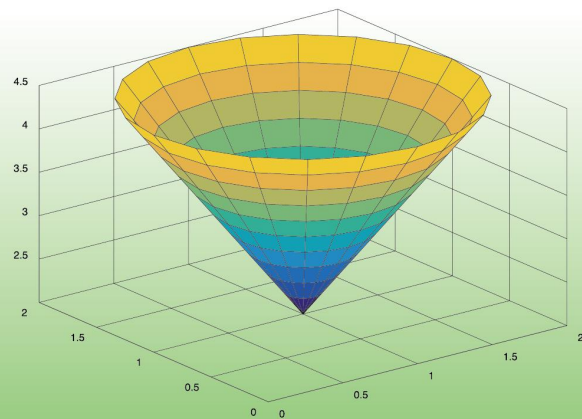




高等数学

(第2版)

GAODENG SHUXUE

策划编辑: 金颖杰
责任编辑: 郝永进
封面设计: 刘文东

ISBN 978-7-5635-7456-8



定价: 49.80元

北京邮电大学出版社

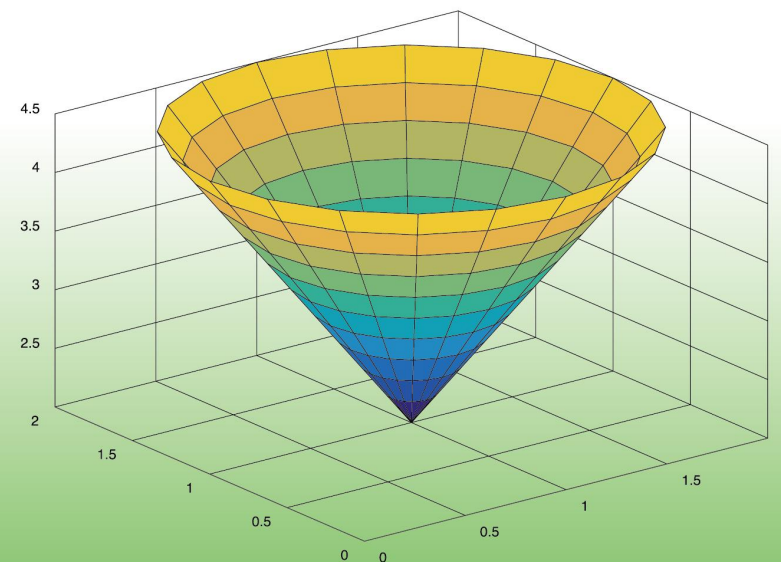

高等数学 (第2版)

● 主编 赵巧蓉 张琪



“十四五”职业教育国家规划教材

山西省“十四五”职业教育规划教材



(第2版)

高等数学

主编 赵巧蓉 张琪

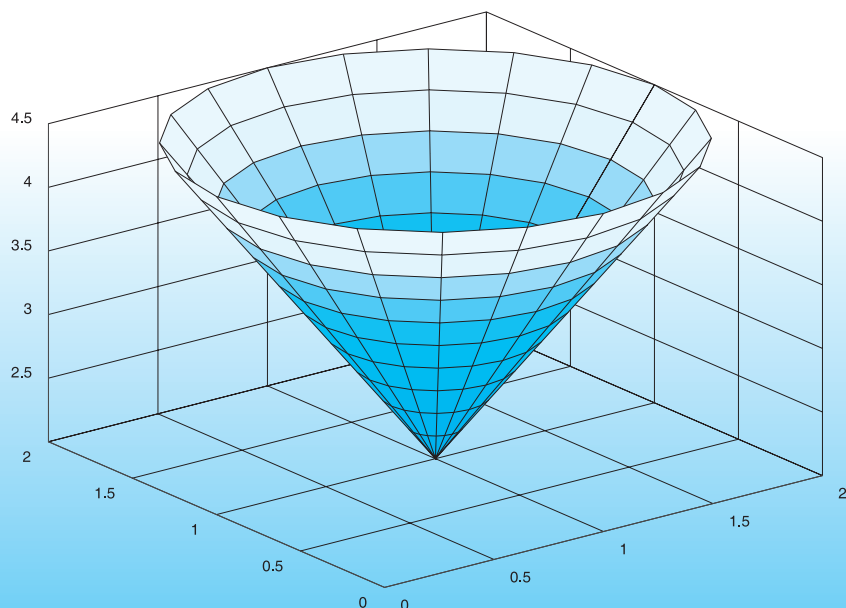


北京邮电大学出版社
www.buptpress.com



“十四五”职业教育国家规划教材

山西省“十四五”职业教育规划教材



(第2版)

高等数学

主编 赵巧蓉 张 琪



北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

内 容 简 介

本书是“十四五”职业教育国家规划教材《高等数学》的修订再版,全书内容分为基础模块和实践模块两部分,基础模块部分的主要内容包括:函数、极限与连续,一元函数微分学,一元函数积分学,常微分方程,线性代数,概率论与数理统计初步;实践模块部分的主要内容包括 Mathematica 数学实验、数学建模简介.基础模块部分每一章最后都有数学文化聚焦、数学家简介,便于教师在教学过程中能将数学史与数学教学相结合.

本书既可供高等职业院校相关专业学生使用,也可供相关人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学 / 赵巧蓉, 张琪主编. -- 2 版. -- 北京 :
北京邮电大学出版社, 2024. (2025 重印). -- ISBN 978-
7-5635-7456-8

I. O13

中国国家版本馆 CIP 数据核字第 2025XT0465 号

策划编辑: 金颖杰 责任编辑: 郝永进 封面设计: 刘文东

出版发行: 北京邮电大学出版社

社 址: 北京市海淀区西土城路 10 号

邮政编码: 100876

发 行 部: 电话: 010-62282185 传真: 010-62283578

E-mail: publish@bupt.edu.cn

经 销: 各地新华书店

印 刷: 三河市骏杰印刷有限公司

开 本: 850 mm×1168 mm 1/16

印 张: 17.5

字 数: 379 千字

版 次: 2019 年 8 月第 1 版 2024 年 12 月第 2 版

印 次: 2025 年 9 月第 2 次印刷

ISBN 978-7-5635-7456-8

定 价: 49.80 元

· 如有印装质量问题,请与北京邮电大学出版社发行部联系 ·

服务电话: 400-615-1233

第 2 版 前 言

《高等数学》教材自 2019 年由北京邮电大学出版社出版以来,受到了广大师生的广泛关注,并于 2023 年 6 月被教育部评为“十四五”职业教育国家规划教材.这一荣誉不仅是对教材编写团队的充分肯定,更是对教材内容及其使用效果的高度认可.然而,我们深知,随着时代的发展和教育理念的不断更新,教材亦需与时俱进,以更好地满足新时代对高素质技术技能人才的培养要求.

数学作为一门基础学科,是学生掌握数学基础知识和基本技能、形成基本数学思想、积累数学活动经验、培养理性思维和科学精神的重要载体.为进一步提高教材质量,我们认真总结了原教材在使用过程中存在的问题,广泛听取了各院校师生对教材的意见和建议,并依据教育部制定的《高等职业教育专科数学课程标准(征求意见稿)》对教材进行了全面而深入的修订.

新版教材全面贯彻党的教育方针,牢牢把握正确的政治方向和价值导向,以打造培根铸魂、启智增慧的精品教材为目标.在修订过程中,我们始终坚持“以学生为中心”的理念,注重教材的实用性与可操作性,遵循“简化理论、加强应用、传承思想”的原则,力求使教材既便于教学、易于学习,又能够体现数学的文化价值和实际应用的双重功能.本次修订的主要内容包括以下几个方面.

1. 新增内容

教材分为两个部分:基础模块和实践模块.基础模块包括函数、极限与连续,一元函数微分学,一元函数积分学,常微分方程,线性代数,概率论与数理统计初步.其中,线性代数和概率论与数理统计初步为新增章节,其内容涵盖了高职专科和职业本科阶段的数学知识,使教材实现中高本衔接的一体化设计.实践模块包括 Mathematica 数学实验和数学建模简介,旨在帮助学生开拓视野、促进专业学习,提升数学应用意识与实际应用能力.

2. 优化结构

对原教材的章节结构进行了调整.将原第 2 章“导数与微分”与第 3 章“导数的

应用”合并为“一元函数微分学”,将原第4章“函数的积分”更名为“一元函数积分学”.此类调整更符合数学知识的逻辑体系,有助于学生更好地理解和掌握相关概念与应用.

3. 丰富习题

将每节课后习题更名为“同步训练”,在丰富题型的同时适当增加题量.此外,在每章结束后新增一套综合训练,以满足不同层次学生的学习需求,使其在学习过程中更好地巩固知识,提高解题能力.

新版教材由山西职业技术学院赵巧蓉、张琪担任主编并负责统稿,山西药科职业学院与长治职业技术学院的教师共同参与了教材的修订工作.具体分工如下:山西职业技术学院张荣芳编写第1章,赵巧蓉编写第2章,张琪编写第3章,冯文丽编写第5章5.3节至5.6节,许亚鹏编写第6章概率论部分,赵志英编写第6章数理统计部分,张俊青编写第7章,赵昌宇编写第8章;山西药科职业学院杨素芳编写第4章;长治职业技术学院原丹丹编写第5章5.1节至5.2节及附录.

山西职业技术学院杨俊萍教授承担了教材的审稿工作,并在修订过程中提出了许多宝贵意见,在此谨致谢忱!同时,我们也感谢广大师生在原教材使用过程中提出的宝贵建议.我们期待新版教材能够为高等职业教育数学教学提供更有力的支撑,助力学生在数学学习的道路上不断前行.

由于编者水平有限,书中难免存在疏漏与不妥之处,恳请各位读者批评指正,以便在今后的教学实践中不断完善.

编 者

第1版 前言

党的二十大报告指出：“教育是国之大计、党之大计。培养什么人、怎样培养人、为谁培养人是教育的根本问题。育人的根本在于立德。”职业教育的核心是培养人，不仅要培养学生的专业技能，更要立德树人，培育学生健全的人格，培养学生的职业精神和可持续发展能力。“高等数学”是职业院校一门重要的公共基础课，为学生后续专业课程的学习和解决实际问题奠定了坚实的理论基础，能够锤炼学生的意志品质，培养学生的科学精神。在数学课程的改革与建设中，必须以人为本，满足学生的差异性和个性发展的要求，注重数学思想的渗透，对不同层次的学生制订不同的培养目标，努力使每个学生成才。教材建设是课程建设的重要内容，教材是教学的重要载体。我们通过多次调研，编写了这本适用于理工类专业的教材。本教材充分考虑学生的数学基础，对数学知识进行了必要的调整，简化理论，注重应用，传承思想。

本教材分为两个部分——基础模块和实践模块，内容包括函数与极限、导数与微分、导数的应用、函数的积分、常微分方程、Mathematica 数学实验、数学建模简介。本教材具有以下特点。

(1) 内容简洁，以让学生掌握数学思想的精髓为重点，在叙述和讲解上突出数学思想的实践背景，增加学生学习的感性成分。

(2) 注重以人为本，充分考虑高职学生的学习特点，内容深入浅出，较好地处理了初等数学与高等数学的衔接。

(3) 降低了对理论的要求，注重对知识的应用，配有结合实际的相关例题与习题，例题与习题数量合适，难度适中，以培养学生的基本学习能力为重点。

(4) 为贯彻落实党的二十大精神，达到高等数学“与思想政治理论课同向同行，形成协同效应”的教育要求，本书主要从数学文化视角挖掘高等数学课程的育人元素，提炼高等数学课程中所蕴含的数学素养、文化自信、人文精神等，让学生领会数学文化博大精深的同时，在认知、情感以及行为上把握正确的方向，从而实现知识传

授、能力培养与价值塑造的统一.

(5)将数学实验、数学建模融入其中,体现高职教学的实践性、应用性.

本教材由山西职业技术学院赵巧蓉和张琪任主编,山西职业技术学院胡志立、冯文丽、张俊青和李薇,山西工程职业学院王改燕,山西药科职业学院杨素芳参与编写.具体编写分工为:王改燕编写第1章1.1和1.2节,胡志立编写第1章的1.3和1.4节,赵巧蓉编写第2章和第3章,张琪编写第4章,杨素芳编写第5章,张俊青编写第6章,李薇编写第7章,冯文丽编写附录.赵巧蓉和张琪负责统稿工作.

山西职业技术学院的杨俊萍教授进行了教材的审稿工作,并在编写过程中提出了许多宝贵意见,在此致谢!

编写教材是一项影响深远的教育工作,我们深感责任重大.由于编者水平有限,书中难免有不妥之处,恳请各位读者指正.

