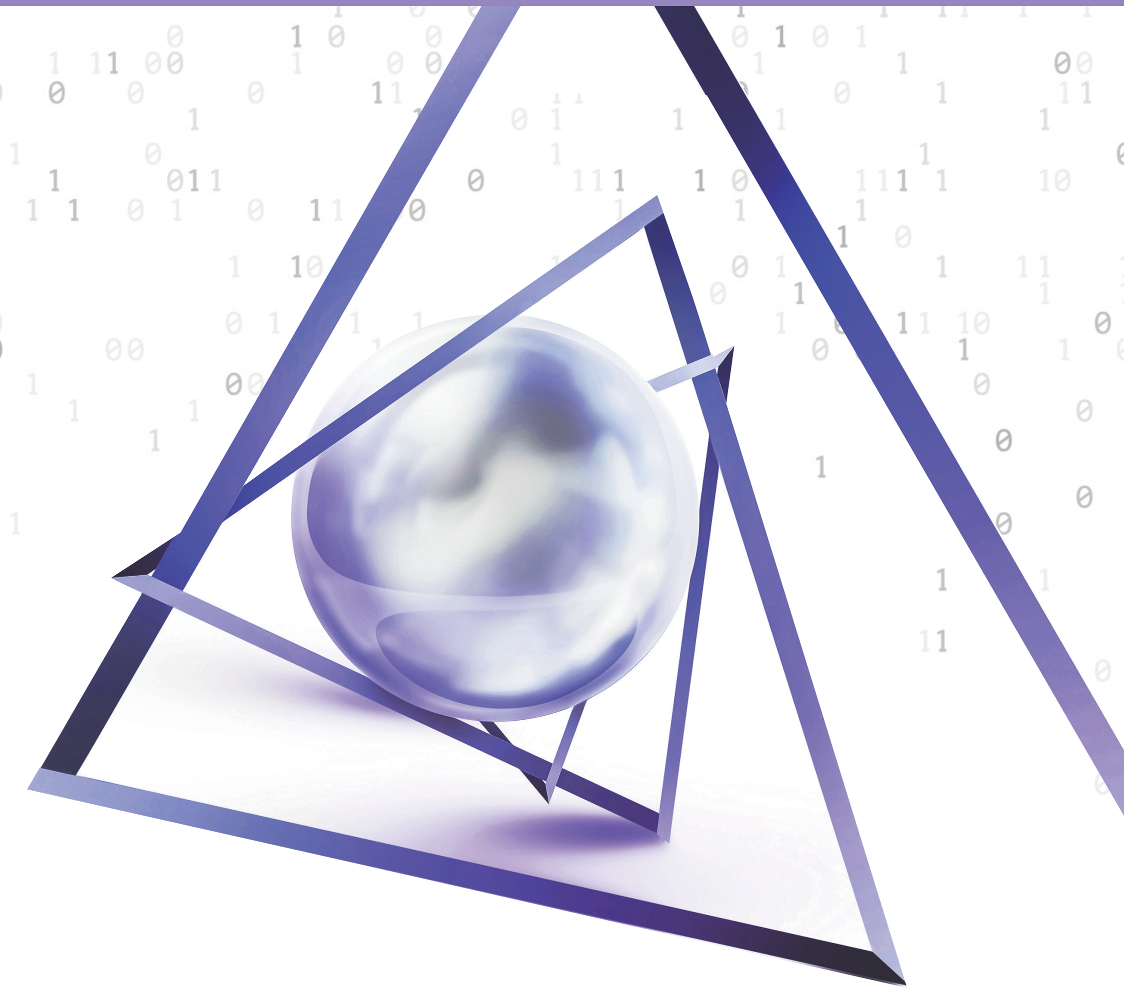
高等职业教育本科数学系列教材

高等数学

（下册）

Advanced Mathematics

主编　王冬琳

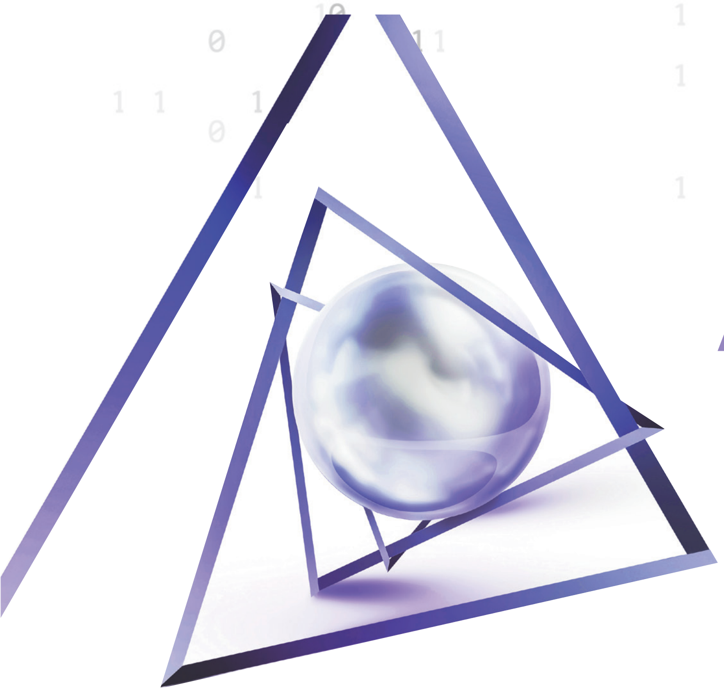


上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

高等职业教育本科数学系列教材
高等数学（下册）
Advanced Mathematics
主编　王冬琳
上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

