调习题与知识点的一一对应,并按难易程度将习题划分为 A 基础题和 B 提高题,便于师生选用,体现因材施教原则. 在每章设置“应用拓展”栏目,将数学知识与实际生活和专业应用相联系,便于学生理解与运用.

4. 体现时代特征,巧用信息技术工具

本书积极引入现代教学手段,结合计算机技术,以 MATLAB 软件为平台设计数学实验,鼓励学生探索新的学习方式;同时配套丰富的数字化资源,如教学资源包等,为师生提供多元化教学支持与服务.

本书由北京科技职业大学王冬琳任主编,王瑜、闫琳静、孔祥铭任副主编.

在编写本书过程中,编者参考了多种教材和著作,并得到有关领导和专家的大力支持与帮助,在此谨致以衷心的感谢.

由于编者水平有限,书中难免存在不足,恳请广大读者批评指正.

编 者

目录

第 1 章	映射与函数	1
	学习目标	2
	本章导语	2
	数学文化	2
	1.1 映射的相关概念	3
	1.1.1 映射的概念	3
	1.1.2 逆映射	3
	1.1.3 复合映射	4
	1.2 函数及其性质	4
	1.2.1 区间与邻域	4
	1.2.2 函数的定义及表示方法	5
	1.2.3 分段函数	6
	1.2.4 函数的性质	7
	1.2.5 反函数	9
	1.3 初等函数	11
	1.3.1 基本初等函数	11
	1.3.2 双曲函数和反双曲函数	14
	1.3.3 复合函数	16
	1.3.4 函数的四则运算	16
	1.3.5 初等函数的定义	17
	本章小结	17
	应用拓展	18
	复习题	18
第 2 章	极限与连续	20
	学习目标	21

本章导语	21
数学文化	21
2.1 数列的极限	22
2.1.1 数列与数列极限的定义	22
2.1.2 收敛数列的性质	24
2.2 函数的极限	28
2.2.1 函数极限的定义	28
2.2.2 函数极限的性质	30
2.2.3 函数极限的四则运算法则	32
2.3 无穷小与无穷大	34
2.3.1 无穷小的概念	34
2.3.2 无穷小的运算性质	35
2.3.3 无穷大的概念	36
2.3.4 无穷小与无穷大的关系	37
2.3.5 无穷小的阶的定义	38
2.3.6 等价无穷小	38
2.4 两个重要极限	40
2.4.1 第一个重要极限	41
2.4.2 第二个重要极限	42
2.5 函数的连续性与间断点	43
2.5.1 函数的连续性	43
2.5.2 函数的间断点	46
2.6 连续函数的运算与性质	49
2.6.1 连续函数的四则运算	49
2.6.2 反函数与复合函数的连续性	49
2.6.3 初等函数的连续性	51
2.6.4 闭区间上连续函数的性质	51
2.6.5 一致连续性	54
本章小结	54
应用拓展	55
复习题	57

第 3 章

导数与微分 60

学习目标	61
本章导语	61
数学文化	61
3.1 导数的概念	62
3.1.1 导数概念的引例	62
3.1.2 导数的定义	63
3.1.3 导数的几何意义	66



3.1.4	函数的可导性与连续性的关系	67
3.1.5	无尖角的连续曲线	68
3.2	函数的求导法则	69
3.2.1	函数的和、差、积、商的求导法则	69
3.2.2	反函数的求导法则	71
3.2.3	常数和基本初等函数的导数公式	72
3.2.4	复合函数的求导法则	72
3.3	高阶导数	74
3.3.1	高阶导数的定义	74
3.3.2	常见的高阶导数公式	76
3.4	隐函数及由参数方程确定的函数的导数	77
3.4.1	隐函数的导数	77
3.4.2	由参数方程确定的函数的导数	79
3.4.3	相关变化率	80
3.5	函数的微分	81
3.5.1	微分的引例	81
3.5.2	微分的概念	82
3.5.3	微分的几何意义	83
3.5.4	微分公式与法则	83
3.5.5	微分在近似计算中的应用	85
	本章小结	87
	应用拓展	88
	复习题	90

第 4 章

	微分中值定理与导数的应用	93
	学习目标	94
	本章导语	94
	数学文化	94
4.1	微分中值定理	95
4.1.1	罗尔中值定理	95
4.1.2	拉格朗日中值定理	96
4.1.3	柯西中值定理	97
4.2	洛必达法则	99
4.2.1	$\frac{0}{0}$ 型未定式	99
4.2.2	$\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式	100
4.2.3	其他类型的未定式	101
4.3	函数的单调性	103
4.3.1	函数单调性的判定	103
4.3.2	函数单调性的应用	105

4.4	函数的极值与最值	105
4.4.1	函数的极值	105
4.4.2	函数的最值	107
4.5	曲线的凹凸性与函数图像的描绘	109
4.5.1	曲线的凹凸性	109
4.5.2	曲线的拐点	110
4.5.3	曲线的渐近线	111
4.5.4	函数图像的描绘	112
4.6	曲率	114
4.6.1	弧微分	114
4.6.2	曲率的概念及计算	115
4.6.3	曲率圆与曲率半径	118
4.6.4	曲率中心的计算公式	118
4.7	导数在经济学中的应用	120
4.7.1	边际分析	120
4.7.2	弹性分析	122
4.7.3	最优化问题	124
	本章小结	126
	应用拓展	127
	复习题	129

第 5 章

	不定积分	132
	学习目标	133
	本章导语	133
	数学文化	133
5.1	不定积分的概念与性质	133
5.1.1	原函数	133
5.1.2	不定积分的概念	134
5.1.3	不定积分的几何意义	135
5.1.4	不定积分的性质	135
5.1.5	不定积分的基本公式	136
5.2	换元积分法	138
5.2.1	第一类换元积分法	138
5.2.2	第二类换元积分法	141
5.3	分部积分法	144
5.3.1	单一函数的积分	145
5.3.2	两相乘函数的积分	145
5.4	有理函数的积分与积分表的使用	147
5.4.1	化真分式为最简分式之和	148

5.4.2 四种最简分式的积分	149
5.4.3 三角有理函数的积分	152
5.4.4 简单无理函数的积分	153
5.4.5 积分表的使用	154
本章小结	155
应用拓展	156
复习题	157

第 6 章

定积分 159

学习目标	160
本章导语	160
数学文化	160
6.1 定积分的概念与性质	160
6.1.1 定积分问题举例	160
6.1.2 定积分的定义	162
6.1.3 定积分的几何意义	165
6.1.4 定积分的性质	166
6.2 微积分基本定理	170
6.2.1 变速直线运动中位置函数与速度函数的关系	170
6.2.2 变上限积分函数及其导数	170
6.2.3 牛顿-莱布尼茨公式	171
6.3 定积分的换元积分法和分部积分法	173
6.3.1 定积分的换元积分法	173
6.3.2 定积分的分部积分法	176
6.4 反常积分	178
6.4.1 无穷区间上的反常积分	178
6.4.2 无界函数的反常积分	180
本章小结	182
应用拓展	183
复习题	185

第 7 章

定积分的应用 188

学习目标	189
本章导语	189
数学文化	189
7.1 微元法及其在几何中的应用	190
7.1.1 定积分的微元法	190
7.1.2 微元法在几何中的应用	191

7.2 定积分在物理中的应用	200
7.2.1 求变力沿直线所做的功	200
7.2.2 求液体的压力	201
7.2.3 求引力	202
7.3 定积分在经济学中的应用	202
7.3.1 由边际函数求总量函数	202
7.3.2 求消费者剩余与生产者剩余	203
本章小结	205
应用拓展	205
复习题	207

第 8 章

常微分方程	209
学习目标	210
本章导语	210
数学文化	210
8.1 微分方程的基本概念	210
8.2 可分离变量的微分方程与齐次方程	212
8.2.1 可分离变量的微分方程	212
8.2.2 齐次方程	214
8.3 线性微分方程与伯努利方程	217
8.3.1 线性微分方程	217
8.3.2 伯努利方程	219
8.4 可降阶的高阶微分方程	220
8.4.1 $y^{(n)} = f(x)$ 型的微分方程	221
8.4.2 $y'' = f(x, y')$ 型的微分方程	221
8.4.3 $y'' = f(y, y')$ 型的微分方程	222
8.5 线性微分方程解的结构	223
8.6 常系数线性微分方程	225
8.6.1 常系数齐次线性微分方程	225
8.6.2 常系数非齐次线性微分方程	229
本章小结	233
应用拓展	234
复习题	235

附录	237
----	-----

参考文献	258
------	-----

第 1 章

映射与函数

映射与函数

映射的相关概念

映射的概念

逆映射

复合映射

函数及其性质

区间与邻域

函数的定义及表示方法

分段函数

函数的性质

反函数

初等函数

基本初等函数

双曲函数和反双曲函数

复合函数

函数的四则运算

初等函数的定义



学习目标

- (1) 了解映射的相关概念.
- (2) 理解函数的概念, 会求函数的定义域、表达式及函数值, 会建立应用问题的函数关系.
- (3) 掌握函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.
- (4) 理解分段函数、反函数和复合函数的概念.
- (5) 掌握函数的四则运算与复合运算.
- (6) 掌握基本初等函数的性质及图像, 理解初等函数的定义.