编 者

目录

第一部分 基础模块

第 1 章 函数、极限与连续 2

1.1 函数	3	1.4.2 无穷大量	22
1.1.1 集合、区间与邻域	3	1.4.3 无穷小的比较	23
1.1.2 函数的概念	4	1.4.4 等价无穷小的性质及应用	24
1.1.3 函数的性质	6	1.5 函数的连续性	25
1.1.4 反函数	6	1.5.1 函数的增量	25
1.1.5 基本初等函数	7	1.5.2 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的连续性	26
1.1.6 复合函数	10	1.5.3 函数 $y=f(x)$ 在区间上的连续性	28
1.2 极限的概念	12	1.5.4 函数的间断点	28
1.2.1 数列的极限	12	1.5.5 初等函数的连续性	30
1.2.2 函数的极限	13	1.5.6 闭区间上连续函数的性质	31
1.3 极限的计算	17	数学文化聚焦	34
1.3.1 极限的四则运算法则	17	数学家简介	35
1.3.2 两个重要极限	18		
1.4 无穷小量与无穷大量	21		
1.4.1 无穷小量	21		

第 2 章 一元函数微分学 39

2.1 导数的概念	40	2.1.2 导数的几何意义	43
2.1.1 导数的定义	40	2.1.3 可导与连续的关系	43

2.1.4 高阶导数	44	2.5.2 实际问题中的最大值 与最小值	59
2.2 导数的计算	45	2.6 平面曲线的弯曲问题	61
2.2.1 函数和、差、积、商的求导法则	45	2.6.1 曲线的凹凸性	61
2.2.2 复合函数的求导法则	46	2.6.2 曲线的渐近线	63
2.2.3 隐函数的导数	47	2.6.3 曲率	64
2.2.4 初等函数的导数	48	2.7 微分及其在近似计算中的 应用	68
2.3 微分中值定理与洛必达法则	49	2.7.1 微分的概念	68
2.3.1 微分中值定理	49	2.7.2 微分的基本公式和运算 法则	69
2.3.2 洛必达法则	52	2.7.3 微分的应用	71
2.4 函数的单调性与极值	54	数学文化聚焦	73
2.4.1 函数的单调性	54	数学家简介	74
2.4.2 函数的极值	56		
2.5 函数的最大值与最小值	58		
2.5.1 函数在连续区间上的最大 值与最小值	58		

第3章 一元函数积分学

78

3.1 不定积分的概念	79	3.5.1 微积分基本定理	99
3.1.1 原函数与不定积分的概念	79	3.5.2 定积分的换元积分法 与分部积分法	101
3.1.2 不定积分的几何意义	80	3.6 无穷区间上的广义积分	103
3.1.3 基本积分公式	81	3.7 定积分的几何应用	105
3.1.4 积分的基本运算法则	82	3.7.1 定积分的微元法	105
3.2 不定积分的换元积分法	84	3.7.2 平面图形面积的计算	106
3.2.1 第一类换元积分法	84	3.7.3 立体图形体积的计算	109
3.2.2 第二类换元积分法	87	3.7.4 曲线弧长的计算	112
3.3 不定积分的分部积分法	89	3.8 定积分的物理应用	114
3.4 定积分的概念与性质	92	3.8.1 变力沿直线做功的计算	114
3.4.1 定积分的概念	94	3.8.2 水压力的计算	115
3.4.2 定积分的几何意义	96	数学文化聚焦	117
3.4.3 定积分的性质	97	数学家简介	118
3.5 定积分的计算	99		

第4章 常微分方程

122

4.1 微分方程的概念	123	4.2.2 一阶线性微分方程	127
4.2 一阶微分方程	125	4.3 二阶常系数齐次线性 微分方程	131
4.2.1 可分离变量的微分方程	125		

4.4 二阶常系数非齐次线性

微分方程

134

4.4.1 多项式自由项的特解

135

4.4.2 多项式与指数函数乘积
型的特解

136

4.4.3 右端为三角函数的非齐

次项

138

数学文化聚焦

140

数学家简介

141

第 5 章 线性代数

144

5.1 行列式的概念

145

5.1.1 二阶、三阶行列式

145

5.1.2 n 阶行列式

147

5.2 行列式的性质与克莱姆

法则

149

5.2.1 行列式的性质

149

5.2.2 克莱姆法则

151

5.3 矩阵概念及线性方程组的

矩阵表示法

154

5.3.1 矩阵的概念

154

5.3.2 线性方程组的矩阵表示法

156

5.4 矩阵的运算与逆矩阵

159

5.4.1 矩阵的运算

159

5.4.2 逆矩阵

161

5.5 矩阵的初等变换、秩与

逆矩阵求解

165

5.5.1 矩阵的初等变换

165

5.5.2 矩阵的秩

167

5.5.3 用初等变换法求逆矩阵

168

5.6 线性方程组

169

5.6.1 线性方程组的定义

169

5.6.2 用逆矩阵解线性方程组

170

5.6.3 用初等变换解线性方程
组——高斯消元法

171

5.6.4 线性方程组解的讨论

172

数学文化聚焦

176

数学家简介

176

第 6 章 概率论与数理统计初步

182

6.1 条件概率与全概率公式

183

6.1.1 条件概率

183

6.1.2 全概率公式与贝叶斯公式

184

6.2 随机变量及其分布

186

6.2.1 随机变量

186

6.2.2 离散型随机变量及其分
布律

187

6.2.3 连续型随机变量及其概
率密度

188

6.3 随机变量的数字特征

192

6.3.1 随机变量的数学期望

192

6.3.2 方差

195

6.4 数理统计的基本概念

198

6.4.1 总体与样本

198

6.4.2 常用的统计量

198

6.4.3 常用统计量分布

199

6.5 统计推断和回归分析

204

6.5.1 统计推断

204

6.5.2 回归分析

206

数学文化聚焦

213

数学家简介

213

第二部分 实践模块

第 7 章 Mathematica 数学实验 218

7.1 Mathematica 软件入门	218	7.3.2 一元函数微积分的应用	232
7.1.1 Mathematica 软件环境 与基本操作	218	7.4 Mathematica 常微分 方程的求解	235
7.1.2 Mathematica 内建函数 及调用方法	222	7.5 Mathematica 行列式 与矩阵运算	235
7.1.3 利用 Mathematica 求解 方程及方程组	223	7.6 Mathematica 线性方程 组的矩阵解法	237
7.2 Mathematica 图像处理	225	7.7 线性规划模型的求解	239
7.2.1 二维图像的绘制	225	7.8 Mathematica 数据统计 与概率分析	241
7.2.2 三维图像的绘制	228	7.8.1 数据处理	241
7.3 Mathematica 一元函数 微积分的求解与应用	230	7.8.2 绘制频率直方图	242
7.3.1 一元函数微积分的求解	230	7.8.3 概率计算	244

第 8 章 数学建模简介 247

8.1 数学模型概述	247	8.3.1 数学模型的特点	253
8.1.1 原型和模型	247	8.3.2 数学模型的分类	254
8.1.2 数学模型与数学建模的 基本内容	248	8.4 数学建模实例	255
8.2 数学建模的典型实例 及基本方法	249	8.4.1 椅子能否在不平坦的 地面上放稳?	255
8.2.1 数学建模的两个典型 案例分析	249	8.4.2 易拉罐的形状与尺寸问题	256
8.2.2 数学建模的基本方法	252	8.4.3 生猪的出售时机	258
8.3 数学模型的特点与分类	253	8.4.4 人口模型	260
		8.5 全国大学生数学建模竞赛 简介	263

附录 264

附录 1 预备知识	264	附录 3 标准正态分布表	269
附录 2 常用三角函数公式及指 数和对数的运算法则	267		

参考文献 270

第一部分 基础模块

第 1 章 函数、极限与连续

第 2 章 一元函数微分学

第 3 章 一元函数积分学

第 4 章 常微分方程

第 5 章 线性代数

第 6 章 概率论与数理统计初步

第 1 章 函数、极限与连续

随着科学技术的不断发展,微积分学在自然科学、社会科学及应用科学等各个领域的应用日益广泛.微积分学的知识对于解决许多工程实际问题具有重要意义.微积分学是微分学和积分学的总称,其主要研究对象是函数.极限是微积分学中的主要研究工具.本章将对函数知识进行必要的复习与补充,继而重点讨论函数的极限与连续性.



学习目标

知识目标:

- 理解函数的概念,掌握基本初等函数的图像和性质;
- 理解复合函数和初等函数的相关知识;
- 掌握极限的概念及其运算方法;
- 了解函数的连续性概念.

能力目标:

- 能够运用函数的概念、图像和性质解决实际问题;
- 能够对复合函数进行分解与组合;
- 能够求解数列和函数的极限.

素质目标:

- 建立数形结合的数学思想,体会数与形的统一之美,领悟数学与自然的和谐美;
- 学会用函数语言描述事物之间的各种关系,通过学习函数,理解事物相互联系与相互制约的辩证唯物主义观点;
- 理解极限的思想方法,学会运用极限思想分析和解决问题.

我们欣赏数学,我们需要数学.

数学是一门演绎的科学,它从一组公设出发,经过严密的逻辑推理,导出结论.

——陈省身

1.1 函数

函数是刻画运动变化中变量与变量之间依赖关系的数学模型,是微积分的主要研究对象.在科学技术和实际生活中,各种变量之间的关系通常表现为函数关系.本节将在中学已有的函数知识基础上,进一步研究函数的有关概念和性质.

1.1.1 集合、区间与邻域

集合是现代数学中的一个重要概念.集合就是指具有某些共同属性的对象的全体,构成集合的每一个对象称为集合的**元素**.

集合具有确定性、互异性、无序性,即集合的元素是确定的、互不相同的,并且不考虑排列顺序.

由数组成的集合称为**数集**.

常用的数集有自然数集 $\mathbf{N}$ 、整数集 $\mathbf{Z}$ 、有理数集 $\mathbf{Q}$ 和实数集 $\mathbf{R}$,它们之间的包含关系是 $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{R}$.

介于两个实数之间的所有实数所构成的集合称为**区间**.区间是实数集中的一种特殊形式.

设 a, b 为任意两个实数,不妨设 $a < b$.我们将

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b, x \in \mathbf{R}\}$$

称为开区间,

$$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b, x \in \mathbf{R}\}$$

称为闭区间,

$$[a, b) = \{x \mid a \leq x < b, x \in \mathbf{R}\}, \quad (a, b] = \{x \mid a < x \leq b, x \in \mathbf{R}\}$$

称为半开半闭区间.又将这些区间称为**有限区间**.

将

$$(a, +\infty) = \{x \mid x > a, x \in \mathbf{R}\}, \quad [a, +\infty) = \{x \mid x \geq a, x \in \mathbf{R}\},$$

$$(-\infty, b) = \{x \mid x < b, x \in \mathbf{R}\}, \quad (-\infty, b] = \{x \mid x \leq b, x \in \mathbf{R}\}$$

和

$$(-\infty, +\infty) = \mathbf{R}$$

称为**无限区间**.

在微积分中经常用到一种特殊的区间:在数轴上是以点 x_0 为中心,以任意小的正数 δ 为半径形成的特殊开区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$,即实数集合 $\{x \mid |x - x_0| < \delta, \delta > 0\}$,我们将其称为点 x_0 的 δ 邻域. x_0 称为邻域的中心, δ 称为邻域的半径(见图 1-1).

我们将实数集合 $\{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta, \delta > 0\}$ 即 $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ 称为点 x_0 的 δ 去心邻域(见图 1-2).

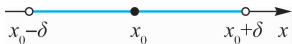


图 1-1

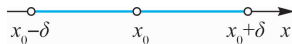


图 1-2

例如, $|x-1| < 2$, 就是以点 $x_0=1$ 为中心、以 2 为半径的邻域; $0 < |x-1| < 2$, 是以点 $x_0=1$ 为中心、以 2 为半径的去心邻域.

1.1.2 函数的概念

客观世界的一切事物, 小至粒子, 大至宇宙, 始终都在运动和变化之中. 在事物的运动变化过程中, 存在着多种变量, 其中一个变量的变化往往决定另一个变量的变化, 并且在变化过程中, 这两个变量之间存在确定的依赖关系.

下面给出函数的定义.

定义 1 设在某一变化过程中有两个变量 x 和 y , 如果当变量 x 在数集 D 内任取一个数值时, 变量 y 按照某种对应法则 f 都有唯一确定的值与之对应, 则称 y 是 x 的函数, 记作 $y=f(x)$. 其中, x 称为自变量, y 称为因变量, 集合 D 称为函数的定义域. 当 x 取值 $x_0 \in D$ 时, 与 x_0 对应的 y 的值称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的函数值, 记作 $f(x_0)$. 当 x 取遍 D 中的所有值时, 对应的函数值所构成的集合称为函数的值域, 记作 M , 即 $M=\{y|y=f(x), x \in D\}$.

定义域与对应法则是函数的两个基本要素. 当定义域与对应法则都确定后, 函数就唯一确定. 只有定义域与对应法则都相同的两个函数, 才被认为是相同的函数.

例 1 求函数 $y=\frac{1}{\lg(3x-2)}$ 的定义域.

解 由函数的表达式可知, 变量 x 必须满足如下不等式组, 函数才有意义.

$$\begin{cases} 3x-2 > 0 \\ 3x-2 \neq 1 \end{cases},$$

解得 $x > \frac{2}{3}$ 且 $x \neq 1$, 即 $x \in (\frac{2}{3}, 1) \cup (1, +\infty)$, 所以函数的定义域为 $(\frac{2}{3}, 1) \cup (1, +\infty)$.

函数的表达形式一般有解析式、图像式和表格形式三种. 我们常见的函数通常由一个统一的解析式表示, 但在实际问题中, 也常遇到由两个及以上解析式表示的函数.

分段函数 在自变量不同的取值范围内用不同解析式表示的函数称为分段函数. 其定义域是各段自变量取值集合的并集. 求分段函数的函数值时, 应将自变量的值代入其所属范围内的解析式进行计算. 例如: 函数

$$y=|x|=\begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases};$$

又如符号函数

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0. \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

例 2 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x+2, & -2 \leq x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$.

(1) 求 $f(x)$ 的定义域, 并找出其分段点;

(2) 求 $f(-1), f(0), f(\frac{1}{2}), f(1), f(2)$;

(3) 作出 $f(x)$ 的图像.

解 (1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-2, +\infty)$, 分段点为 $x=0$ 和 $x=1$.

(2) 因为 $x=-1$ 属于区间 $[-2, 0)$, 所以函数值 $f(-1)$ 由式 $f(x)=x+2$ 确定, 得 $f(-1)=-1+2=1$; 因为 $x=0$ 属于区间 $[0, 1)$, 所以函数值 $f(0)$ 由式 $f(x)=x^2$ 确定, 得 $f(0)=0$; 同理, $f(\frac{1}{2})=(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$; 因为 $x=1$ 属于区间 $[1, +\infty)$, 故 $f(1)=1, f(2)=1$.