巍巍交大　百年书香
www.jiaodapress.com.cn
bookinfo@sjtu.edu.cn

策划编辑　金颖杰
责任编辑　胡思佳
封面设计　刘文东



Advanced Mathematics

高等数学

（下册）

扫描二维码
关注上海交通大学出版社
官方微信

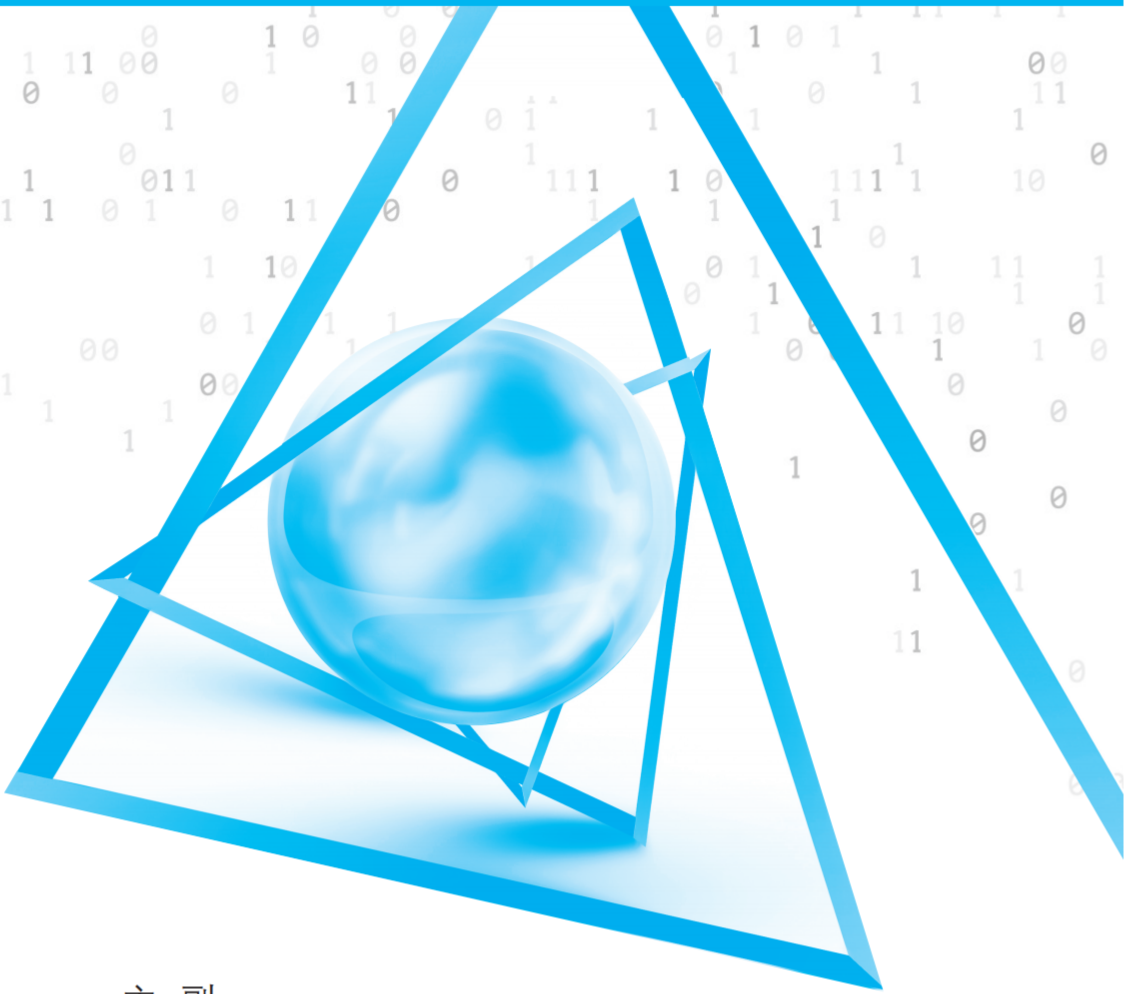
ISBN 978-7-313-33572-2
定价：49.90元

高等职业教育本科数学系列教材

Advanced Mathematics

高等数学

（下册）



主编 王冬琳
副主编 闫琳静 王春晓 孔祥铭

上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

内容提要

本书以职业本科院校专业群建设需求和高等数学课程教学改革实践为背景，融入职业教育“学数学、用数学”的教学理念，并在分析国内外同类教材发展趋势的基础上编写而成. 全书旨在帮助学生系统掌握高等数学的基本概念、基本理论和基本方法，提升逻辑推理能力、空间想象能力以及解决实际问题的能力.