本章导语

函数描述了客观世界中量与量之间的依赖关系, 是高等数学的重要研究对象. 本章将在中学数学中函数知识的基础上, 介绍函数的概念、函数的性质、反函数、复合函数和初等函数等. 随后, 将进一步研究函数自变量在按某种方式变化的过程中因变量的变化规律, 从而引出极限的概念.

数学文化

函数概念的发展历史

17 世纪, 科学家们致力于运动的研究, 如计算天体的位置、远距离航海时对经度和纬度的测量、炮弹的速度对于高度和射程的影响等. 解决诸如此类的问题, 都需要探究两个变量之间的关系, 并根据这种关系对事物的变化规律进行总结, 如根据炮弹的速度推测炮弹能达到的高度和射程. 这正是函数产生和发展的背景.

函数概念的发展主要经历了以下几个历史时期.

1. 早期函数概念——几何观点下的函数

1673 年, 德国数学家莱布尼茨 (Leibniz, 1646—1716) 首次使用 “function(函数)” 表示 “量”, 后来他用该词表示曲线上点的横坐标、纵坐标、切线长等随曲线变化而改变的几何量.

2. 18 世纪的函数概念——代数观点下的函数

1718 年, 瑞士数学家约翰·伯努利 (Johann Bernoulli, 1667—1748) 在莱布尼茨函数概念的基础上对函数进行了定义: “由任一变量和常数的任一形式构成的量.” 他强调函数要用公式来表示. 1755 年, 瑞士数学家欧拉 (Euler, 1707—1783) 把函数定义为: “如果某些变量以某一种方式依赖于另一些变量, 即当后面这些变量变化时, 前面这些变量也随着变化, 我们把前面的变量称为后面变量的函数.” 他把约翰·伯努利给出的函数称为解析函数, 并进一步把它区分为代数函数和超越函数, 还称其为 “随意函数”.

3. 19 世纪的函数概念——对应关系下的函数

1821 年, 法国数学家柯西 (Cauchy, 1789—1857) 从变量关系出发给出了函数概念: “在某些变量间存在着一定的关系, 当一经给定其中某一变量的值, 其他变量的值可随着而确定时, 将最初的变量叫作自变量, 其他各变量叫作函数.” 在柯西的定义中, 首次出现了 “自变量” 一词, 同时指出对函数来说不一定要有解析表达式, 不过他仍然认为函数关系要用若干解析式来表示, 这是一个很大的局限. 1837 年, 德国数学家狄利克雷 (Dirichlet, 1805—1859) 拓展了函数概念, 他指出: “对于某区间上每个确定的 x 值, y 都有一个唯一确定的值与之对应, 那么 y 叫作 x 的函数.” 这个定义避免了在函数定义中直接描述 “依赖关系”, 以清晰的方式被数学界广泛接受, 这就是人们常说的经典函数定义.

4. 现代函数概念——集合论下的函数

1914年,德国数学家豪斯道夫(Hausdorff, 1868—1942)在他的《集合论纲要》中用“序偶”的概念来刻画函数,把函数看作由若干序偶组成的集合,从而避开了意义不够明确的“变量”“对应”等术语.1921年,波兰数学家库拉托夫斯基(Kuratowski, 1896—1980)用集合概念来定义“序偶”,使豪斯道夫的函数定义更加严谨.随着集合论的发展,现代函数的集合论定义确立:若对于集合 M 的任意元素 x ,总有集合 N 中确定的元素 y 与之对应,则称在集合 M 上定义了一个到集合 N 的函数,记为 $y=f(x)$.元素 x 称为自变量,元素 y 称为因变量.

函数概念的发展与生产、生活及科学发展的实际需求紧密相关.随着研究的不断深入,函数概念逐步获得更加严格、精确的表述,这与我们学习函数的过程是一致的.

1.1 映射的相关概念

1.1.1 映射的概念

定义 1 在两个非空集合 A, B 之间存在一个法则 f ,使得对 A 中每个元素 x 在 B 中有唯一确定的元素 y 与之对应,那么称 f 为从 A 到 B 的映射,记作 $f:A \rightarrow B$.其中 y 称为元素 x (在映射 f 下)的像,并记作 $f(x)$,而元素 x 称为元素 y (在映射 f 下)的一个原像.集合 A 称为映射 f 的定义域,记作 D_f ,即 $D_f=A$. A 中所有元素的像所组成的集合称为映射 f 的值域,记作 R_f 或 $f(A)$,即

$$R_f = f(A) = \{f(x) | x \in A\}.$$

若 $R_f=B$,即 B 中每个元素 y 都是 A 中某个元素在 f 下的像,则称 f 为 A 到 B 的满射.若对 A 中任意两个不同的元素 $x_1 \neq x_2$,恒有 $f(x_1) \neq f(x_2)$,则称 f 为 A 到 B 的单射.若映射 f 既是单射又是满射,则称 f 为一一映射(或双射).

注意

- (1) 构成一个映射必须具备以下三个要素:集合 A ,即定义域 $D_f=A$;集合 B ,其中值域 $R_f \subseteq B$;对应法则 f ,使得对每个 $x \in A$,在 B 中有唯一确定的 $y=f(x)$ 与之对应.
- (2) 集合 A 和 B 不仅可以是数集,也可以是点集等其他种类的非空集合.
- (3) 对每个 $x \in A$,元素 x 的像 y 是唯一的;而对每个 $y \in R_f$,元素 y 的原像 x 不一定是唯一的;映射 f 的值域 R_f 是 B 的一个子集,即 $R_f \subseteq B$,但不一定有 $R_f=B$.

例 1 设 $f:\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$,对每个 $x \in \mathbf{R}$, $f(x)=|x|$.显然, f 是一个映射,其定义域为 $D_f=\mathbf{R}$,值域为 $R_f=\{y | y \geq 0\}$,它是 $\mathbf{R}$ 的一个真子集.对于 R_f 中的元素 y ,除 $y=0$ 外,它的原像不是唯一的.如 $y=3$ 的原像就有 $x=3$ 和 $x=-3$ 两个.所以 f 既非单射,也非满射.

例 2 设 $X=\{(x,y) | |x|+2|y|=4\}$, $Y=\{(x,0) | |x| \leq 4\}$.定义映射 $f:X \rightarrow Y$,对每个 $(x,y) \in X$,都有唯一确定的 $(x,0) \in Y$ 与之对应.显然 f 是一个映射,其定义域为 $D_f=X$,值域为 $R_f=Y$.在几何上,映射 f 表示将平面上以原点为中心的菱形上的点投影到 x 轴上区间 $[-4,4]$ 内.所以 f 不是单射,而是满射.

例 3 设 $f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1,1]$,对每个 $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $f(x)=\sin x$. f 是一个映射,其定义域为 $D_f=\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,值域为 $R_f=[-1,1]$. f 既是单射又是满射,因此 f 为一一映射.

1.1.2 逆映射

定义 2 设 f 为 A 到 B 的单射,由定义 1,对每个 $y \in R_f$,都有唯一的 $x \in A$ 使得 $f(x)=y$.于是,我们

可定义一个从 R_f 到 A 的新映射 g , 即 $g: R_f \rightarrow A$. 对每个 $y \in R_f$, 规定 $g(y) = x$, 其中 x 满足 $f(x) = y$. 这个映射 g 称为 f 的逆映射, 记作 f^{-1} , 其定义域为 $D_{f^{-1}} = R_f$, 值域为 $R_{f^{-1}} = A$. 只有单射才存在逆映射.

1.1.3 复合映射

定义 3 设有两个映射 $g: A \rightarrow B_1, f: B_2 \rightarrow C$, 其中 $B_1 \subseteq B_2$, 则由映射 g 和 f 可以定出一个从 A 到 C 的对应法则: 它将每个 $x \in A$ 映成 $f[g(x)] \in C$. 显然, 这个对应法则确定了一个从 A 到 C 的映射, 这个映射称为映射 g 和 f 构成的复合映射, 记作 $f \circ g: A \rightarrow C, (f \circ g)(x) = f[g(x)], x \in A$.

由复合映射的定义可知, 映射 g 和 f 构成复合映射的条件是: g 的值域 R_g 必须包含在 f 的定义域内, 即 $R_g \subseteq D_f$, 否则不能构成复合映射.