(3) 函数 $f(x)$ 的图像如图 1-3 所示.

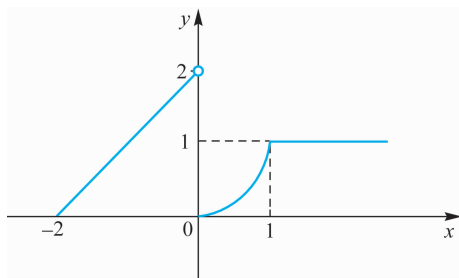


图 1-3

注意 (1) 函数定义域一般表示为集合或区间的形式.

(2) 分段函数的图像是分析函数性质的重要依据, 要求学生重点掌握.

例 3 一个停车场第 1 小时收费 5 元, 以后每小时收费 3 元, 每天最多收费 15 元, 不足 1 h 按 1 h 计算. 试求停车费用与时间的函数关系, 并说明其实际意义.

解 设停车时间为 t 小时, 停车费用为 y , 则有

$$y = \begin{cases} 5, & 0 < t \leq 1 \\ 5 + 3(t-1), & 1 < t \leq 4 \\ 15, & 4 < t \leq 24 \end{cases}$$

注意 t 取整数.

或表示为逐段常值形式

$$y = \begin{cases} 5, & 0 < t \leq 1 \\ 8, & 1 < t \leq 2 \\ 11, & 2 < t \leq 3 \\ 14, & 3 < t \leq 4 \\ 15, & 4 < t \leq 24 \end{cases}$$

由此可以看出:为了节省费用,应尽量控制在整数小时内停车.由于一天的最高停车费用不超过15元,因此当停车时间超过3h后,可不急于取车.

1.1.3 函数的性质

1. 奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 是以原点为中心的对称区间,如果对于任意 $x \in D$,恒有 $f(-x) = -f(x)$,则称 $f(x)$ 为**奇函数**;如果恒有 $f(-x) = f(x)$,则称 $f(x)$ 为**偶函数**.偶函数的图像关于 y 轴对称,奇函数的图像关于原点对称.

例如,函数 $y = \sin x$ 为奇函数, $y = \cos x$ 为偶函数.

2. 有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D ,如果存在正数 M ,使得对于任意 $x \in D$,恒有 $|f(x)| \leq M$,则称函数 $f(x)$ 在 D 上**有界**;否则称函数 $f(x)$ 在 D 上**无界**.

例如,在定义域 $(-\infty, +\infty)$ 内有 $|\sin x| \leq 1$,因此正弦函数在定义域内有界;又如函数 $y = x^2 (x \in \mathbf{R})$ 是无界函数.因为对于 $\mathbf{R}$ 内的一切 x ,不存在正数 M 使得 $|x^2| \leq M$ 成立.

3. 单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D ,若在区间 $I \subset D$ 内,对于任意 $x_1 < x_2 \in I$,有 $f(x_1) < f(x_2)$ (或 $f(x_1) > f(x_2)$),则称函数 $f(x)$ 在 I 上是**单调递增**(或**单调递减**)的.单调递增或单调递减的函数统称为**单调函数**,对应的区间称为**单调区间**.

例如,函数 $f(x) = x^2$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递增,在区间 $(-\infty, 0]$ 上单调递减.

4. 周期性

对于函数 $y = f(x)$,如果存在不为零的常数 T ,使得 $f(x+T) = f(x)$ 对于定义域内的任意 x 都成立,则称函数 $y = f(x)$ 为**周期函数**,其中 T 称为函数 $y = f(x)$ 的**周期**.通常,满足上述关系的最小正数 T 称为该函数的**最小正周期**.

例如,函数 $y = \sin x, y = \cos x$ 均为以 2π 为周期的周期函数.

1.1.4 反函数

定义 2 设函数 $y = f(x)$ 是定义在集合 D 上的函数,值域为 M .若对于每一个 $y \in M$,由方程 $f(x) = y$ 能唯一确定一个 x 与之对应,那么所确定的以 y 为自变量的函数 $x = \varphi(y)$ 或 $x = f^{-1}(y)$,称为函数 $y = f(x)$ 的**反函数**,它的定义域为 M ,值域为 D .

习惯上,函数的自变量通常用 x 表示,因此函数 $y = f(x)$ 的反函数常记作 $y = \varphi(x)$ 或 $y = f^{-1}(x)$.

例 4 求函数 $y = \sqrt{x} + 1$ 的反函数.

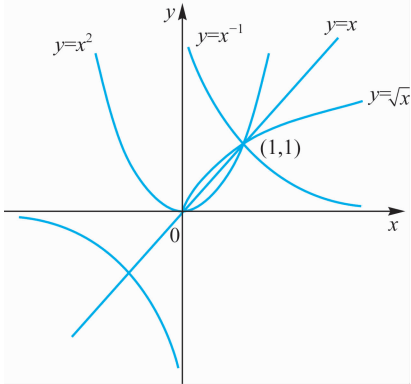
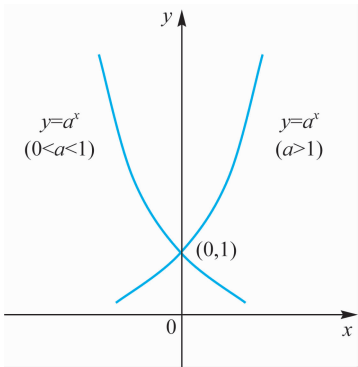
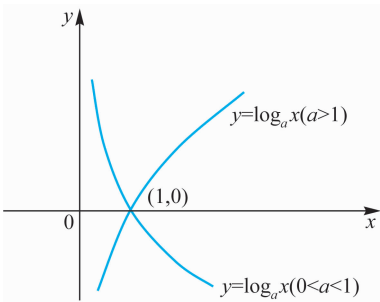
解 由 $y = \sqrt{x} + 1$ 解得 $x = (y-1)^2$.对调 x 与 y ,得 $y = (x-1)^2$.因此,函数 $y = \sqrt{x} + 1$ 的反函数为 $y = (x-1)^2 (x \geq 1)$.

注意 互为反函数的两个函数,其图像关于直线 $y = x$ 对称,具有相同的单调性,且它们的定义域和值域互换.

1.1.5 基本初等函数

在中学阶段,我们已经学习了幂函数、指数函数和对数函数. 它们的图像和主要性质如表 1-1 所示.

表 1-1

函 数	图 像	主要性质	
幂函数 $y=x^a$		当 $a > 0$ 时 (1) 图像均过点 $(0,0)$, $(1,1)$; (2) 在第一象限内单调递增	当 $a < 0$ 时 (1) 图像均过点 $(1,1)$; (2) 在第一象限内单调递减  幂函数
指数函数 $y=a^x$ $(a>0, a\neq 1)$		当 $0 < a < 1$ 时 (1) 图像均过点 $(0,1)$; (2) 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调递减; (3) 当 $x < 0$ 时, $y > 1$; 当 $x > 0$ 时, $y < 1$	当 $a > 1$ 时 (1) 图像均过点 $(0,1)$; (2) 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调递增; (3) 当 $x < 0$ 时, $y < 1$; 当 $x > 0$ 时, $y > 1$  指数函数
对数函数 $y=\log_a x$ $(a>0, a\neq 1)$		当 $0 < a < 1$ 时 (1) 图像均过点 $(1,0)$; (2) 在定义域 $(0, +\infty)$ 内单调递减; (3) 当 $0 < x < 1$ 时, $y > 0$; 当 $x > 1$ 时, $y < 0$	当 $a > 1$ 时 (1) 图像均过点 $(1,0)$; (2) 在定义域 $(0, +\infty)$ 内单调递增; (3) 当 $0 < x < 1$ 时, $y < 0$; 当 $x > 1$ 时, $y > 0$  对数函数

我们知道,三角函数包括正弦函数、余弦函数、正切函数、余切函数、正割函数和余割函数.

以任意角 α 的顶点 O 为坐标原点,以角 α 的始边方向为 x 轴的正方向,建立直角坐标系. 设点 $P(x, y)$ 为角 α 的终边上一点,记 $r=OP=\sqrt{x^2+y^2}$, 则定义如下三角函数.

$$\sin \alpha = \frac{y}{r}, \quad \cos \alpha = \frac{x}{r}, \quad \tan \alpha = \frac{y}{x},$$

分别称为角 α 的正弦函数、余弦函数和正切函数.

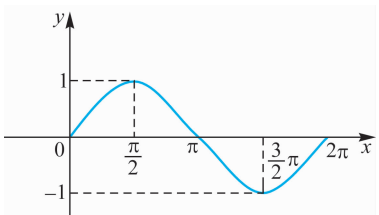
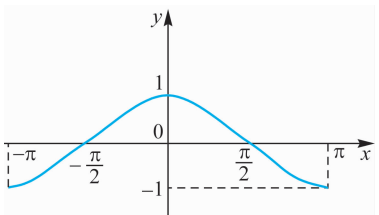
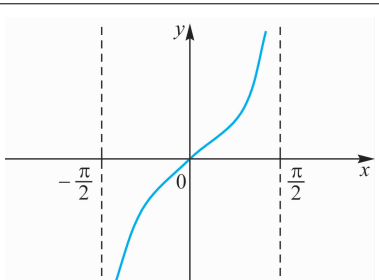
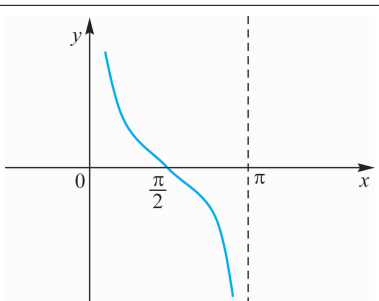
进一步地,定义

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{x}{y}, \quad \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{r}{x}, \quad \csc \alpha = \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{r}{y}$$

分别称为角 α 的余切函数、正割函数和余割函数.

可以看出, $\cot \alpha, \sec \alpha, \csc \alpha$ 分别是 $\tan \alpha, \cos \alpha, \sin \alpha$ 的倒数. 因此,在学习三角函数的性质时,我们重点研究前三个函数的性质,如表 1-2 所示.

表 1-2

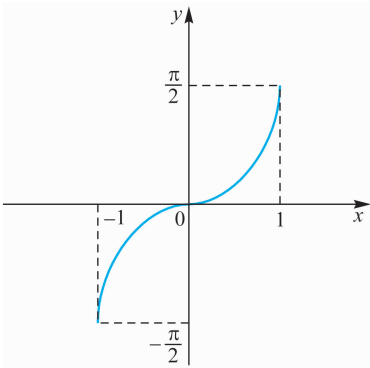
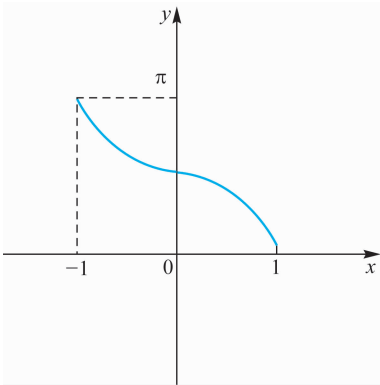
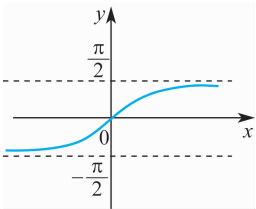
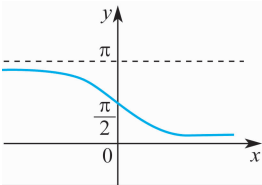
函数	图像	定义域	周期	奇偶性	有界性 (值域)	单调性
$y = \sin x$		$\mathbf{R}$	2π	奇函数	有界 [−1, 1]	在 $[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$ ($k \in \mathbf{Z}$) 内单调递增; 在 $[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi]$ ($k \in \mathbf{Z}$) 内单调递减
$y = \cos x$		$\mathbf{R}$	2π	偶函数	有界 [−1, 1]	在 $[2k\pi - \pi, 2k\pi]$ ($k \in \mathbf{Z}$) 内单调递增; 在 $[2k\pi, 2k\pi + \pi]$ ($k \in \mathbf{Z}$) 内单调递减
$y = \tan x$		$x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbf{Z}$)	π	奇函数	无界 $\mathbf{R}$	在 $(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2})$ 内 单调递增
$y = \cot x$		$x \neq k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$)	π	奇函数	无界 $\mathbf{R}$	在 $(k\pi, k\pi + \pi)$ 内单调递减



三角函数

由于三角函数是周期函数,因此根据反函数的定义,三角函数在其定义域上不存在反函数.但如果将其定义域限制在适当的区间内,则可以定义反函数,具体如表 1-3 所示.

表 1-3

函 数	定 义 域	值 域	图 像	性 质
$y = \arcsin x$	$[-1, 1]$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$		在 $[-1, 1]$ 上单调递增,为奇函数
$y = \arccos x$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$		在 $[-1, 1]$ 上单调递减,既非奇函数也非偶函数
$y = \arctan x$	$(-\infty, +\infty)$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$		在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增,为奇函数
$y = \operatorname{arccot} x$	$(-\infty, +\infty)$	$(0, \pi)$		在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递减,既非奇函数也非偶函数

定义 3 正弦函数 $y = \sin x$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的反函数称为反正弦函数,记作 $y = \arcsin x$.

$\arcsin x$ 表示一个正弦值为 x 的角,其取值范围为 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

余弦函数 $y=\cos x$ 在区间 $[0, \pi]$ 上的反函数称为反余弦函数, 记作 $y=\arccos x$. $\arccos x$ 表示一个余弦值为 x 的角, 其取值范围为 $[0, \pi]$.

正切函数 $y=\tan x$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上的反函数称为反正切函数, 记作 $y=\arctan x$. $\arctan x$ 表示一个正切值为 x 的角, 其取值范围为 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

余切函数 $y=\cot x$ 在区间 $(0, \pi)$ 上的反函数称为反余切函数, 记作 $y=\operatorname{arccot} x$. $\operatorname{arccot} x$ 表示一个余切值为 x 的角, 其取值范围为 $(0, \pi)$.

例如:

$$\begin{aligned} \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} &= \frac{\pi}{3}, \quad \arcsin \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}, \quad \arcsin 0 = 0, \quad \arccos 0 = \frac{\pi}{2}; \\ \arccos \frac{1}{2} &= \frac{\pi}{3}, \quad \arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}, \quad \arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}, \quad \operatorname{arccot} \sqrt{3} = \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

我们将幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数. 这些函数的定义、图像和性质是后续学习的基础, 要求学生熟练掌握.

1.1.6 复合函数

在实际问题中, 我们常常会遇到如下形式的函数, 如 $E=\frac{1}{2}mv^2$, $y=\sin x^2$. 它们是由我们熟悉的指数函数、三角函数等构成的, 此类函数称为复合函数.

定义 4 设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_1 , 函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 D_2 , 且 $u=\varphi(x)$ 的值域与 D_1 有非空交集, 则由中间变量 u 构成的关于 x 的函数 $y=f[\varphi(x)]$, 称为 x 的复合函数.

例如, 函数 $y=\sin x^2$ 由函数 $y=\sin u$, $u=x^2$ 复合而成.

注意 (1) 函数可以由多个函数经过多次复合而成. 例如, 函数 $y=\sqrt{\cos 2x}$ 由函数 $y=\sqrt{u}$, $u=\cos v$, $v=2x$ 复合而成.

(2) 复合函数的构成需要满足一个必要条件, 即中间函数的值域与外层函数的定义域的交集非空. 也就是说, 不是任意两个函数都能复合成一个函数. 例如, 函数 $y=\arcsin u$, $u=2+x^2$ 不能复合为函数 $y=\arcsin(2+x^2)$, 因为 $2+x^2>1$, 超出了反正弦函数的定义域 $[-1, 1]$, 因此是无意义的.

例 5 指出下列函数的复合过程.

$$(1) y=\arctan e^x; \quad (2) y=\cos^2 x; \quad (3) y=\sqrt{\sin 2x}.$$

解 (1) $y=\arctan e^x$ 由 $y=\arctan u$ 和 $u=e^x$ 复合而成;

(2) $y=\cos^2 x$ 由 $y=u^2$ 和 $u=\cos x$ 复合而成;

(3) $y=\sqrt{\sin 2x}$ 由 $y=\sqrt{u}$, $u=\sin v$ 和 $v=2x$ 复合而成.

由基本初等函数与常数经过有限次四则运算和有限次复合运算所构成, 并且能够用一个式子表示的函数, 称为初等函数.

例如, 函数 $y=1+\frac{2\sin x^2}{\ln(\tan x)}$, $y=\log_3 \cos x^2$, $y=\ln(1+\sqrt{x^2-1})$ 都是初等函数.

同步训练 1-1

1. 下列各题中的两个函数是否相同? 为什么?

(1) $y = \sqrt{x^2}$, $y = |x|$;

(2) $y = \frac{x^2-1}{x-1}$, $y = x+1$;

(3) $y = \lg x^2$, $y = 2\lg x$.

2. 求下列函数的定义域.

(1) $y = \sqrt{2x-1}$;

(2) $y = \sqrt{1-x^2}$;

(3) $y = \lg(3x+1)$;

(4) $y = \frac{1}{x^2-3x+2}$.

3. 已知 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x > 0 \\ x-1, & x \leq 0 \end{cases}$, 求 $f(1)$, $f(-1)$, $f(0)$.

4. 判断下列函数的奇偶性.

(1) $y = x^2 + \cos x$;

(2) $y = x \sin x$;

(3) $y = \lg(x + \sqrt{1+x^2})$.

5. 判断 $f(x) = \sin \frac{1}{x-1}$ 在定义域内是否有界.

6. 求函数 $y = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ 的周期.

7. 求下列函数的反函数.

(1) $y = 2x+3$;

(2) $y = x^3+1$.

8. 说明下列函数的复合过程.

(1) $y = (2x+3)^{10}$;

(2) $y = \sqrt{1-x^2}$;

(3) $y = \ln(\sin x)$;

(4) $y = \lg[\lg(\lg x)]$.

9. 某工厂生产某种产品,每件产品的出厂价为 50 元,成本为 25 元.由于在生产过程中,平均每生产一件产品会排放 0.5 m^3 的污水,为了净化环境,工厂设计了两种污水处理方案,准备实施.

方案 1: 工厂污水经净化处理后排放. 每处理 1 m^3 污水所需原料费为 2 元,且每月排污设备的损耗费为 30 000 元.

方案 2: 工厂将污水排入污水处理厂统一处理,每处理 1 m^3 污水需支付 14 元的排污费.

问题:

(1) 设工厂每月生产 x 件产品,每月利润为 y 元,分别求出在采用方案 1 和方案 2 处理污水时 y 与 x 的函数关系式;

(2) 若工厂每月生产 6 000 件产品,作为厂长,在不污染环境且节约资金的前提下,应选择哪种污水处理方案?

1.2 极限的概念

中国是一个数学大国,拥有悠久的历史文化和辉煌的数学成就.秦汉时期的数学简牍与古埃及纸草书、古巴比伦数学泥板、古希腊数学文献以及古印度的《绳法经》并称为世界五大古文明的数学经典.

我国的《九章算术》中提出了负数的概念以及“正负术”(正数和负数的加减运算法则),比印度和欧洲建立负数概念分别早约 800 年和 1 600 年.祖冲之在圆周率计算方面的成就使中国领先西方约 1 000 年.杨辉三角的发现早于其他国家 400 多年,“中国剩余定理”比高斯创用的同类方法早 500 多年.

我国古代数学家刘徽在注解《九章算术》时提出了“割圆术”——用圆的内接正多边形逐步逼近的方法求圆的面积.他指出:“割之弥细,所失弥少,割之又割,以至于不可割,则与圆周合体而无所失矣.”这正体现了极限思想的雏形.

极限是高等数学中的一个重要概念,导数、积分等概念都是在极限的基础上建立的.因此,学习和掌握极限的思想与方法具有十分重要的意义.

思考:《庄子·天下篇》中写道:“一尺之棰,日取其半,万世不竭.”意思是一尺长的木棒,每天截去一半,将永远也截不完.你能用数学的语言对此加以表达吗?

本节将介绍数列的极限和函数的极限.

1.2.1 数列的极限

在中学阶段,我们已经学习了数列的概念.现在将进一步考察无穷数列 $\{a_n\}$ 当自变量 n 无限增大时, a_n 的变化趋势.先看下面几个数列.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots, \text{即 } a_n = \frac{1}{2^n}; \\ & 2, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n+(-1)^{n-1}}{n}, \dots, \text{即 } a_n = \frac{n+(-1)^{n-1}}{n}; \\ & 0, 1, 0, 1, \dots, \frac{1+(-1)^n}{2}, \dots, \text{即 } a_n = \frac{1+(-1)^n}{2}. \end{aligned}$$

通过观察这些数列的变化趋势,可以看出数列的变化大致有两种情形:一种是当 n 无限增大时,数列 a_n 无限接近于某个确定的常数;另一种是随着 n 的无限增大,数列 a_n 不能接近于任何一个确定的常数.

归纳上述数列的变化情况,我们给出如下定义.

定义 1 如果当 $n \rightarrow \infty$ 时,数列 a_n 能够无限接近于某个确定的常数 A ,那么这个常数 A 称为数列 $\{a_n\}$ 的极限,记作

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \quad \text{或记作} \quad a_n \rightarrow A (n \rightarrow \infty).$$

因此,上述数列中

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+(-1)^{n-1}}{n} = 1.$$

而数列 $a_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$ 的极限不存在.

例 1 观察下列数列的变化趋势,写出它们的极限.

$$(1)a_n=\frac{2}{n}; \quad (2)a_n=2; \quad (3)a_n=1+\frac{1}{n}; \quad (4)a_n=(-1)^n\frac{1}{3^n}.$$

解 观察可得:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} = 0; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} 2 = 2; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{1}{3^n} = 0.$$

结论:

$$(1)\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^a} = 0 (a > 0);$$

$$(2)\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0 (|q| < 1);$$

$$(3)\lim_{n \rightarrow \infty} C = C (C \text{ 为常数}).$$

1.2.2 函数的极限

函数的极限主要研究两种情形:一是当自变量 $x \rightarrow \infty$ (包括 $x \rightarrow +\infty$ 和 $x \rightarrow -\infty$),即 x 的绝对值无限增大时,函数 $f(x)$ 的极限;二是当自变量 $x \rightarrow x_0$ (包括从 x_0 的左侧和右侧无限接近),即 x 无限趋近于某个有限值 x_0 时,函数 $f(x)$ 的极限.

1. 当 $x \rightarrow \infty$ 时,函数 $f(x)$ 的极限

观察函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 当 $x \rightarrow \infty$ 时的变化趋势(见图 1-4).

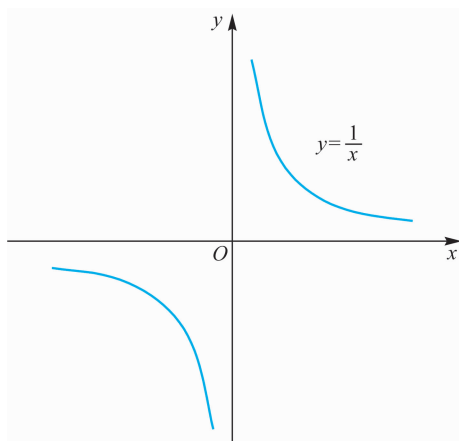


图 1-4



极限的概念(一)

由图 1-4 可见,当 x 的绝对值无限增大时,函数 $f(x)$ 的值无限接近于零.对于这种当 $x \rightarrow \infty$ 时函数 $f(x)$ 的变化趋势,我们给出如下定义.

定义 2 当 x 的绝对值无限增大时,如果函数 $f(x)$ 能够无限接近某个确定的常数 A ,那么称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow \infty$ 时的极限,记作

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \quad \text{或记作} \quad f(x) \rightarrow A (x \rightarrow \infty).$$

在上述定义中, x 的绝对值无限增大指的是 $x \rightarrow +\infty$ (x 取正值且无限增大)以及 $x \rightarrow -\infty$ (x 取负值且其绝对值无限增大)两种情形.但在具体问题中, x 的变化趋势有时仅涉及其中一种情形.因此,定

义 2 中的 $x \rightarrow \infty$ 可以具体表示为 $x \rightarrow +\infty$ 或 $x \rightarrow -\infty$.

例 2 求下列函数极限.

(1) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; (2) $y = 2^x$; (3) $y = \arctan x$.

解 通过作图分析(见图 1-5 和图 1-6)可得:

(1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$;

(2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = 0$;

(3) 因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$, 所以 $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x$ 不存在.

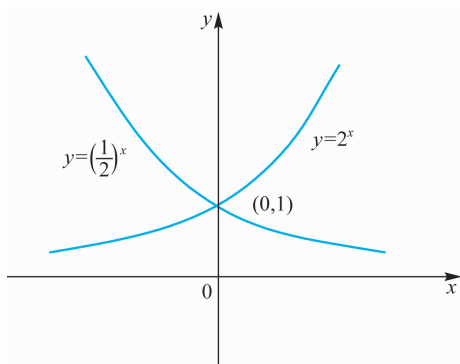


图 1-5

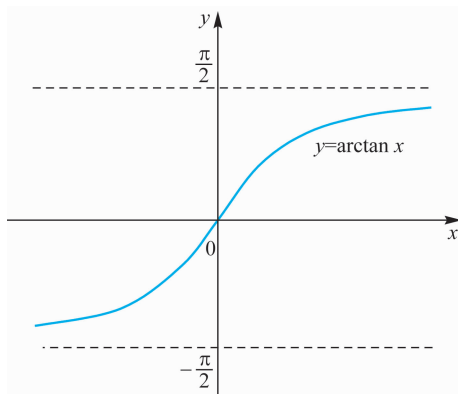


图 1-6

一般地,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A.$$

显然, 数列的极限是函数在 $x \rightarrow +\infty$ 时极限的一个特殊情形.

2. 当 $x \rightarrow x_0$ 时, 函数 $f(x)$ 的极限

以函数 $f(x) = \frac{1}{3}x + 1$ 为例, 观察当 $x \rightarrow 3$ 时函数的变化趋势(见图 1-7).

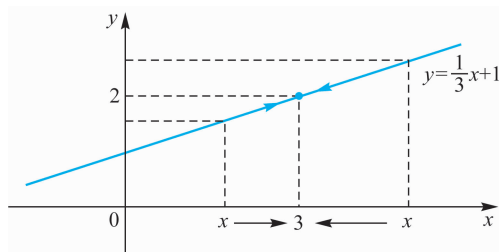


图 1-7

由图 1-7 可见, 当 x 从 3 的左侧和右侧逐渐接近 3 时, 函数 $f(x)$ 的值也越来越接近 2.

据此我们给出以下定义.

定义 3 当 x 无限接近于 x_0 (但 x 可以不等于 x_0) 时, 如果函数 $f(x)$ 能够无限接近某个确定的常数 A , 则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的极限, 记作



极限的概念(二)



极限的概念(三)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \quad \text{或记作} \quad f(x) \rightarrow A (x \rightarrow x_0).$$

由图 1-7 可见, 当 $x \rightarrow 3$ 时, 函数 $f(x) = \frac{1}{3}x + 1$ 的极限为 2, 记作

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{3}x + 1 \right) = 2.$$

例 3 求函数 $y = f(x) = \frac{4x^2 - 1}{2x - 1}$ 的极限.