注意

映射 g 和 f 的复合是有顺序的, $f \circ g$ 有意义并不表示 $g \circ f$ 也有意义. 即使 $f \circ g$ 与 $g \circ f$ 都有意义, 复合映射 $f \circ g$ 与 $g \circ f$ 也未必相同.

例 4 设有映射 $g: \mathbf{R} \rightarrow [-1, 1]$, 对每个 $x \in \mathbf{R}$, 有 $g(x) = \sin x$; 又设映射 $f: [-1, 1] \rightarrow [0, 1]$, 对每个 $u \in [-1, 1]$, 有 $f(u) = \sqrt{1-u^2}$. 则映射 f 与 g 可构成复合映射 $f \circ g: \mathbf{R} \rightarrow [0, 1]$, 对每个 $x \in \mathbf{R}$, 有

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(\sin x) = \sqrt{1 - \sin^2 x} = |\cos x|.$$

习题 1.1

1. 设映射 $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, 对每个 $x \in \mathbf{R}, f(x) = x^2$. 写出映射 f 的定义域与值域.
2. 设映射 $f: X \rightarrow Y$, 对每个 $x \in X, f(x) = \sqrt[3]{x}$. 写出映射 f 的定义域与值域.
3. 设集合 A 和 B 都是自然数集, 映射 $f: A \rightarrow B$ 把集合 A 中的任一元素 n 映射成集合 B 中的元素 $2^n + n$. 求在映射 f 下, 像 20 的原像.

1.2 函数及其性质

1.2.1 区间与邻域

1. 区间

区间是一种常见的数集. 设 a, b 是两个实数, 且 $a < b$, 则称

- (1) 数集 $\{x | a < x < b\}$ 为开区间, 记为 (a, b) ;
- (2) 数集 $\{x | a \leq x \leq b\}$ 为闭区间, 记为 $[a, b]$;
- (3) 数集 $\{x | a \leq x < b\}$ 和 $\{x | a < x \leq b\}$ 为半开区间, 分别记为 $[a, b)$ 和 $(a, b]$.

以上几个区间统称为有限区间, a, b 分别称为区间的左端点和右端点, $b - a$ 称为区间的长度.

此外, 还可以定义如下五种类型的无限区间:

$$\begin{aligned}(a, +\infty) &= \{x | x > a\}, & [a, +\infty) &= \{x | x \geq a\}; \\ (-\infty, b) &= \{x | x < b\}, & (-\infty, b] &= \{x | x \leq b\}; \\ (-\infty, +\infty) &= \{x | -\infty < x < +\infty\} = \mathbf{R}.\end{aligned}$$

这里 $+\infty$ 和 $-\infty$ 是记号, 不是数, 分别读作“正无穷大”和“负无穷大”.

有限区间和无限区间统称为区间.

2. 邻域

以点 a 为中心的开区间 $(a-\delta, a+\delta)$ ($\delta>0$) 称为点 a 的 δ 邻域, 记为 $U(a, \delta)$. 其中点 a 称为该邻域的中心, δ 称为该邻域的半径.

显然, $U(a, \delta)$ 表示与点 a 的距离小于 δ 的点的集合, 即

$$U(a, \delta) = \{x \mid |x-a| < \delta\}.$$

当无须强调邻域的半径时, 常用记号 $U(a)$ 表示以点 a 为中心的某个邻域.

有时需要把邻域的中心去掉. 点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 以后, 称为点 a 的去心 δ 邻域, 记为 $\dot{U}(a, \delta)$, 即

$$\dot{U}(a, \delta) = \{x \mid 0 < |x-a| < \delta\}.$$

另外, 开区间 $(a-\delta, a)$ 称为点 a 的左 δ 邻域, 而开区间 $(a, a+\delta)$ 称为点 a 的右 δ 邻域.

1.2.2 函数的定义及表示方法

1. 函数的定义

在某一自然现象或社会现象中, 往往存在多个不断变化的量, 即变量. 这些变量并不是孤立变化的, 而是相互联系并遵循一定的规律的, 函数就是用来描述这种联系的. 下面先讨论两个变量的情形.

引例 1 已知圆的半径为 r , 则其面积 $S = \pi r^2$, 其中 π 是圆周率. 当半径 r 取定一个数值时, 式中 S 就有唯一确定的数值与之对应.

引例 2 某段路线上一列高铁以 360 km/h 匀速行驶, 则运行里程与时间的关系为 $s = 360t$, 其中 s 为运行里程, t 为运行时间. 当时间 t 取定一个数值时, 式中 s 就有唯一确定的数值与之对应.

定义 1 设 D 是一个实数集. 如果存在一个对应法则 f , 使得对 D 中的每一个数 x , 在实数集 $\mathbf{R}$ 中都有唯一确定的数 y 与之对应, 那么称对应法则 f 为定义在 D 上的一个函数, 记为

$$y = f(x), \quad x \in D.$$

其中 x 称为自变量, y 称为因变量, D 称为函数 f 的定义域.

注意

函数的定义域通常由问题的实际背景确定. 如果只给出解析式 $y = f(x)$, 而没有指明它的定义域, 那么函数的定义域就是指能使这个式子有意义的实数的集合.

例 1 求下列函数的定义域.

$$(1) y = \sqrt{x+3}; \quad (2) y = \frac{1}{x+2}; \quad (3) y = \ln(x-1).$$

解 (1) 因为二次根式的被开方数不小于 0, 所以 $x+3 \geq 0$, 解得 $x \geq -3$. 故 $y = \sqrt{x+3}$ 的定义域为 $[-3, +\infty)$.

(2) 因为分式的分母不能为 0, 所以 $x+2 \neq 0$, 即 $x \neq -2$. 故 $y = \frac{1}{x+2}$ 的定义域为 $(-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$.

(3) 因为对数的真数大于 0, 所以 $x-1 > 0$, 解得 $x > 1$. 故 $y = \ln(x-1)$ 的定义域为 $(1, +\infty)$.

例 2 求函数 $f(x) = \sqrt{x-3} + \arcsin \frac{1}{x}$ 的定义域.

解 使根式 $\sqrt{x-3}$ 有意义的实数 x 的集合是 $\{x \mid x-3 \geq 0\} = \{x \mid x \geq 3\}$. 使 $\arcsin \frac{1}{x}$ 有意义的实

数 x 的集合是 $\left\{x \mid -1 \leq \frac{1}{x} \leq 1\right\} = \{x \mid x \geq 1 \text{ 或 } x \leq -1\}$. 因此, 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x \mid x \geq 3\} \cap \{x \mid x \geq 1 \text{ 或 } x \leq -1\} = \{x \mid x \geq 3\}$, 即 $[3, +\infty)$.

在函数的定义中, 对 D 中的每一个数 x , 按照对应法则, 总有唯一确定的值 y 与之对应, 这个值称为函数在点 x 处的函数值, 记作 $f(x)$. 当自变量 x 遍取 D 中所有数值时, 对应的函数值 $f(x)$ 的全体所构成的集合称为函数 f 的值域, 记作 $f(D)$, 即

$$f(D) = \{y \mid y = f(x), x \in D\}.$$

由函数的定义可以看出, 函数的定义域与对应法则是确定一个函数所必不可少的两个要素. 也就是说, 如果两个函数的对应法则和定义域相同, 那么这两个函数就是相同的函数.

例 3 判断下列各组函数是否表示相同的函数.

- (1) $f(x) = 1$ 与 $g(x) = x^0$; (2) $f(x) = x$ 与 $g(x) = \sqrt{x^2}$;
 (3) $f(x) = x$ 与 $g(x) = \sqrt[3]{x^3}$; (4) $f(x) = \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+1}$ 与 $g(x) = \sqrt{x^2-1}$.

解 (1) $f(x) = 1$ 与 $g(x) = x^0$ 的定义域不同, 不是相同的函数.

(2) $f(x) = x$ 与 $g(x) = \sqrt{x^2}$ 的对应法则不同, 不是相同的函数.

(3) $f(x) = x$ 与 $g(x) = \sqrt[3]{x^3}$ 的对应法则和定义域均相同, 是相同的函数.

(4) $f(x) = \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+1}$ 与 $g(x) = \sqrt{x^2-1}$ 的定义域不同, 不是相同的函数.

2. 函数的表示方法

(1) 解析法: 用等式来表示两个变量间的函数关系.

(2) 列表法: 把两个变量之间的对应值列成表格来表示函数的关系.

(3) 图像法: 用图像来表示两个变量之间的函数关系.

例 4 某商品的进价为每件 50 元. 根据市场调查, 如果商品的售价为每件 50 元, 每天可卖出 400 件; 若商品的售价每上涨 1 元, 则每天少卖 10 件. 设每件商品的售价为 x 元 ($x \geq 50, x \in \mathbf{N}$). 求每天的销售量与自变量 x 的函数关系式.

解 设每天的销售量为 y 件, 则 $y = 400 - (x - 50) \times 10 = 900 - 10x, x \in [50, 90]$.

1.2.3 分段函数

例 5 设函数 $f(x) = \begin{cases} 1 + \log_2(1-x), & x < 1, \\ 2^{x-2}, & x \geq 1, \end{cases}$ 求 $f(-1) + f(\log_2 4)$.

解 由题意, 得 $f(-1) = 1 + \log_2 2 = 2, f(\log_2 4) = f(2) = 2^{2-2} = 1$. 所以 $f(-1) + f(\log_2 4) = 3$.

例 6 绝对值函数 $y = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0, \end{cases}$ 其定义域为 $D = (-\infty, +\infty)$, 值域为 $M = [0, +\infty)$, 它的

图像如图 1-1 所示.

例 7 符号函数 $y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases}$ 其定义域为 $D = (-\infty, +\infty)$, 值域为 $M = \{-1, 0, 1\}$. 对

任一实数 x , 总有 $x = \operatorname{sgn} x \cdot |x|$, 它的图像如图 1-2 所示.

定义 2 在自变量的不同变化范围内, 对应法则用不同的式子来表示的函数, 称为分段函数, 如例 5、例 6 和例 7 中的三个函数.

例 8 取整函数 $y=[x]$, 表示不超过数 x 的最大整数. 例如,

$$[2.3]=2, \quad [5]=5, \quad [\pi]=3, \quad [-6.7]=-7.$$

取整函数的定义域为 $D=(-\infty, +\infty)$, 值域为 $M=\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots\}$, 它的图像如图 1-3 所示.

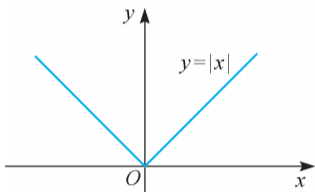


图 1-1

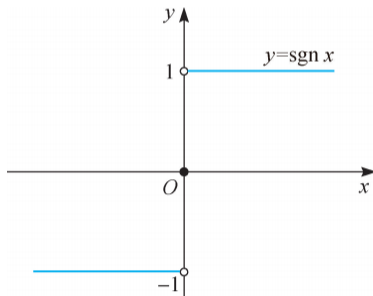


图 1-2

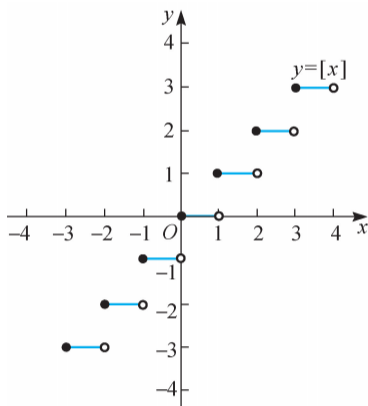


图 1-3

1.2.4 函数的性质

1. 函数的有界性

定义 3 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 数集 $X \subseteq D$. 若存在一个正数 M , 使得对任一 $x \in X$, 恒有

$$|f(x)| \leq M,$$

则称函数 $f(x)$ 在 X 上有界, 或称 $f(x)$ 是 X 上的有界函数. 若不存在这样的正数 M , 则称 $f(x)$ 在 X 上无界.

例如, 函数 $y = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界, 因为对任何实数 x , 恒有 $|\sin x| \leq 1$. 又如, 函数 $y = \frac{1}{x}$ 在区间 $(0, 1)$ 上无界, 在 $[1, +\infty)$ 上有界.

例 9 判断下列函数在给定区间上是否有界.

- (1) $y = x, x \in (-\infty, +\infty)$; (2) $y = \frac{1}{x^2 + 1}, x \in (-\infty, +\infty)$;
 (3) $y = e^x, x \in (-\infty, 0)$; (4) $y = \arctan x, x \in (-\infty, +\infty)$.

解 (1) 显然, 函数 $y = x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上无界.

(2) 因为当 $x \in (-\infty, +\infty)$ 时, $\left| \frac{1}{x^2 + 1} \right| \leq \frac{1}{1} = 1$, 所以函数 $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界.

(3) 因为当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $|e^x| < e^0 = 1$, 所以函数 $y = e^x$ 在 $(-\infty, 0)$ 上有界.

(4) 因为当 $x \in (-\infty, +\infty)$ 时, $|\arctan x| < \frac{\pi}{2}$, 所以函数 $y = \arctan x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界.

2. 函数的奇偶性

定义 4 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 且 D 关于原点对称, 即对任一 $x \in D$, 都有 $-x \in D$.

若 $f(-x) = f(x)$ 对一切 $x \in D$ 成立, 则称 $f(x)$ 为偶函数; 若 $f(-x) = -f(x)$ 对一切 $x \in D$ 成立, 则称 $f(x)$ 为奇函数.

从函数图像上看, 偶函数的图像关于 y 轴对称, 奇函数的图像关于原点对称.

例 10 判断下列函数的奇偶性.

- (1) $f(x) = x^2(1 + x^2)$; (2) $f(x) = x(x+1)(x-1)$.

解 (1) 因为函数 $f(x) = x^2(1+x^2)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 且

$$f(-x) = (-x)^2[1+(-x)^2] = x^2(1+x^2) = f(x),$$

所以 $f(x) = x^2(1+x^2)$ 是偶函数.

(2) 因为函数 $f(x) = x(x+1)(x-1)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 且

$$f(-x) = (-x)[(-x)+1][(-x)-1] = -x(x+1)(x-1) = -f(x),$$

所以 $f(x) = x(x+1)(x-1)$ 是奇函数.

注意

在判断函数的奇偶性时, 一定要先判断函数的定义域是否关于原点对称, 再判断 $f(x)$ 与 $f(-x)$ 的关系.

3. 函数的单调性

定义 5 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 区间 $I \subseteq D$. 若对于区间 I 上任意两点 x_1, x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有

$$f(x_1) < f(x_2),$$

则称 $f(x)$ 在 I 上是单调递增的; 若对于区间 I 上任意两点 x_1, x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有

$$f(x_1) > f(x_2),$$

则称 $f(x)$ 在 I 上是单调递减的.

例 11 判断下列函数的单调性.

$$(1) f(x) = \frac{1}{1-x}, x \in (-\infty, 1);$$

$$(2) f(x) = x^2 - 2x, x \in (1, +\infty).$$

解 (1) 任取 $x_1, x_2 \in (-\infty, 1)$, 且 $x_1 < x_2$, 则

$$1 - x_1 > 1 - x_2 > 0,$$

从而

$$\frac{1}{1-x_1} < \frac{1}{1-x_2},$$

即得

$$f(x_1) < f(x_2).$$

故 $f(x) = \frac{1}{1-x}$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递增.

(2) 任取 $x_1, x_2 \in (1, +\infty)$, 且 $x_1 < x_2$, 则

$$x_1 + x_2 > 2, \quad x_2 - x_1 > 0,$$

从而

$$f(x_2) - f(x_1) = x_2^2 - x_1^2 - 2(x_2 - x_1) = (x_2 + x_1 - 2)(x_2 - x_1) > 0,$$

即得

$$f(x_1) < f(x_2).$$

故 $f(x) = x^2 - 2x$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增.

注意

作差与作商是判断函数单调性常用的方法. 需要注意的是, 作商判断单调性时, 要考虑函数值的正负.

4. 函数的周期性

定义 6 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D . 若存在一个正数 T , 使得对任一 $x \in D$, 有 $(x+T) \in D$, 且

$$f(x+T)=f(x)$$

恒成立,则称 $f(x)$ 为周期函数,同时称 T 为 $f(x)$ 的一个周期. 如果函数 $f(x)$ 的所有周期中,存在一个最小的正周期 T_0 ,那么称 T_0 为 $f(x)$ 的最小正周期.

注意

并非所有的周期函数都有最小正周期. 例如,对狄利克雷函数 $D(x)=\begin{cases} 1, & x \text{ 是有理数,} \\ 0, & x \text{ 是无理数,} \end{cases}$ 任何正有理数都是它的周期. 因为不存在最小的正有理数,所以它没有最小正周期.

例 12 判断下列函数的周期性,如果是周期函数,写出它的最小正周期.

$$(1)f(x)=\tan 2x; \quad (2)f(x)=x\tan x; \quad (3)f(x)=|\sin 2x|.$$

解 (1)函数 $f(x)=\tan 2x$ 是周期函数,它的最小正周期是 $\frac{\pi}{2}$.

(2)函数 $f(x)=x\tan x$ 不是周期函数.

(3)函数 $f(x)=|\sin 2x|$ 是周期函数,它的最小正周期是 $\frac{\pi}{2}$.

注意

如果函数 $f(x)$ 的周期是 T ,那么函数 $f(\omega x)$ ($\omega > 0$) 的周期是 $\frac{T}{\omega}$.