解 函数的定义域为 $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

由图 1-8 可见, 当 $x \rightarrow \frac{1}{2}$ 时, 函数 $f(x) \rightarrow 2$, 因此 $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 1}{2x - 1} = 2$.

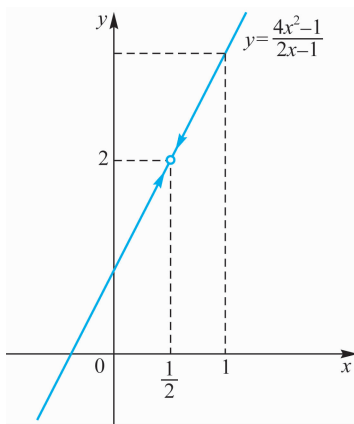


图 1-8

注意 函数 $f(x)$ 在 $x \rightarrow x_0$ 时的极限, 与函数在该点是否有定义无关. 根据定义 3, 可得出以下结论.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} C = C, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0.$$

上面所讨论的 $x \rightarrow x_0$, 是指自变量 x 从 x_0 的左侧和右侧同时趋近于 x_0 . 但在某些问题中, 我们只需了解当 x 从左侧 ($x < x_0$) 或从右侧 ($x > x_0$) 趋近于 x_0 时函数 $f(x)$ 的变化趋势. 这就引出了左极限和右极限的概念.

定义 4 当 x 从 x_0 的左侧无限趋近于 x_0 时, 若函数 $f(x)$ 能无限接近于某个确定的常数 A , 则称 A 为函数 $f(x)$ 在 $x \rightarrow x_0^-$ 时的左极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x_0 - 0) = A.$$

当 x 从 x_0 的右侧无限趋近于 x_0 时, 若函数 $f(x)$ 能无限接近于某个确定的常数 A , 则称 A 为函数 $f(x)$ 在 $x \rightarrow x_0^+$ 时的右极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x_0 + 0) = A.$$

左极限与右极限统称为单侧极限.

一般地, 函数在某点的极限存在, 等价于其左极限与右极限存在且相等, 即

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A.$$

例 4 讨论函数 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x-1, & x > 0 \end{cases}$ 在 $x \rightarrow 0$ 时的极限是否存在.

解 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x+1) = 1, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x-1) = -1.$

因为 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 不存在.

例 5 讨论函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2, & x \leq 1 \\ x-2, & x > 1 \end{cases}$ 在 $x \rightarrow 1$ 时的极限.

解 作该函数的图像, 如图 1-9 所示.

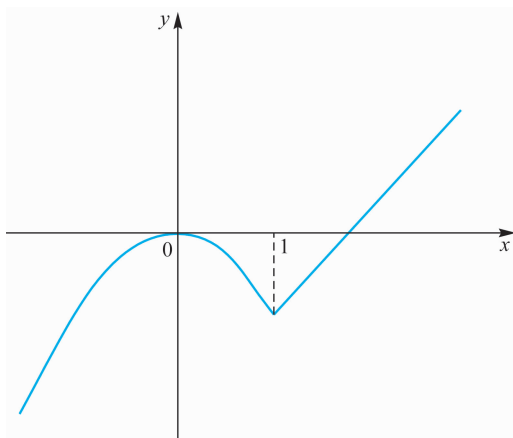


图 1-9

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-x^2) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-2) = -1.$$

因为

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -1,$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -1.$$

同步训练 1-2

1. 判断下列数列是否具有极限. 若有, 写出极限值.

(1) $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \dots, \frac{n-1}{n+1}, \dots;$

(2) $0.9, 0.99, 0.999, 0.9999, \dots;$

(3) $-1, 2, -3, \dots, (-1)^n n, \dots.$

2. 说明下列极限不存在的原因.

(1) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan x;$

(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x.$

3. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2+2, & x < 1 \\ 2x+1, & x \geq 1 \end{cases}$, 讨论函数 $f(x)$ 在 $x \rightarrow 1$ 时的极限.

4. 求下列极限.

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{10^n}\right);$

(2) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \tan x;$

(3) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x-2}{x^2-1}.$

1.3 极限的计算

1.3.1 极限的四则运算法则

对于比较复杂的函数极限问题,通常需要利用极限的运算法则来进行计算.

设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, 则有以下运算法则.

法则 1 $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A \pm B.$

法则 2 $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = [\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)] \cdot [\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)] = A \cdot B.$

法则 3 $\lim_{x \rightarrow x_0} [Cf(x)] = C \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = C \cdot A (C \text{ 为常数}).$

法则 4 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{A}{B} (B \neq 0).$

注意 (1) 以上四则运算前提是两个函数的极限都存在.

(2) 法则 1 和法则 2 可以推广到任意有限个具有极限的函数.

(3) 上述法则在 $x \rightarrow \infty$ 的情形下同样适用.

例 1 求 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3}.$

解 由于当 $x \rightarrow 3$ 时, 分母 $x - 3 \rightarrow 0$, 因此不能直接使用法则 4. 但在极限过程中 $x \neq 3$, 所以可对分子进行因式分解.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-1)(x-3)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x-1) = 2.$$

例 2 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 4x^2 + 2}{7x^3 + 5x^2 - 3}.$

解 分子分母同除以 x^3 , 然后根据极限的四则运算法则得

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 4x^2 + 2}{7x^3 + 5x^2 - 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{4}{x} + \frac{2}{x^3}}{7 + \frac{5}{x} - \frac{3}{x^3}} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} 3 - 4 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} + 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^3}}{\lim_{x \rightarrow \infty} 7 + 5 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} - 3 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^3}} = \frac{3 - 4 \times 0 + 2 \times 0}{7 + 5 \times 0 - 3 \times 0} = \frac{3}{7}.$$

结论: 设 $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$, 当 $x \rightarrow \infty$ 时, 有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, & n=m \\ 0, & n>m \\ \infty, & n<m \end{cases}.$$

例 3 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\cdots+(n-1)}{n^2}.$

解 因为 $1+2+3+\cdots+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$, 所以

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\cdots+(n-1)}{n^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n(n-1)}{2}}{n^2} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} \times (1-0) = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

例 4 已知数列

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \dots, \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \dots$$

是一个无穷递缩等比数列, 求

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right].$$

解 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$

一般地, 当 $|q| < 1$ 时, 数列 $\{q^n\}$ 收敛于 0, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$, 因此无穷等比数列 $a_1 + a_1q + a_1q^2 + \cdots + a_1q^{n-1} + \cdots$ 的和为 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1}{1-q}$, 称其为无穷递缩等比数列的公式.

1.3.2 两个重要极限

1. 重要极限一: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

通过观察函数 $y = \frac{\sin x}{x}$ 的图像(见图 1-10), 可以直观地发现: 当 $x \rightarrow 0$ 时, 函数值逐渐趋近于 1.

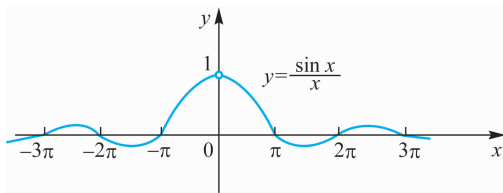


图 1-10

该极限公式的一般形式也可以写为 $\lim_{\square \rightarrow 0} \frac{\sin \square}{\square} = 1$, 其中“ $\square$ ”表示相同的变量或表达式.

例 5 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$.

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(2 \cdot \frac{\sin 2x}{2x}\right).$

令 $2x = t$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, 有 $t \rightarrow 0$. 故

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(2 \cdot \frac{\sin 2x}{2x}\right) = 2 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 2 \times 1 = 2.$$

例 6 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$.

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1.$

例 7 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}.$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2}.$

2. 重要极限二: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

其中, e 是一个无理数, 其近似值为 2.718 281 828 459 045...

在极限表达式 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ 中, 令 $\frac{1}{x} = z$, 则当 $x \rightarrow \infty$ 时, 有 $z \rightarrow 0$, 于是该极限形式又可写为

$$\lim_{z \rightarrow 0} (1+z)^{\frac{1}{z}} = e.$$

此极限的常见记法还包括以下等价形式

$$\lim_{\square \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\square}\right)^{\square} = e, \quad \lim_{\square \rightarrow 0} (1 + \square)^{\frac{1}{\square}} = e,$$

其中“ $\square$ ”表示相同的变量或表达式.

例 8 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x}.$

解 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \right]^2 = \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \right]^2 = e^2.$

例 9 $\lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{1}{x}}.$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1-x)^{-\frac{1}{x}} \right]^{-1} = \left[\lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{-\frac{1}{x}} \right]^{-1} = \frac{1}{e}.$

例 10 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{4x+3}.$

解 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{4x+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left[\left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{2x} \right]^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^3 \right\}$
 $= \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{2x} \right]^2 \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^3$
 $= e^2.$

第二个重要极限在经济学中有重要的实际使用背景, 即连续复利的计算.

设本金为 P_0 , 年利率为 r , 那么第一年年末的利息为 $P_0 r$, 本利和为 $P_1 = P_0 + P_0 r$. 将 P_1 作为第二年的本金; 到第二年年末, 本利总和为 $P_2 = P_0(1+r)^2$. 以此类推, 本金每年增加, 利息也逐年增多, 到第 n 年年末, 本利和为

$$P_n = P_0(1+r)^n \quad (1-1)$$

若将利息每月加入本金一次, 即一年复利 12 次, 则第一年年末的本利和为

$$P_1 = P_0 \left(1 + \frac{r}{12}\right)^{12} \quad (1-2)$$

例如, 当本金为 100 元, 年利率为 $r=0.05$ 时, 按照式(1-1), 第一年年末本利和为 105 元; 按照式(1-2), 第一年年末本利和为 105.12 元. 显然, 利息加入本金的频率越高, 本利和就越多. 那么, 如果利息每一瞬间(即一年复利 n 次, $n \rightarrow \infty$) 加入本金一次, 会不会使本利和无限增加呢?

将式(1-2)中的 12 改为 n , 得到

$$P_1 = P_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n \quad (1-3)$$

为了便于计算, 设 $\frac{r}{n} = \frac{1}{m}$, 得到 $n = mr$, 将其代入式(1-3), 得

$$P_1 = P_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n = P_0 \left[\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \right]^r \quad (1-4)$$

这就引出了极限问题: $\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = e$, 因此, 式(1-4)可写为 $P_1 = P_0 e^r$.

从上面的推导可以看出, 在年利率一定的条件下, 随着复利期数趋于无穷, 虽然利息逐步增多, 但本利和并不会无限增长, 而是趋近于一个极限值. 早在 1683 年, 瑞士数学家雅各布·伯努利在研究连续复利问题时就意识到需要通过极限思想加以解决.

同步训练 1-3

1. 求下列极限.

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - n + 1}{1 + n^2};$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{3^n}\right);$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 5}{x^2 + 1};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x-2}{x^2-1};$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 6x + 5}{x - 5};$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right) \left(5 - \frac{1}{x^2}\right);$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x - 2}{x^4 + x^2 - 1};$$

$$(8) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}.$$

2. 求下列极限.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\sin 5x};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \sin \frac{1}{x^2};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+3)}{\sin x};$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^2 - 1)}{x - 1};$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{1}{x}};$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+x}{x}\right)^{2x};$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \tan x)^{\cot x};$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^x;$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3-x}{2-x}\right)^x.$$

3. 数列 $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \cdots$ 称为斐波那契数列, 它在现实生活中具有奇妙的规律性. 该数列满足如下递推关系: $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. 数列的极限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n+1}}$ 称为黄金比率, 该比值常用于建筑设计中, 有助于增强结构的美感与协调性. 试求黄金比率.

4. 已知一个无穷递缩等比数列各项的和为 12, 而各项的平方和为 72. 求该数列的首项和公比, 并写出其通项.

1.4 无穷小量与无穷大量

1.4.1 无穷小量

1. 无穷小量的定义

在实际问题中,我们经常遇到极限为零的变量.例如,单摆离开铅直位置而摆动,由于空气阻力和机械摩擦力的作用,它的振幅随着时间的增加而逐渐减小并趋于零.又如,电容器放电时,其电压随着时间的增加而逐渐减小并趋于零.

对于这样的变量我们给出下面的定义.

定义 1 如果当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时,函数 $f(x)$ 的极限为零,那么函数 $f(x)$ 称为当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的无穷小量,简称为无穷小.

例如,当 $x \rightarrow 1$ 时, $x-1$ 是无穷小;当 $x \rightarrow \infty$ 时, $\frac{1}{x}$ 是无穷小.

注意 (1) 无穷小是极限为零的变量,任何一个绝对值很小的常数(如 0.000 001 或 -0.000 001)都不是无穷小,但常数中只有“0”可以看作无穷小,因为

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} 0 = 0.$$

(2) 说一个函数 $f(x)$ 是无穷小,必须指明自变量的变化趋势.例如,函数 $x-1$,当 $x \rightarrow 1$ 时是无穷小,而 x 趋向其他数值时, $x-1$ 就不是无穷小.

2. 无穷小的性质

性质 1 有限个无穷小的代数和是无穷小.

性质 2 有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

性质 3 有限个无穷小的乘积是无穷小.

例 1 求 $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin \frac{1}{x}$.

解 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin \frac{1}{x}$ 的极限不存在,所以不能应用极限的运算法则,但 $\left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1$ 即 $\sin \frac{1}{x}$ 是有界函数,而 $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$,根据无穷小的性质 2,可得

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin \frac{1}{x} = 0.$$

同理, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

注意 两个无穷小的商不一定是无穷小,它可能是无穷小,也可能是无穷大、常数,甚至也可能极限并不存在.

3. 函数极限与无穷小的关系

定理 1 在同一个自变量的变化过程中,具有极限的函数等于它的极限与一个无穷小之和;反之,如果函数可表示为常数与无穷小之和,那么该常数就是该函数的极限.

下面就 $x \rightarrow x_0$ 时的情形加以证明.