1.2.5 反函数

定义 7 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D ,值域为 $f(D)$. 如果对任意 $y \in f(D)$,都存在唯一的 $x \in D$,使得 $f(x)=y$,即确定了一个以 y 为自变量、 x 为因变量的函数,那么称这个新确定的函数为 $y=f(x)$ 的反函数,记为 $x=f^{-1}(y)$. 因为习惯上用 x 表示自变量、用 y 表示因变量,所以将反函数中的 x 与 y 互换位置,即记为 $y=f^{-1}(x)$, $x \in f(D)$.

由反函数的定义可知,在定义区间上单调的函数必有反函数.

注意

从函数图像上看,两个互为反函数的函数,它们的图像关于直线 $y=x$ 对称.

判断函数的反函数是否存在,可以用以下定理.

定理 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D ,值域为 M . 若 $f(x)$ 在 D 上是单调递增或单调递减的,则在 M 上 $f(x)$ 的反函数 $f^{-1}(x)$ 存在,且 $f^{-1}(x)$ 在 M 上也是单调递增或单调递减的.

值得注意的是,由于 $y=f(x)$ 的某些值,满足它的 x 有时不止一个,所以并非任何函数在其定义域内都存在反函数. 但是,当我们对 x 的取值范围加以限制时,也有可能存在反函数. 例如,函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内不存在反函数,但在 $(-\infty, 0)$ 及 $[0, +\infty)$ 内却分别存在反函数 $y=-\sqrt{x}$, $x \in (0, +\infty)$ 及 $y=\sqrt{x}$, $x \in [0, +\infty)$.

对于分段函数求其反函数,只需分别求出与各子定义域相对应的函数表达式的反函数及其自变量的取值范围即可.

例 13 求函数 $y = \frac{3x-5}{2x+1}$ 的反函数.

解 在 $y = \frac{3x-5}{2x+1}$ 的两边同时乘 $2x+1$, 移项整理得

$$x(3-2y) = 5+y,$$

等号两边同时除以 $3-2y$, 得

$$x = \frac{5+y}{3-2y}.$$

故函数 $y = \frac{3x-5}{2x+1}$ 的反函数为 $y = \frac{5+x}{3-2x}$.

例 14 求函数 $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ 的反函数.

解 分别以 $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ 的两边为指数, e 为底数, 得

$$e^y = x + \sqrt{x^2+1},$$

移项整理得

$$\sqrt{x^2+1} = e^y - x,$$

等号两边同时平方, 整理得

$$x = \frac{e^y - e^{-y}}{2}.$$

故函数 $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ 的反函数为 $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

习题 1.2

1. 求下列函数的定义域.

(1) $f(x) = \sqrt{3-x} + \ln(x-2);$

(2) $f(x) = \arcsin \frac{x+1}{2} + \frac{1}{\sqrt{x^2-1}};$

(3) $y = \arcsin |x-2| + \frac{1}{\sqrt{e^x-1}};$

(4) $f(x) = \frac{x-1}{\ln x} + \sqrt{16-x^2}.$

2. 下列各对函数中, $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同? 为什么?

(1) $f(x) = \ln x^4, g(x) = 4 \ln x;$

(2) $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-2}}, g(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x-2}};$

(3) $f(x) = \sqrt{x^2}, g(x) = (\sqrt{x})^2;$

(4) $f(x) = \sqrt[3]{x^4-x^3}, g(x) = x \sqrt[3]{x-1}.$

3. 求下列函数值.

(1) 已知 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 0, \\ 1, & x = 0, \\ x^2-1, & x > 0, \end{cases}$ 求 $f(-1), f(0), f(2);$

(2) 已知 $f\left(\frac{1}{x}\right) = 4x - \sqrt{1+x^2}$, 求 $f(1).$

4. 设 $f(x)$ 为定义在 $(-l, l)$ 内的奇函数. 若 $f(x)$ 在 $(0, l)$ 内单调递增, 证明 $f(x)$ 在 $(-l, 0)$ 内也单调递增.

5. 判断下列函数的奇偶性.

$$(1) f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2};$$

$$(2) f(x) = x(x-1)(x+1);$$

$$(3) f(x) = \frac{a^x + a^{-x}}{2};$$

$$(4) f(x) = x^2 \ln \frac{1-x}{1+x};$$

$$(5) f(x) = \sin x \cos x + 1;$$

$$(6) F(x) = f(x) - f(-x), \text{ 其中 } f(x) \text{ 是 } (-\infty, +\infty) \text{ 上的任意函数};$$

$$(7) f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1});$$

$$(8) f(x) = \frac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1}.$$

6. 指出下列周期函数的周期.

$$(1) f(x) = \sin^2 x;$$

$$(2) f(x) = \sin 4x;$$

$$(3) f(x) = 5 + \cos 2\pi x;$$

$$(4) f(x) = |\cos x|.$$

7. 求下列函数的反函数.

$$(1) y = 1 + \ln(3x+2);$$

$$(2) y = 2^{x-1};$$

$$(3) y = \sqrt[3]{5x+1};$$

$$(4) y = x^2.$$

8. 设 $f(x)$ 的定义域为 $D = (0, 1)$, 求下列各函数的定义域.

$$(1) f(x^3);$$

$$(2) f(\tan x);$$

$$(3) f(x-a) (a > 0).$$

1.3 初等函数

1.3.1 基本初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为基本初等函数.

1. 幂函数

(1) 形如 $y = x^a$ (a 为常数) 的函数称为幂函数. 当 $a = 1, 2, 3, \frac{1}{2}, -1$ 时, 幂函数 $y = x^a$ 的图像如图 1-4 所示.

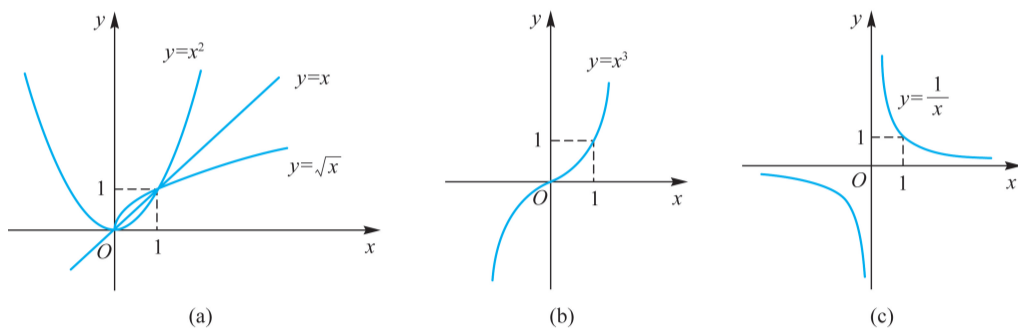


图 1-4

(2) 幂函数 $y=x^a$ 的图像恒过点 $(1,1)$.

当 $a>0$ 时, 幂函数 $y=x^a$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增; 当 $a<0$ 时, 幂函数 $y=x^a$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减.

当 $a\neq 0$ 时, 幂函数 $y=x^a$ 是无界函数.

当 $a=2n, n\in\mathbf{Z}$ 时, 幂函数 $y=x^a$ 是偶函数; 当 $a=2n+1, n\in\mathbf{Z}$ 时, 幂函数 $y=x^a$ 是奇函数.

2. 指数函数

(1) 形如 $y=a^x (a>0, a\neq 1)$ 的函数称为**指数函数**. 指数函数的定义域为 $\mathbf{R}$, 值域为 $(0,+\infty)$, 它的图像如图 1-5 所示.

(2) 指数函数 $y=a^x$ 的图像恒过点 $(0,1)$. 当 $a>1$ 时, 指数函数 $y=a^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增; 当 $0<a<1$ 时, 指数函数 $y=a^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减.

不论 a 为何值, 指数函数 $y=a^x$ 是无界函数, 且既不是奇函数也不是偶函数.

提示(指数幂及其运算性质):

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}; \quad a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}; \quad a^m a^n = a^{m+n}; \quad (a^m)^n = a^{mn}; \quad (ab)^m = a^m b^m.$$

其中, $a>0, b>0, m\in\mathbf{R}, n\in\mathbf{R}$.

3. 对数函数

(1) 形如 $y=\log_a x (a>0, a\neq 1)$ 的函数称为**对数函数**. 对数函数的定义域为 $(0,+\infty)$, 值域为 $\mathbf{R}$, 它的图像如图 1-6 所示.

特别地, 以 10 为底的对数函数称为**常用对数函数**, 简记为 $y=\lg x$; 以 $e(e=2.718\,28\cdots)$ 为底的对数函数称为**自然对数函数**, 简记为 $y=\ln x$.

(2) 对数函数 $y=\log_a x$ 的图像恒过点 $(1,0)$. 当 $a>1$ 时, 对数函数 $y=\log_a x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增; 当 $0<a<1$ 时, 对数函数 $y=\log_a x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减.

不论 a 为何值, 对数函数 $y=\log_a x$ 是无界函数, 且既不是奇函数也不是偶函数.

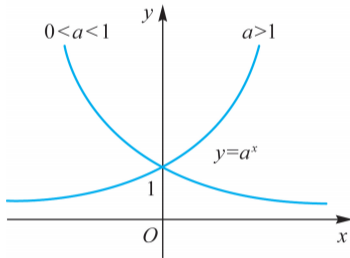


图 1-5

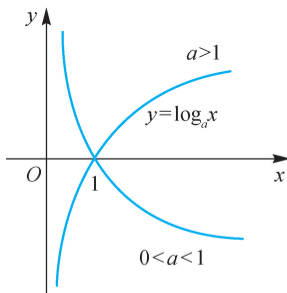


图 1-6

注意

对于确定的实数 $a(a>0, a\neq 1)$, 指数函数 $y=a^x$ 与对数函数 $y=\log_a x$ 互为反函数, 它们的图像关于直线 $y=x$ 对称.

提示(对数的运算性质):

$$\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N; \quad \log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N;$$

$$\log_a M^n = n \log_a M; \quad \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \text{ (换底公式)}.$$

其中 $a>0$, 且 $a\neq 1$; $b>0$; $c>0$, 且 $c\neq 1$; $M>0, N>0$; $n\in\mathbf{R}$.

4. 三角函数

(1) 正弦函数 $y=\sin x$ 、余弦函数 $y=\cos x$ 、正切函数 $y=\tan x$ 、余切函数 $y=\cot x$ 统称为**三角函数**, 它们的图像如图 1-7 所示.

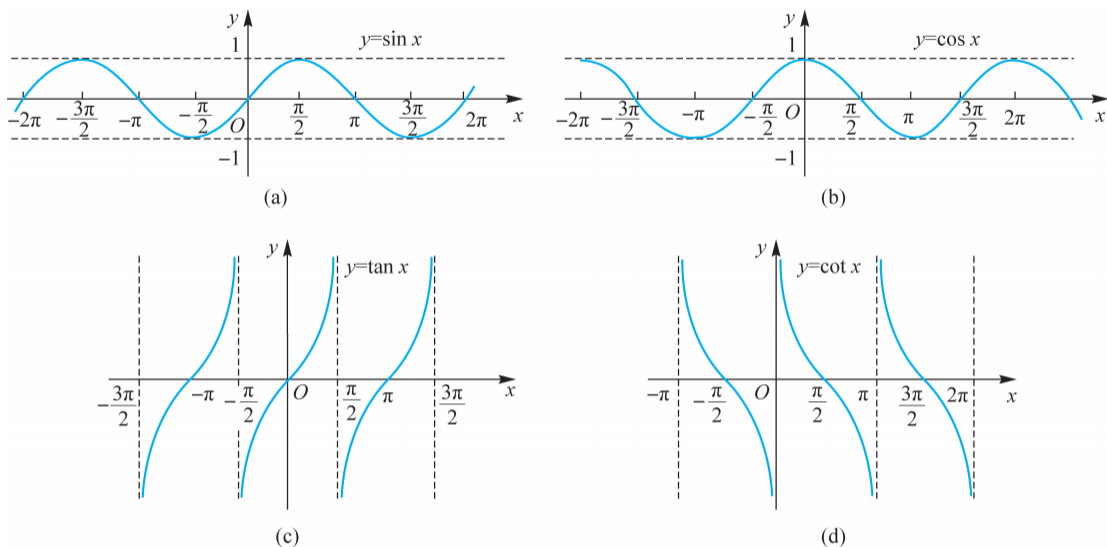


图 1-7

(2) 正弦函数 $y = \sin x$ 和余弦函数 $y = \cos x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 值域为 $[-1, 1]$; 正切函数 $y = \tan x$ 的定义域为 $\left\{x \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\right\}$, 值域为 $\mathbf{R}$; 余切函数 $y = \cot x$ 的定义域为 $\{x \mid x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$, 值域为 $\mathbf{R}$.

(3) 拓展: 正割函数 $y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$, 其定义域为 $\left\{x \mid x \in \mathbf{R}, \text{且 } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\right\}$; 余割函数 $y = \csc x = \frac{1}{\sin x}$, 其定义域为 $\{x \mid x \in \mathbf{R}, x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$.

提示(三角函数的常用公式):

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha; \quad \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1;$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta; \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta;$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha; \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha;$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha; \quad 1 + \cot^2 \alpha = \csc^2 \alpha.$$

5. 反三角函数

(1) 正弦函数 $y = \sin x$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的反函数, 称为**反正弦函数**, 记作 $y = \arcsin x$, 其定义域为 $[-1, 1]$, 值域为 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, 图像如图 1-8(a) 所示. 反正弦函数 $y = \arcsin x$ 在其定义域内单调递增, 是有界函数, 且在其定义域内是奇函数.

(2) 余弦函数 $y = \cos x$ 在区间 $[0, \pi]$ 上的反函数, 称为**反余弦函数**, 记作 $y = \arccos x$, 其定义域为 $[-1, 1]$, 值域为 $[0, \pi]$, 图像如图 1-8(b) 所示. 反余弦函数 $y = \arccos x$ 在其定义域内单调递减, 是有界函数, 且在其定义域内既不是奇函数也不是偶函数.

(3) 正切函数 $y = \tan x$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上的反函数, 称为**反正切函数**, 记作 $y = \arctan x$, 其定义域为 $\mathbf{R}$, 值域为 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, 图像如图 1-8(c) 所示. 反正切函数 $y = \arctan x$ 在其定义域内单调递增, 是有界函数, 且在其定义域内是奇函数.

(4) 余切函数 $y = \cot x$ 在区间 $(0, \pi)$ 上的反函数, 称为**反余切函数**, 记作 $y = \operatorname{arccot} x$, 其定义域为

$\mathbf{R}$, 值域为 $(0, \pi)$, 图像如图 1-8(d) 所示. 反余切函数 $y = \operatorname{arccot} x$ 在其定义域内单调递减, 是有界函数, 且在其定义域内既不是奇函数也不是偶函数.

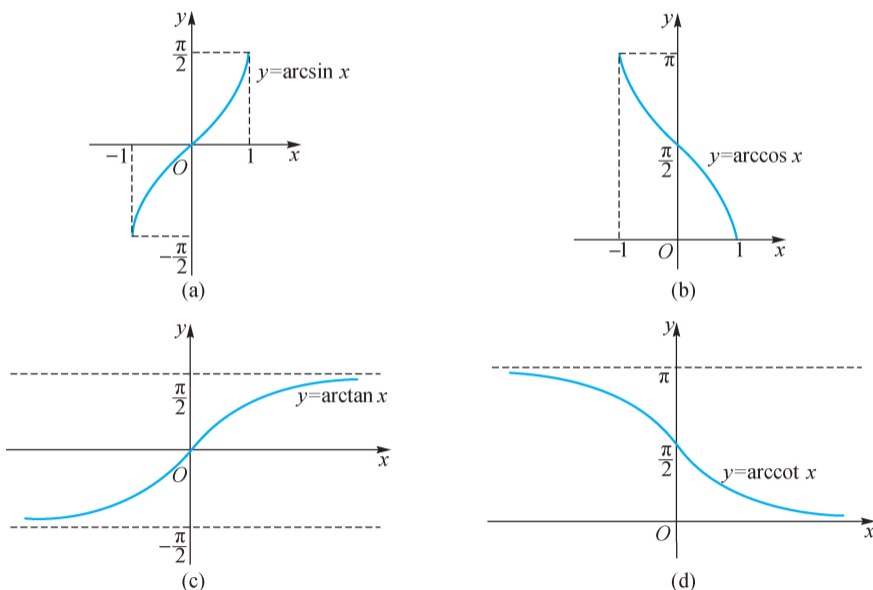


图 1-8

1.3.2 双曲函数和反双曲函数

下面介绍在工程技术上常用到的一类函数(双曲函数)及其反函数(反双曲函数).

1. 双曲函数的定义

(1) 双曲正弦: $y = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

(2) 双曲余弦: $y = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

(3) 双曲正切: $y = \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

2. 双曲函数的性质

(1) 双曲正弦的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $(-\infty, +\infty)$. 它是单调递增的奇函数, 图像通过原点且关于原点对称. 当 x 的绝对值很大时, 它的图像在第一象限内接近曲线 $y = \frac{1}{2}e^x$, 在第三象限内接近曲线 $y = -\frac{1}{2}e^{-x}$ (见图 1-9).

(2) 双曲余弦的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $[1, +\infty)$. 它是偶函数, 图像过点 $(0, 1)$ 且关于 y 轴对称. 在 $(-\infty, 0)$ 内单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 内单调递增. 当 x 的绝对值很大时, 它的图像在第一象限内接近曲线 $y = \frac{1}{2}e^x$, 在第二象限内接近曲线 $y = \frac{1}{2}e^{-x}$ (见图 1-10).