证明 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 令 $\alpha = f(x) - A$, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha = \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - A) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} A = A - A = 0.$$

所以 α 是 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小.

而 $f(x) = A + \alpha$, 所以 $f(x)$ 是 A 与无穷小之和.

这就证明了具有极限的函数等于它的极限与一个无穷小之和.

反之, 设 $f(x) = A + \alpha$, 其中 A 为常数, α 是当 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (A + \alpha) = \lim_{x \rightarrow x_0} A + \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha = A + 0 = A.$$

这就证明了如果函数可以表示为常数与无穷小之和, 那么该常数就是该函数的极限.

类似地, 可以证明当 $x \rightarrow \infty$ 时的情形.

1.4.2 无穷大量

1. 无穷大量的定义

定义 2 如果当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时, 函数 $f(x)$ 的绝对值无限增大, 那么函数 $f(x)$ 称为当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的无穷大量, 简称为无穷大.

注意 (1) 若在 x 的变化过程中, $f(x)$ 是无穷大, 我们称 $f(x)$ 的极限不存在, 但为了便于叙述函数的这一变化特征, 我们也称“函数的极限为无穷大”并记为

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x) = \infty \text{ (或 } +\infty \text{ 或 } -\infty \text{)}.$$

(2) 无穷大也是变量, 任何一个绝对值很大的常数(如 10^{10} , -10^{100})都不是无穷大.

(3) 说一个函数是无穷大, 必须指明自变量的变化趋势, 如函数 $\frac{1}{x}$, 当 $x \rightarrow 0$ 时为无穷大, 而 x 趋向其他数值时, $\frac{1}{x}$ 就不是无穷大.

2. 无穷小与无穷大的关系

定理 2 在同一自变量的变化过程中, 如果 $f(x)$ 为无穷大, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 是无穷小; 反之, 如果 $f(x)$ 为无穷小, 且 $f(x) \neq 0$, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

例 2 求极限 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+4}{x-1}$.

解 当 $x \rightarrow 1$ 时, 分母的极限为零, 所以不能应用极限的运算法则, 但因为

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x+4} = 0,$$

即 $\frac{x-1}{x+4}$ 是无穷小, 根据无穷小与无穷大的倒数关系可知, $\frac{x+4}{x-1}$ 是当 $x \rightarrow 1$ 时的无穷大, 即

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+4}{x-1} = \infty.$$

例3 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - 3x + 2)$.

解 因为 $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2$ 与 $\lim_{x \rightarrow \infty} 3x$ 都不存在, 所以不能应用极限的运算法则进行运算. 但因为

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^2}}{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} = 0,$$

即 $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - 3x + 2)$ 是当 $x \rightarrow \infty$ 时的无穷小.

所以它的倒数 $x^2 - 3x + 2$ 是 $x \rightarrow \infty$ 时的无穷大, 即 $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - 3x + 2) = \infty$.

例4 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - x^2 + 5}{x^2 + 1}$.

解 因为分子、分母的极限都不存在, 所以不能应用极限的运算法则进行运算. 但因为

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{2x^3 - x^2 + 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}}{2 - \frac{1}{x} + \frac{5}{x^3}} = 0,$$

即 $\frac{1}{2x^3 - x^2 + 5}$ 是当 $x \rightarrow \infty$ 时的无穷小. 所以 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - x^2 + 5}{x^2 + 1} = \infty$.

1.4.3 无穷小的比较

在无穷小的性质中, 我们已经知道两个无穷小的和、差、积仍为无穷小, 那么两个无穷小的商是否为无穷小呢?

例如, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $2x, 3x, x^2$ 都是无穷小, 然而

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{2x} = \frac{3}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{x^2} = \infty.$$

两个无穷小之商的各种极限情况, 反映了分子、分母趋于零的“快慢”程度的不同, 就上面的例子而言, 当 $x \rightarrow 0$ 时 $x^2 \rightarrow 0$ 要比 $2x \rightarrow 0$ “快些”; 反过来, $3x \rightarrow 0$ 要比 $x^2 \rightarrow 0$ “慢些”, 而 $2x \rightarrow 0$ 和 $3x \rightarrow 0$ 的“快慢”相仿.

为了对无穷小趋于零的速度有一个定性、准确的描述, 下面我们引出“无穷小的阶”的概念.

定义3 设 α 与 β 是同一自变量的变化过程中的两个无穷小, 即 $\lim \alpha = 0, \lim \beta = 0$.

(1) 若 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 0$, 则称 α 是比 β 较高阶的无穷小;

(2) 若 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = \infty$, 则称 α 是比 β 较低阶的无穷小;

(3) 若 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = C \neq 0$, 则称 α 与 β 是同阶无穷小.

特别地, 当 $C=1$ 时, 即 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 1$ 时, 称 α 与 β 是等价无穷小, 记为 $\alpha \sim \beta$.

由上面定义可知, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $2x$ 与 $3x$ 是同阶无穷小, x^2 是比 $2x$ 更高阶的无穷小, $3x$ 是比 x^2 较低阶无穷小.

1.4.4 等价无穷小的性质及应用

定理 3(等价无穷小代换定理) 如果在自变量 x 的某一变化过程 p 中, $\alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta'$, 且 $\lim_{p} \frac{\beta'}{\alpha'}$ 存在 (或为 ∞), 则 $\lim_{p} \frac{\beta}{\alpha} = \lim_{p} \frac{\beta'}{\alpha'}$.

证明 由已知

$$\lim_{p} \frac{\beta}{\beta'} = 1, \quad \lim_{p} \frac{\alpha'}{\alpha} = 1,$$

因此

$$\lim_{p} \frac{\beta}{\alpha} = \lim_{p} \left(\frac{\beta}{\beta'} \cdot \frac{\beta'}{\alpha'} \cdot \frac{\alpha'}{\alpha} \right) = \lim_{p} \frac{\beta}{\beta'} \cdot \lim_{p} \frac{\beta'}{\alpha'} \cdot \lim_{p} \frac{\alpha'}{\alpha} = \lim_{p} \frac{\beta'}{\alpha'}.$$

由此定理可知, 在求两个无穷小之商的极限时, 分子、分母可分别用它们的等价无穷小代替, 以简化极限计算过程.

利用等价无穷小的定义可以证明, 当 $x \rightarrow 0$ 时, 下面一些常用的等价无穷小:

$$\sin x \sim x; \quad 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2; \quad \tan x \sim x; \quad \sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{x}{2};$$

$$\arcsin x \sim x; \quad \arctan x \sim x; \quad e^x - 1 \sim x; \quad \ln(1+x) \sim x.$$

例 5 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{\sin 5x}$.

解 因为当 $x \rightarrow 0$ 时, $\tan 3x \sim 3x, \sin 5x \sim 5x$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{\sin 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{5x} = \frac{3}{5}.$$

例 6 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - x}{\tan x}$.

解 因为当 $x \rightarrow 0$ 时, $\tan x \sim x$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - x}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (3x - 1) = -1.$$

例 7 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \tan^2 x}{1 - \cos x}$.

解 因为当 $x \rightarrow 0$ 时, $\tan x \sim x, 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \tan^2 x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot x^2}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} 2x = 0.$$

例 8 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x}$.

解 将分式先变形再做等价无穷小代换,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{\sin^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x(1 - \cos x)}{\cos x \cdot \sin^3 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \frac{x^2}{2}}{\cos x \cdot x^3} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

在例8中,如果一开始就由 $\sin x \sim x$, $\tan x \sim x$, 对原式做无穷小代换,则将导致错误的结果,即

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$$

是错误的(这是因为当 $x \rightarrow 0$ 时, $\tan x - \sin x$ 与 $x - x$ 不等价).

注意 利用等价无穷小代换定理求极限时,只有当分子或分母为函数的连乘积时,各个乘积因式才可以分别用它们的等价无穷小代换,而对于和或差中的函数,通常不允许分别用等价无穷小代换,否则将会导致错误结果.

同步训练 1-4

1. 下列函数在自变量怎样变化时是无穷小? 无穷大?

$$(1) y = \frac{1}{x^3}; \quad (2) y = \frac{1}{x+1};$$

$$(3) y = \cot x; \quad (4) y = \ln x.$$

2. 计算下列极限.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x-1}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 2x + 8}{3x^2 + 1};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} (2x^3 - x + 1); \quad (4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin 2x}{x^2};$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan x}{x}; \quad (6) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x + 3};$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 4x}{8(1 - \cos^2 x)}; \quad (8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}.$$

3. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $2x - x^2$ 与 $x^2 - x^3$ 相比, 哪一个是比较高阶的无穷小?

4. 证明: 当 $x \rightarrow -3$ 时, $x^2 + 6x + 9$ 是比 $x + 3$ 较高阶的无穷小.

5. 当 $x \rightarrow 1$ 时, $1 - x$ 与 $1 - \sqrt[3]{x}$ 是否同阶? 是否等价?

1.5 函数的连续性

在许多实际问题中,变量的变化常常是连续不断的. 例如,气温随时间的变化而变化: 当时间的改变很小时,气温的变化也很小. 这就是说,气温是连续变化的. 又如,植物的生长、河水的流动、金属的热胀冷缩等现象,也都是连续变化的. 这些自然界中的连续变化,在数学中反映为函数的连续性. 函数的连续性是微积分中的又一个重要基本概念.

1.5.1 函数的增量

定义 1 设变量 u 从初值 u_1 变化到终值 u_2 , 则终值与初值之差 $u_2 - u_1$ 称为变量 u 的增量, 记作 Δu , 即

$$\Delta u = u_2 - u_1.$$

注意 增量 Δu 可以为正,也可以为负;当 u 由小变大时, $\Delta u > 0$; 当 u 由大变小时, $\Delta u < 0$.

设函数 $y=f(x)$ 在点 x 及其邻近处有定义. 当自变量 x 由初值 x_0 变为终值 $x_0+\Delta x$ 时, 自变量的增量为 $\Delta x=(x_0+\Delta x)-x_0$, 函数值从 $f(x_0)$ 变化到 $f(x_0+\Delta x)$, 函数的增量为 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$, 如图 1-11 所示.

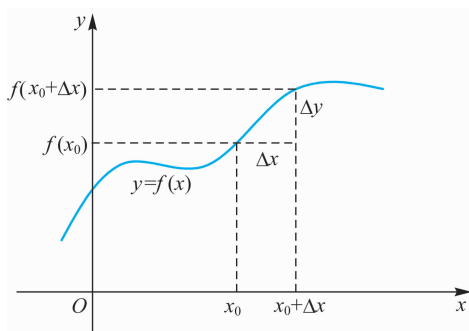


图 1-11

例 1 设 $y=f(x)=3x^2-1$, 求适合下列条件的自变量的增量 Δx 和函数的增量 Δy .

- (1) 当 x 由 1 变到 1.5;
- (2) 当 x 由 1 变到 0.5;
- (3) 当 x 由 1 变到 $1+\Delta x$.

解 (1) $\Delta x=1.5-1=0.5$,

$$\Delta y=f(1.5)-f(1)=5.75-2=3.75;$$

(2) $\Delta x=0.5-1=-0.5$,

$$\Delta y=f(0.5)-f(1)=-0.25-2=-2.25;$$

(3) $\Delta x=(1+\Delta x)-1=\Delta x$,

$$\Delta y=f(1+\Delta x)-f(1)=[3(1+\Delta x)^2-1]-2=6\Delta x+3(\Delta x)^2.$$

1.5.2 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的连续性

首先观察图 1-12 和图 1-13.

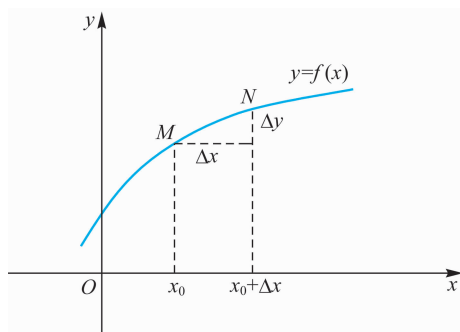


图 1-12

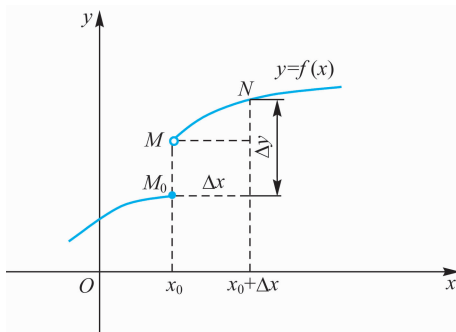


图 1-13

图 1-12 的特征是: 当 Δx 很小时, Δy 也很小, 即当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, $\Delta y \rightarrow 0$.



函数在点 x_0 处连续



函数在点 x_0 处不连续

图 1-13 的特征是:当 Δx 很小时, Δy 也很小;但当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, Δy 并不能趋于 0, 而是趋近于一个非零常数(线段 MM_0 的长度).

由此引出函数在某点处连续的定义.

定义 2 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义. 如果当自变量 x 在点 x_0 处的增量 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, 函数的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 也趋于 0, 即

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0 \quad \text{或} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0,$$

则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续.

例 2 用定义 2 证明函数 $y=3x^2-1$ 在点 $x=1$ 处连续.

证明 由于函数 $y=3x^2-1$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 因此该函数在点 $x=1$ 处及其附近有定义.

由例 1 可知, 当自变量的增量为 Δx 时, 函数的增量为

$$\Delta y = 6\Delta x + 3(\Delta x)^2.$$

由于 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (6\Delta x + 3(\Delta x)^2) = 0$, 所以根据定义 2, 函数 $y=3x^2-1$ 在点 $x=1$ 处连续.