(3) 双曲正切的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $(-1, 1)$. 它是单调递增的奇函数, 图像通过原点且关于原点对称. 当 x 的绝对值很大时, 它的图像在第一象限内接近直线 $y = 1$, 在第三象限内接近直线 $y = -1$ (见图 1-11).

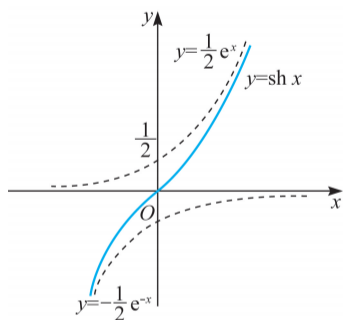


图 1-9

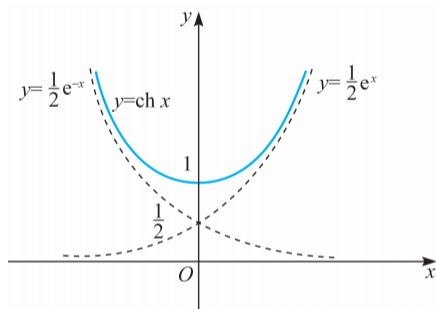


图 1-10

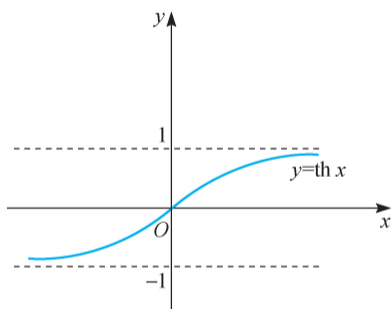


图 1-11

3. 反双曲函数

双曲函数的反函数称为反双曲函数. 双曲函数 $y = \operatorname{sh} x$, $y = \operatorname{ch} x$ ($x \geq 0$), $y = \operatorname{th} x$ 的反函数依次记为 $y = \operatorname{arsh} x$ (反双曲正弦函数), $y = \operatorname{arch} x$ (反双曲余弦函数), $y = \operatorname{arth} x$ (反双曲正切函数).

这些反双曲函数都可以通过自然对数函数来表示. 例如, 对于反双曲正弦函数 $y = \operatorname{arsh} x$, 它是 $x = \operatorname{sh} y$ 的反函数. 由双曲函数的定义, 有

$$x = \frac{e^y - e^{-y}}{2}, \quad \text{即 } e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0.$$

解得

$$e^y = x \pm \sqrt{x^2 + 1}.$$

由于 $e^y > 0$, 上式应取正号, 故

$$y = \operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

由此可见, 函数 $y = \operatorname{arsh} x$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 它是单调递增的奇函数. 由 $y = \operatorname{sh} x$ 的图像, 根据反函数的作图法, 可得 $y = \operatorname{arsh} x$ 的图像 (见图 1-12).

类似地, 双曲余弦 $y = \operatorname{ch} x$ ($x \geq 0$) 的反函数, 即反双曲余弦函数的表达式为

$$y = \operatorname{arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

由此可见, 函数 $y = \operatorname{arch} x$ 的定义域为 $[1, +\infty)$, 值域为 $[0, +\infty)$. 它在定义域上是单调递增的. 由 $y = \operatorname{ch} x$ ($x \geq 0$) 的图像, 根据反函数的作图法, 可得 $y = \operatorname{arch} x$ 的图像 (见图 1-13).

反双曲正切函数 $y = \operatorname{arth} x$ 的表达式为

$$y = \operatorname{arth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x},$$

其定义域为 $(-1, 1)$, 值域为 $(-\infty, +\infty)$. 它在定义域上是单调递增的奇函数. 由 $y = \operatorname{th} x$ 的图像, 根据反函数的作图法, 可得 $y = \operatorname{arth} x$ 的图像 (见图 1-14).

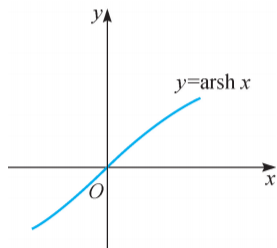


图 1-12

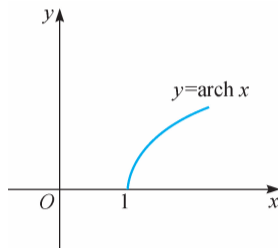


图 1-13

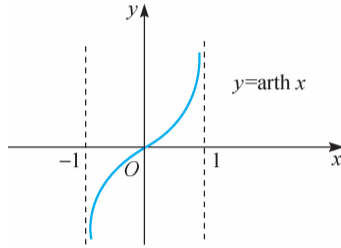


图 1-14

1.3.3 复合函数

定义 1 设 $y=f(x)$ 和 $u=g(x)$ 是两个函数. 如果 $y=f(x)$ 的定义域包含函数 $u=g(x)$ 的值域, 那么定义在 $u=g(x)$ 的定义域上的函数 $y=f[g(x)]$ 称为由 $u=g(x)$ 与 $y=f(x)$ 构成的复合函数, u 称为中间变量. 函数 g 与函数 f 构成的复合函数, 即按“先 g 后 f ”的次序复合的函数, 通常记为 $f \circ g$, 即

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)].$$

例如, 取 $f(x) = \sin x$, $g(x) = x^2$, 则 $g(x)$ 与 $f(x)$ 构成的复合函数为 $f[g(x)] = \sin x^2$, $f(x)$ 与 $g(x)$ 构成的复合函数为 $g[f(x)] = \sin^2 x$.

提示: (1) 并不是任意两个函数都可以构成复合函数. 函数 $g(x)$ 与 $f(x)$ 能构成复合函数的条件是函数 $g(x)$ 的值域与函数 $f(x)$ 的定义域要有非空交集. 例如, 函数 $y = \arcsin u$ 与函数 $u = 2 + x^2$ 就不能构成复合函数, 因为函数 $y = \arcsin u$ 的定义域为 $[-1, 1]$, 而 $u = 2 + x^2 \geq 2$, 所以两个函数不满足复合函数的条件.

(2) 复合函数可以由多个函数复合而成, 即可以有多个中间变量. 例如, $y = e^u$, $u = \sqrt{v}$, $v = x + 1$ 复合成函数 $y = e^{\sqrt{x+1}}$, 这里 u, v 都是中间变量.

例 1 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} 2 - x^2, & |x| \leq 1, \\ 2, & |x| > 1, \end{cases}$ 求 $f[g(x)], g[f(x)]$.

解 $f[g(x)] = \begin{cases} 1, & |g(x)| \leq 1, \\ 0, & |g(x)| > 1 \end{cases} = \begin{cases} 1, & |x| = 1, \\ 0, & |x| \neq 1. \end{cases}$
 $g[f(x)] = \begin{cases} 2 - [f(x)]^2, & |f(x)| \leq 1, \\ 2, & |f(x)| > 1 \end{cases} = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 2, & |x| > 1. \end{cases}$

例 2 下列函数是由哪些较简单的函数复合而成的?

(1) $y = e^{-x}$; (2) $y = \sin^2(1 + 2x)$;

(3) $y = \arccos \sqrt{\tan(a^2 + x^2)}$.

解 (1) $y = e^{-x}$ 是由 $y = e^u$ 与 $u = -x$ 复合而成的.

(2) $y = \sin^2(1 + 2x)$ 是由 $y = u^2$, $u = \sin v$, $v = 1 + 2x$ 复合而成的.

(3) $y = \arccos \sqrt{\tan(a^2 + x^2)}$ 是由 $y = \arccos u$, $u = \sqrt{v}$, $v = \tan w$, $w = a^2 + x^2$ 复合而成的.

1.3.4 函数的四则运算

给定两个函数 $f(x)$ ($x \in D_1$) 和 $g(x)$ ($x \in D_2$), 记 $D = D_1 \cap D_2$, 并设 $D \neq \emptyset$. 我们定义 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 D 上的和、差、积运算如下:

$$F(x) = f(x) + g(x), \quad x \in D,$$

$$G(x) = f(x) - g(x), \quad x \in D,$$

$$H(x) = f(x)g(x), \quad x \in D.$$

若在 D 中剔除使 $g(x) = 0$ 的 x 的值, 即令 $D^* = D_1 \cap \{x | g(x) \neq 0, x \in D_2\} \neq \emptyset$, 则可在 D^* 上定义 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的商运算如下:

$$L(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad x \in D^*.$$

若 $D = D_1 \cap D_2 = \emptyset$, 则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不能进行四则运算. 例如, 设

$$f(x) = \sqrt{4 - x^2}, \quad x \in D_1 = \{x | |x| \leq 2\},$$

$$g(x) = \sqrt{x^2 - 9}, \quad x \in D_2 = \{x | |x| \geq 3\}.$$

由于 $D = D_1 \cap D_2 = \emptyset$, 所以表达式 $f(x) + g(x) = \sqrt{4-x^2} + \sqrt{x^2-9}$ 是没有意义的.