若令 $x=x_0+\Delta x$, 则 $\Delta y=f(x)-f(x_0)$, 如图 1-14 所示. 此时, $\Delta x \rightarrow 0$, 即 $x \rightarrow x_0$; $\Delta y \rightarrow 0$, 即 $f(x) \rightarrow f(x_0)$; $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$, 即 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

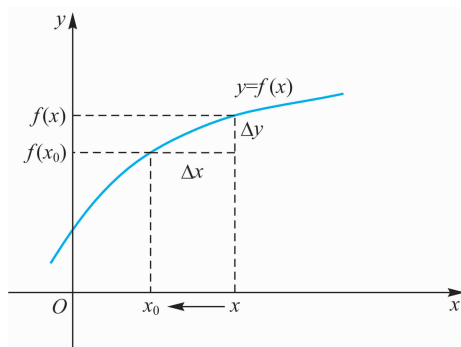


图 1-14

定义 3 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义. 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 即函数的极限存在且等于其在该点的函数值, 则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续.

例 3 用定义 3 证明函数 $y=f(x)=3x^2-1$ 在点 $x=1$ 处连续.

证明 由于函数 $y=f(x)=3x^2-1$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 因此它在点 $x=1$ 处及其附近有定义.

又因为 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (3x^2-1) = 2 = f(1)$, 所以, 根据定义 3, 函数 $y=3x^2-1$ 在点 $x=1$ 处连续.

注意 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续, 必须满足以下三个条件.

- (1) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有定义.
- (2) 极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在.
- (3) 极限值等于函数值, 即 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.



函数在点 x_0 处的
连续性(定义 2)

例 4 讨论函数 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 0 \\ 2-x, & x \geq 0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 处的连续性, 并画出其图像.

解 作出该函数的图像, 如图 1-15 所示. 由题意可知, 函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 及其邻近处有定义.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x+1) = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2-x) = 2.$$

因为 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 不存在, 从而函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处不连续.

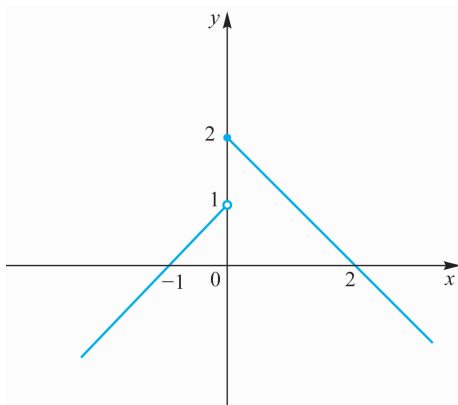


图 1-15

1.5.3 函数 $y=f(x)$ 在区间上的连续性

1. 左连续与右连续的概念

设函数 $f(x)$ 在区间 $(a, b]$ 内有定义, 如果左极限 $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ 存在且等于 $f(b)$, 即 $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$, 则称函数 $f(x)$ 在点 b 处左连续.

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b)$ 内有定义, 如果右极限 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 存在且等于 $f(a)$, 即 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$, 则称函数 $f(x)$ 在点 a 处右连续.

2. 函数 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内的连续性

若函数 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内有定义, 并且在该区间内的每一点处都连续, 则称函数 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内连续. 此时, (a, b) 称为函数 $f(x)$ 的连续区间.

3. 函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上的连续性

若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上有定义, 且满足在 (a, b) 内连续; 在右端点 b 处左连续, 即 $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$; 在左端点 a 处右连续, 即 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$; 则称函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续.

连续函数的图像通常是一条连续而不间断的曲线.

1.5.4 函数的间断点

先考察下列三个函数在点 $x=1$ 处的连续性.

(1) 函数 $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ 在点 $x=1$ 处没有定义, 因此 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处不连续, 如图 1-16 所示.

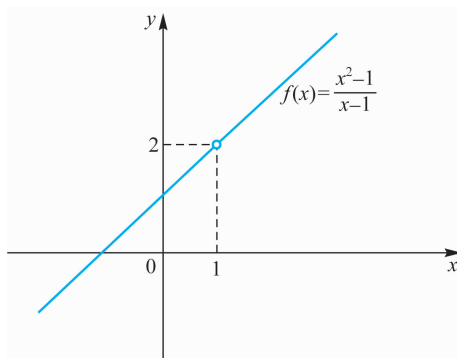


图 1-16

(2) 函数 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x>1 \\ 0, & x=1 \\ x-1, & x<1 \end{cases}$ 虽然在点 $x=1$ 处有定义, 但由于 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 不存在, 因此 $f(x)$ 在点

$x=1$ 处不连续, 如图 1-17 所示.

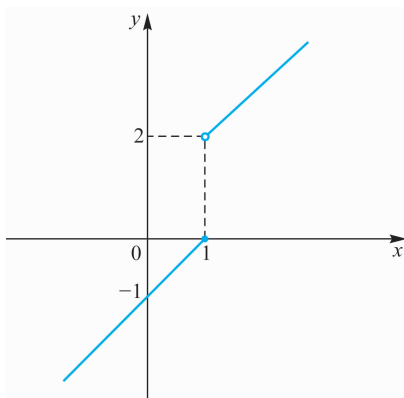


图 1-17

(3) 函数 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \neq 1 \\ 0, & x=1 \end{cases}$ 虽然在点 $x=1$ 处有定义, 且 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$, 但 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1)$, 因此

$f(x)$ 在点 $x=1$ 处不连续, 如图 1-18 所示.

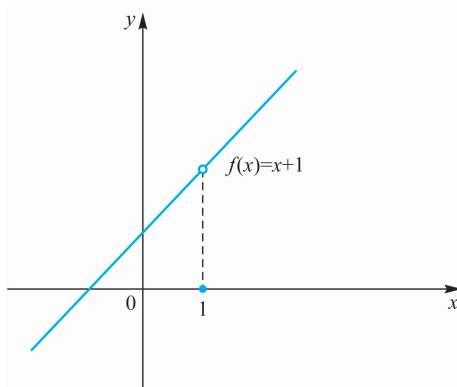


图 1-18

从上述三个函数可以看出,虽然它们在点 $x=1$ 处都不连续,但不连续的原因各不相同.

一般来说,若函数 $f(x)$ 满足下列任一情形,则称其在点 $x=x_0$ 不连续,该点称为函数 $f(x)$ 的不连续点或间断点.

(1) 函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 的某邻域内有定义,但在点 $x=x_0$ 处没有定义.

(2) 极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在.

(3) 极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在,但 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

若函数在点 $x=x_0$ 处的左右极限都存在,则该间断点称为第一类间断点;若左右极限有任一不存在,则为第二类间断点.

若 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$,则称该点为跳跃间断点;若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在,但不等于 $f(x_0)$,则称为可去间断点.

例 5 求下列函数的间断点.

(1) $y = \tan x$;

(2) $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 0 \\ \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$;

(3) $f(x) = \begin{cases} x-1, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$.

解 (1) 函数 $y = \tan x$ 的定义域为 $x \in \mathbf{R}$ 且 $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$, 因此点 $x = k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$ 是函数 $y = \tan x$ 的间断点. 由于 $\lim_{x \rightarrow k\pi + \frac{\pi}{2}} \tan x = \infty$, 通常将这类间断点称为无穷间断点, 属于第二类间断点.

(2) 函数 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 0 \\ \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 处有定义, 但 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x+1) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, 即 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 不存在, 因此点 $x=0$ 是函数的无穷间断点.

(3) 函数 $f(x) = \begin{cases} x-1, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$ 在点 $x=1$ 处有定义, 且 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0$, 但 $f(1) = 2$, 即 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1)$, 因此点 $x=1$ 是函数的间断点, 属于可去间断点.

1.5.5 初等函数的连续性

基本初等函数在其定义域内的每一点处都是连续的.

定理 1 如果函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在点 x_0 处连续, 则它们的和 $f(x) + g(x)$ 、差 $f(x) - g(x)$ 、积 $f(x) \cdot g(x)$ 、商 $\frac{f(x)}{g(x)}$ (当 $g(x_0) \neq 0$ 时) 在点 x_0 处也连续.

定理 2 设函数 $y = f(u)$ 在点 u_0 处连续, 函数 $u = \varphi(x)$ 在点 x_0 处连续, 且 $u_0 = \varphi(x_0)$, 则复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 在点 x_0 处连续.

由以上两个定理可知, 一切初等函数在其定义域内都是连续的. 在确定分段函数的连续性时, 应着重讨论分界点处是否连续.

关于初等函数的连续性,有以下两个重要结论.

(1) 多项式函数 $y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内连续.

(2) 分式函数 $y=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}$ 除在使分母为零的点处不连续外,在其余定义域内都连续.

根据函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续的定义,如果 $f(x)$ 是初等函数,且 x_0 是其定义域内的点,则极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 等于函数值 $f(x_0)$,即

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

例 6 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1-x^2}$.

解 设 $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, 这是一个初等函数,其定义域为 $[-1, 1]$, 而 $x=0$ 属于该定义域, 因此

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1-x^2} = f(0) = 1.$$

例 7 求 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)$.

解 设函数 $f(x) = \ln(\sin x)$, 它的一个定义区间为 $(0, \pi)$, 而 $x = \frac{\pi}{2}$ 在该区间内, 因此

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \ln\left(\sin \frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

1.5.6 闭区间上连续函数的性质

1. 最大值与最小值性质

定理 3 如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则它在该区间上一定存在最大值与最小值. 如图 1-19 所示, 函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 在点 ξ_1 和端点 b 处分别取得最大值 M , 在点 ξ_2 处取得最小值 m .

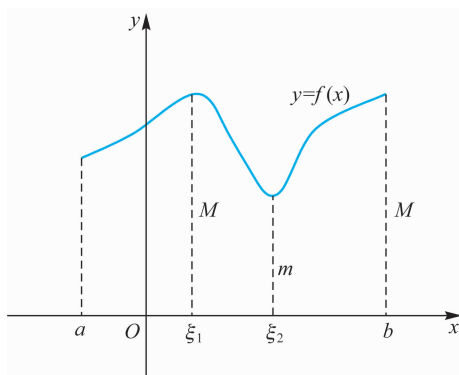


图 1-19

注意 对于在开区间上连续的函数或在闭区间上有间断点的函数, 其最大值与最小值不一定存在.

例如, 函数 $y=x$ 在开区间 (a, b) 内连续, 但在该区间内既无最大值, 也无最小值, 如图 1-20(a) 所示.

又如, 函数 $f(x) = \begin{cases} -x+1, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1 \\ -x+3, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$ 在闭区间 $[0, 2]$ 上的点 $x=1$ 处存在间断, 因此该函数在闭

区间 $[0, 2]$ 上既无最大值, 也无最小值, 如图 1-20(b) 所示.

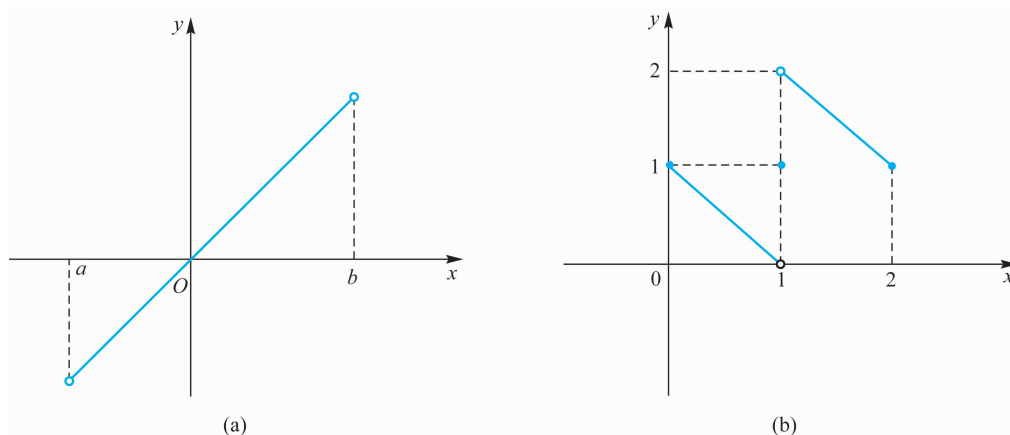


图 1-20

2. 介值定理

定理 4 如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 且 m 和 M 分别为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最小值与最大值, 那么对任意介于 m 和 M 之间的实数 C (即 $m < C < M$), 至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) = C$, 如图 1-21 所示.

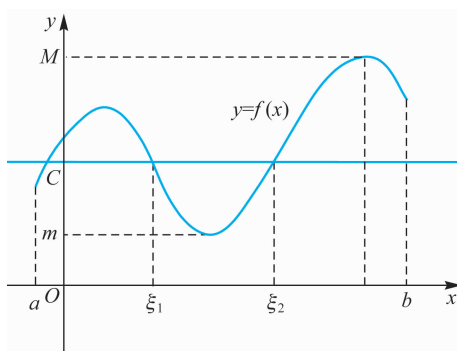


图 1-21

推论 如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号, 即 $f(a) \cdot f(b) < 0$, 则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) = 0$.

如图 1-22 所示, 连续曲线 $y=f(x)$ 满足 $f(a) < 0, f(b) > 0$, 则其图像与 x 轴相交于点 ξ_1, ξ_2, ξ_3 , 因此

$$f(\xi_1) = f(\xi_2) = f(\xi_3) = 0.$$

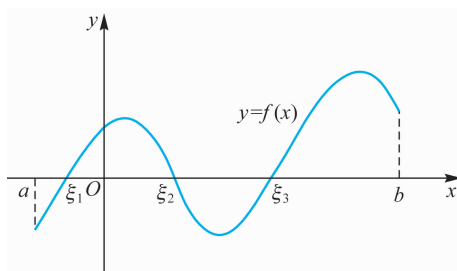


图 1-22

注意 如果函数仅在开区间 (a, b) 内连续, 或在闭区间 $[a, b]$ 上存在间断点, 则上述介值定理不一定成立.