1.3.5 初等函数的定义

定义 2 由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合所构成的函数, 称为初等函数.

例如, $y = \sqrt{2-x^2}$, $y = x \sin x$, $y = \arccos \frac{1}{x}$ 等都是初等函数. 在本课程中所讨论的绝大多数函数都是初等函数.

习题 1.3

1. 指出下列函数由哪些简单函数复合而成.

(1) $y = \sin(x+1)$;

(2) $y = \ln[\sin(x+5)]$;

(3) $y = e^{\cos x}$;

(4) $y = \arctan(\ln x)$.

2. 设函数 $f(x) = \frac{1}{x-1}$, $g(x) = \sqrt{x+2}$, 求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$.

3. 设函数 $f(x) = \sqrt{1+\ln x}$, 求 $f(x)$ 及 $f(x+3)$ 的定义域.

本章小结

1. 基本内容

(1) 理解映射的概念时需要注意以下几点.

① 构成一个映射必须具备以下三个要素: 集合 A , 即定义域 $D_f = A$; 集合 B , 其中值域 $R_f \subseteq B$; 对应法则 f , 使得对每个 $x \in A$, 在 B 中有唯一确定的 $y = f(x)$ 与之对应.

② 集合 A 和 B 不仅可以是数集, 也可以是点集等其他类型的非空集合.

③ 对每个 $x \in A$, 元素 x 的像 y 是唯一的; 而对每个 $y \in R_f$, 元素 y 的原像 x 不一定是唯一的; 映射 f 的值域 R_f 是集合 B 的一个子集, 即 $R_f \subseteq B$, 但不一定有 $R_f = B$.

(2) 函数的定义域和对应法则是确定函数的两个基本要素. 确定定义域的关键是熟悉基本初等函数的定义域, 并能根据具体问题加以判断.

正确理解函数符号 $f(x)$, 尤其是要重视复合函数 $f[\varphi(x)]$ 和分段函数的掌握. 只有在此基础上, 才能正确进行函数的复合运算和函数值的计算. 对于复合函数, 不仅要能将一个复杂函数分解为几个简单函数的复合, 还要能够反向把简单函数组合成一个复合函数.

初等函数是高等数学的主要研究对象. 这类函数具有良好的分析性质(如连续性、可导性、可积性等), 能够熟练掌握初等函数的分解和复合, 对后续学习十分重要. 当然, 对于基本初等函数的定义与主要性质, 也需要熟记和掌握.

2. 重点

(1) 函数的概念, 复合函数的概念及分解.

(2) 基本初等函数的性质和图像.

3. 难点

函数的性质.

应用拓展

2023年8月24日,日本在国际社会广泛质疑和反对声中,开始将福岛第一核电站经处理并稀释的核污染水分批排入大海,此举引发各方对海洋生态环境长期安全的严重担忧.据研究,福岛核污染水中含有21种半衰期在10年以上的放射性元素,其中8种的半衰期在1万年以上.已知某种放射性元素在有机体液内的浓度 c (单位:Bq/L)与时间 t (单位:年)近似满足关系式 $c=k \cdot a^t$ ($k>0; a>0, a \neq 1$).当 $c=\frac{1}{6}$ 时, $t=10$; 当 $c=\frac{1}{12}$ 时, $t=20$. 试估算当该元素的浓度 $c=\frac{1}{120}$ 时,大约需要多少年. (参考数据: $\log_2 3 \approx 1.58, \log_2 5 \approx 2.32$)

解 由题意得
$$\begin{cases} \frac{1}{6} = k \cdot a^{10}, \\ \frac{1}{12} = k \cdot a^{20}. \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} a = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{10}}, \\ k = \frac{1}{3}. \end{cases} \quad \text{于是 } c = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{10}}.$$

当 $c=\frac{1}{120}$ 时, $\frac{1}{120} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{10}}$, 即 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{10}} = \frac{1}{40}$. 两边取对数得

$$\frac{t}{10} = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{40} = \log_2 40 = 3 + \log_2 5 \approx 3 + 2.32 = 5.32.$$

于是 $t \approx 53.2$ 年. 因此,该放射性元素在有机体液内的浓度衰减至 $\frac{1}{120}$ 约需53年.

复习题

A 基础题

1. 填空题.

(1) 已知函数 $f(x) = (x-1)^2 + 2$, 则 $f[f(2)] =$ _____.

(2) 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & |x| > 1, \\ 0, & |x| \leq 1, \end{cases}$ 则 $f[f(2024)] =$ _____.

(3) 函数 $f(x) = e^{x^2} \sin x$ 的图像关于 _____ 对称.

(4) 函数 $f(x) = \ln \sin(\cos^2 x)$ 的图像关于 _____ 对称.

(5) 假设函数 $f(x) = \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{3}$, 则 $f(x)$ 的周期为 _____.

2. 求下列函数的定义域.

(1) $y = \frac{1}{x-1}$;

(2) $y = \ln(1-x^2)$;

(3) $y = \arccos(2x+1)$.

3. 求函数 $y = \sqrt{x-2} + 1$ 的反函数.

4. 判断函数 $f(x) = \frac{2x}{x-1}$ 在区间 $(0, 1)$ 上的单调性.

B 提高题

1. 选择题.

(1) 函数 $f(x) = \sqrt{2^x - 1} + \arctan \frac{1}{x-1}$ 的定义域为().

- A. $[0, 1)$ B. $(1, +\infty)$
C. $[0, 1) \cup (1, +\infty)$ D. $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

(2) 已知函数 $f(x+1)$ 的定义域为 $[2, 5]$, 则函数 $y = \frac{f(3x)}{\sqrt{\log_2(4-x^2)}}$ 的定义域为().

- A. $[1, +\infty)$ B. $[1, \sqrt{3})$ C. $(1, +\infty)$ D. $[\frac{1}{3}, \sqrt{3})$

(3) 下列命题中为真命题的是().

① 函数 $y = \frac{1}{2} \ln \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$ 与 $y = \ln \tan \frac{x}{2}$ 是相同的函数;

② 若函数 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称, 则函数 $y=f(2x)$ 与 $y=\frac{1}{2}g(x)$ 的图像也关于直线 $y=x$ 对称;

③ 若奇函数 $f(x)$ 对定义域内任意 x 都有 $f(x)=f(2-x)$, 则 $f(x)$ 为周期函数.

- A. ①② B. ①③ C. ②③ D. ②

(4) 下列函数中既是偶函数又在 $(0, +\infty)$ 上单调递减的是().

- A. $f(x) = e^x - 1$ B. $f(x) = x + \frac{1}{x}$
C. $f(x) = \frac{1}{x^4}$ D. $f(x) = \lg |x|$

2. 填空题.

(1) 设 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 1]$, 则 $f(9x^2)$ 的定义域为_____.

(2) 若函数 $f(x+1)$ 的定义域为 $[-1, 1]$, 则函数 $f(x)$ 的定义域为_____.

3. 说出下列函数是由哪些简单函数复合而成的.

- (1) $y = \cos \sqrt{x}$; (2) $y = \arcsin 2^x$;
(3) $y = \cos^2(x^2 + 1)$; (4) $y = \sqrt{2-x^2}$;
(5) $y = \tan \sqrt{1+x}$; (6) $y = \lg(\sin x)$.

4. 设 $f(x) = \begin{cases} 1+x, & x < -1, \\ 1, & x \geq -1, \end{cases}$ 求 $f(-4), f(2), f(2-x)$.

5. 设 $f(x) = x^2, \varphi(x) = \lg x$, 求 $f[\varphi(x)], f[f(x)], \varphi[f(x)], \varphi[\varphi(x)]$.

6. 在一个拥有 80 000 人的城镇里, 时刻 t 患感冒的人数为

$$N(t) = \frac{10\,000}{1 + 9\,999e^{-t}},$$

其中 t 以天为单位. 试求开始时感冒的人数及第四天感冒的人数.

7. 某工厂生产某种零件, 每个零件的成本为 40 元, 出厂单价为 60 元. 该厂为鼓励销售商订购, 规定当一次订购量超过 100 个时, 每多订购 1 个, 订购的全部零件单价就降低 0.02 元, 但最低出厂单价不低于 51 元.

(1) 一次订购量为多少个时, 零件的实际出厂价恰好为 51 元?

(2) 设一次订购量为 x 个时, 零件的实际出厂价为 p 元, 写出函数关系式 $p=f(x)$;

(3) 当销售商一次订购量分别为 500 个、1 000 个时, 该工厂的利润分别为多少?

(一个零件的利润 = 实际出厂价 - 成本)