例如, 函数 $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ 在区间 $[0, 2]$ 上的点 $x=1$ 处存在间断. 虽然 $f(0)=1, f(2)=3$, 但若取 $C=2$, 则在 $[0, 2]$ 上找不到一点 ξ 使得 $f(\xi)=2$, 如图 1-23 所示.

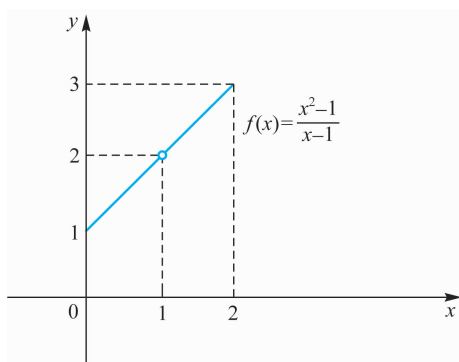


图 1-23

同步训练 1-5

1. 设函数 $y=f(x)=x^3-2x+5$, 求适合下列条件的自变量的增量和对应函数的增量.

- (1) 当 x 由 2 变到 3;
- (2) 当 x 由 2 变到 1;
- (3) 当 x 由 2 变到 $2+\Delta x$;
- (4) 当 x 由 x_0 变到 x .

2. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x^2-1, & 0 \leq x \leq 1 \\ x+3, & x > 1 \end{cases}$ 在点 $x=\frac{1}{2}, x=1, x=2$ 处的连续性, 并画出它的图像.

3. 求下列函数的间断点.

- (1) $y = \frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$;
- (2) $y = \frac{1-\cos x}{x^2}$;
- (3) $y = \begin{cases} x-1, & x \leq 1 \\ 2-x, & x > 1 \end{cases}$;
- (4) $y = \begin{cases} 3+x^2, & x < 0 \\ \frac{\sin 3x}{x}, & x > 0 \end{cases}$.

4. 求下列极限.

- (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2-2x+5}$;
- (2) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2+1}{x+1}$;
- (3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$;
- (4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{\sin 5x}$;
- (5) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\cos 2x}$;
- (6) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+3 \tan^2 x)^{\cot^2 x}$.

5. 证明: 方程 $x^5-3x-1=0$ 在区间 $(1, 2)$ 内至少有一个实根.

美丽的 Koch 雪花

1904 年,瑞典科学家科赫(Koch)描述了一种奇特而有趣的图形构造过程:将一个边长为 a 的正三角形的每条边三等分,并以中间的三分之一为底,向外作一个小的正三角形.这样,在原三角形的每条边上增添一个等边小三角形,原三角形便转化为一个六角形,共有 12 条边.接着,再在这 12 条边上用相同的方法进行构造,得到一个新的 48 边形.如此反复构造,其边缘越来越精细,图形看起来就像美丽的雪花,这种图形称为 Koch 雪花,如图 1-24 所示.

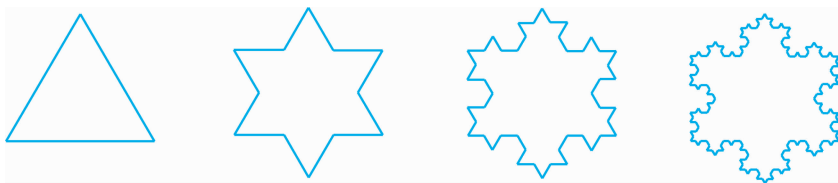


图 1-24

下面探讨最终 Koch 雪花的面积与其边缘 Koch 曲线的周长.

分析 设最初的正三角形边长为 a , 其周长为 $L_1 = 3a$, 面积为 $A_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$. 在第一次构造中, 每条边被三等分, 并在中间一段上添加一个边长为 $a/3$ 的等边三角形. 新添加的每个小三角形的面积为原三角形面积的 $1/9$ 倍, 共添加 3 个小三角形, 所以总面积变为

$$A_2 = A_1 + 3 \cdot \frac{1}{9}A_1 = A_1 \left(1 + \frac{1}{3}\right).$$

新图形的边数为原来的 4 倍, 因此周长变为 $L_2 = \frac{4}{3}L_1$.

第二次构造时, 在原来的 12 条边上, 每条边继续按相同方式添加小三角形. 此时新增的小三角形的边长为 $a/9$, 面积为 $1/9$ 倍的再平方, 即 $1/81$ 倍的初始面积, 且添加数量为 12. 因此面积变为

$$A_3 = A_2 + 12 \cdot \frac{1}{81}A_1 = A_2 + 4 \cdot \frac{1}{27}A_1.$$

以此类推, 第 n 次构造后, 周长为

$$L_n = \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} L_1,$$

面积为

$$A_n = A_1 + 3 \cdot \frac{1}{9}A_1 + 3 \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 A_1 + \cdots + 3 \cdot 4^{n-2} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} A_1.$$

提取 A_1 得

$$A_n = A_1 \left[1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{4}{9}\right) + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} \right].$$

这是一个首项为 $1/3$ 、公比为 $4/9$ 的等比数列的前 $n-1$ 项和. 因此,

$$A_n = A_1 \left[1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}}{1 - \frac{4}{9}} \right] = A_1 \left[1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}}{\frac{5}{9}} \right].$$

极限计算 当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} L_1 = +\infty,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A_1 \left[1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{9} \cdots\right] = A_1 \left(1 + \frac{3}{5}\right) = \frac{8}{5} A_1 = \frac{8}{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{2\sqrt{3}}{5} a^2.$$

结果启示 Koch 雪花的面积大小依赖于最初正三角形的边长 a , 最终的面积为有限值; 而其周长却随着构造次数趋于无穷大. 这表明: 一个有限区域可以生成一条无限长度的边界曲线, 令人惊讶. 这一结果揭示了当“形”被“数”描述时的奇异特性.

数学家简介

中国古代杰出数学家——刘徽

在数学中, 极限的概念和思想具有极其重要的地位. 极限方法是微积分中的基本方法, 是人们从有限认识无限、从近似认识精确、从量变认识质变的一种数学思想方法. 早在 1 000 多年前, 我国古代杰出的数学家刘徽便运用一种名为“割圆术”的方法, 推导出了圆面积的精确公式, 并给出了较为科学的圆周率计算方法. 这种“割圆术”所体现的数学思想, 正是本章所学习的极限思想, 即通过无限逼近的方式研究变量的变化趋势.

刘徽是我国魏晋时期著名的数学家. 他自幼博览群书, 熟读《九章算术》, 并对其中的问题进行了深入研究. 在钻研过程中, 刘徽发现该书存在一些错误, 有些题目解法过于简略, 部分答案仅为近似值, 部分巧妙的方法缺乏理论依据, 严重影响了进一步的学习与研究. 于是, 刘徽下定决心对《九章算术》进行系统的校订和注释. 经过努力, 他最终完成了这一工作, 从理论上完善了中国古代的数学体系, 使《九章算术》成为一部较为规范的数学教科书.

书中提出了一个历代中外数学家共同关心的问题: 如何计算圆的面积? 有一次, 刘徽看到石匠在加工方石, 将其四角凿去变为八角形, 再将每个角削去后变成十六边形. 如此反复凿削, 最终形成一个光滑的圆柱体, 如图 1-25 所示. 刘徽受到启发, 认识到: 圆形可以通过多边形逼近而得, 体现了“以直代曲”的思想. 刘徽的具体做法是: 先作一个圆的内接正六边形, 再将每条边所对的弧继续平分, 构造出正十二边形, 然后构造正二十四边形……随着边数的不断增加, 内接正多边形愈加接近于圆, 其面积和周长也越来越逼近于圆的面积与周长. 这就是著名的“割圆术”. 刘徽在描述这一方法时写道: “割之弥细, 所失弥少, 割之又割, 以至于不可割, 则与圆周合体而无所失矣.” 这句话简明扼要地概括了割圆术的实质, 也即今日极限思想的核心内涵.

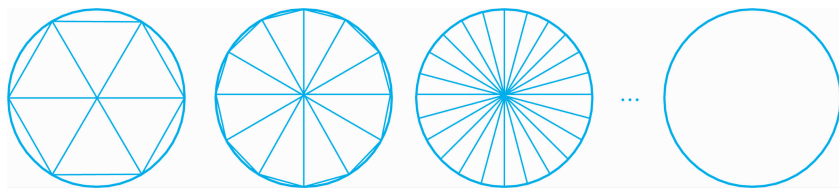


图 1-25

值得一提的是, 刘徽在当时条件极为简陋, 既无阿拉伯数字, 也无计算器等现代工具的情况下, 仅

使用一种称为算筹的工具进行计算. 算筹外形类似于今天的筷子, 使用时分为纵式与横式: 纵式即竖直接放, 一根表示“1”, 两根表示“2”, 以此类推; 进位时, 采取特定组合方式表示更大的数. 刘徽通过这种方法, 将圆的内接正多边形边数推至 3 072 边, 进而得出圆周率的两个近似值: 3. 14 和 3. 141 6. 这一成果在当时世界范围内属于最精确的圆周率估计.

刘徽对自己创造的割圆术充满信心, 并将其推广至有关圆形的各类计算中, 极大地推动了汉代以来中国数学的发展. 南北朝时期, 数学家祖冲之在刘徽的基础上进一步发展割圆术, 将圆周率计算精度提高到小数点后第七位, 证明圆周率介于 3. 141 592 6 与 3. 141 592 7 之间. 而西方直到 1593 年, 法国数学家韦达才取得同样精度的结果, 时间上比祖冲之晚了 1 100 多年.

如今人们常称祖冲之计算的圆周率为“祖率”, 但实际上祖冲之是继承并深化了刘徽的研究, 其方法本质仍是“割圆术”, 真正开创性地将极限思想用于圆周率计算的, 是刘徽.

刘徽在几何测量方面也有重要贡献. 例如, 如何测量海岛的高度与距离? 最直接但笨拙的方法是驾船靠近, 用绳子测量距离, 但这样既耗时又无法测得岛的高度. 刘徽则设计了一种精巧的方法: 在岸边竖立两根等高的竿子 EF 和 GH , 使其与岛顶 AB 共线, 在地面上分别取点 C 和 D , 使点 C 、 E 、 A 与点 D 、 G 、 A 分别共线, 测量 CF 、 DH 、 HF 以及 EF 的长度, 即可求出岛的高度 AB 与岛心到岸边的距离 BF . 刘徽给出的计算公式为

$$BF = \frac{CF \cdot HF}{DH - CF}, \quad AB = \frac{EF(DH + HF - CF)}{DH - CF}.$$

这套方法被刘徽写入《海岛算经》. 此书与《九章算术注》一同被译为多种语言, 传播至世界各地, 展现了中华文明在古代数学上的卓越成就.

刘徽是中华民族骄傲, 是中国传统数学理论体系的奠基者之一. 他注释的《九章算术》对中国古代数学的发展产生了持续 1 000 余年的深远影响, 是东方数学的经典典范之一. 他的贡献不仅深刻影响了中国古代数学的发展, 也在世界数学史上占据了崇高的地位, 与古希腊数学家欧几里得(约公元前 330—公元前 275)所著《几何原本》并列, 被视为中西古代数学思想的双峰对峙.

综合训练 1

一、选择题

1. 函数 $y = e^{\sqrt{x-2}}$ 的定义域为().

- A. $[2, +\infty)$ B. $(-\infty, 2]$ C. $(2, +\infty)$ D. $(-\infty, 2)$

2. 以下函数在其定义域内有界的是().

- A. e^x B. x^2 C. $\ln x$ D. $\cos x$

3. 在对称区间上, $f(x)$ 为奇函数, $g(x)$ 为偶函数, 则以下函数为奇函数的是().

- A. $f(x^4)$ B. $f(x) + g(x)$ C. $g(x)f(x)$ D. $-g(-x)$

4. 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{2x} = ()$.

- A. $\frac{3}{2}$ B. $\frac{2}{3}$ C. 0 D. ∞



5. 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 下列不属于无穷大量的函数是().

- A. $\frac{x^2+1}{\sqrt{2x^3+4}}$ B. $\lg x$ C. 3^x D. $\arctan x$

6. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 2x + \frac{\sin x}{x}, & x > 0 \\ x \cos x, & x \leq 0 \end{cases}$, 则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的()间断点.

- A. 无穷 B. 可去 C. 跳跃 D. 振荡

7. $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} \right) = ()$.

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $-\frac{1}{4}$ D. ∞

8. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $3x^2 - 6x$ 是 x 的().

- A. 高阶无穷小 B. 等价无穷小
C. 同阶非等价无穷小 D. 低阶无穷小

9. 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^{4x} = ()$.

- A. e^4 B. e^{-4} C. e D. 1

10. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2(x-1)}{x-1}, & x < 1 \\ 2, & x = 1 \\ x^2 - 1, & x > 1 \end{cases}$, 则 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 为().

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 不存在

二、填空题

1. 函数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} + \ln(x+1)$ 的连续区间为_____.

2. 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^{x+2021} =$ _____.

3. 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3+2n-4n^2}{3n^2-5n+4} =$ _____.

4. 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{3+x} \right)^x =$ _____.

5. 设函数 $f(x) = \begin{cases} ae^x + 1, & x < 0 \\ x + 2, & x \geq 0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续, 则 $a =$ _____.

三、计算题

1. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{6}{x^2-9} \right)$.

2. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \sin \frac{3}{x} + \frac{\sin 3x}{x} \right)$.

3. 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{3x}$.

4. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{2x-3}-1}$.

5. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{3x^2}$.

6. 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2+x}-2x)$.

四、解答题

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$ 与 x 是否同阶? 是否等价?

2. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} ae^{x-1}, & x > 1 \\ b, & x = 1 \\ x^2 + ax - b, & x < 1 \end{cases}$ 在点 $x=1$ 处连续, 求 a, b 的值.

3. 找出函数 $f(x) = \frac{x+4}{x^2+4x}$ 的间断点, 并指出其类型.