本书分为上、下两册. 本册为下册，共六章，内容包括向量与空间几何，多元函数微分学，多元函数积分学，无穷级数，场论初步，实验数据处理、插值与拟合.

本书既可作为职业本科院校高等数学课程的教材，也可作为相关人员的学习参考资料.

图书在版编目（CIP）数据

高等数学. 下册 / 王冬琳主编. -- 上海：上海交通大学出版社，2026. 1. -- ISBN 978-7-313-33572-2

Ⅰ. O13

中国国家版本馆 CIP 数据核字第 202595WM55 号

高等数学（下册）
GAODENG SHUXUE（XIACE）

主　　编：王冬琳
出版发行：上海交通大学出版社
地　　址：上海市番禺路 951 号
邮政编码：200030
电　　话：021-64071208
印　　制：河北龙大印务有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：850 mm×1 168 mm　1/16
印　　张：17.25
字　　数：484 千字
版　　次：2026 年 1 月第 1 版
印　　次：2026 年 1 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 978-7-313-33572-2
定　　价：49.90 元

前言

中共中央、国务院印发的《教育强国建设规划纲要(2024—2035年)》明确提出“稳步扩大职业本科学校数量和招生规模”。这一部署凸显了职业本科教育在我国教育体系中的重要地位,是顺应新时代发展要求、服务经济社会高质量发展的重要制度安排。作为现代化职业教育体系的重要组成部分,职业本科教育面向产业发展和技术进步的需求,重点培养具备较强实践能力和综合素养的高层次技术技能人才,并通过推动产教深度融合,实现人才培养与产业链关键岗位需求的有效衔接。

为提升职业本科人才培养的针对性和适用性,我们组织编写了“高等职业教育本科数学系列教材”。本系列教材紧密围绕职业本科人才培养目标,坚持以实践应用为导向,在系统阐述数学基本理论的基础上,注重强化数学方法在专业领域中的应用,引导学生在解决实际问题的过程中深化对数学知识的理解,着力提升其应用能力与工程素养。高等数学是一门重要的公共基础课程,是学生学习专业知识、提升职业技能、提高文化素养和培养获取新知识能力的重要基础,同时也是学生今后生活与工作实践中的重要工具.本书以职业本科院校专业群建设需求和高等数学课程教学改革实践为背景,融入职业教育“学数学、用数学”的教学理念,并在分析国内外同类教材发展趋势的基础上编写而成.全书旨在帮助学生系统掌握高等数学的基本概念、基本理论和基本方法,提升逻辑推理能力、空间想象能力以及解决实际问题的能力.

本书分为上、下两册.本册为下册,共六章,内容包括向量与空间几何,多元函数微分学,多元函数积分学,无穷级数,场论初步,实验数据处理、插值与拟合.

本书具有以下特点.

1.落实立德树人根本任务,融入思政元素

《关于推动现代职业教育高质量发展的意见》提出“坚持立德树人、德技并修,推动思想政治教育与技术技能培养融合统一”.本书在各章设置“数学文化”栏目,注重培养学生的数学思想、爱国精神和求实精神.

2.遵循学生认知规律,合理安排知识结构

本书全面涵盖职业本科高等数学课程所需知识点,构建了较为完整的知识体系.各知识点逻辑关系明确,有利于系统培养学生的数学素养和应用能力.行文力求语言简洁明了、表述通俗易懂,使学生在较为轻松的学习氛围中体会数学之美.

3. 落实因材施教的原则，注重应用拓展

本书精选大量具有针对性的例题进行讲解，强调习题与知识点的一一对应，并按难易程度将习题划分为 A 基础题和 B 提高题，便于师生选用，体现因材施教原则. 在每章设置"应用拓展"栏目，将数学知识与实际生活和专业应用相联系，便于学生理解与运用.

4. 体现时代特征，巧用信息技术工具

本书积极引入现代教学手段，结合计算机技术，以 MATLAB 软件为平台设计数学实验，鼓励学生探索新的学习方式；同时配套丰富的数字化资源，如教学资源包等，为师生提供多元化教学支持与服务.

本书由北京科技职业大学王冬琳任主编，闫琳静、王春晓、孔祥铭任副主编.

在编写本书过程中，编者参考了多种教材和著作，并得到有关领导和专家的大力支持与帮助，在此谨致以衷心的感谢.

由于编者水平有限，书中难免存在不足，恳请广大读者批评指正.

编　者

目录

第 4 章 无穷级数

第 5 章 场论初步

第 1 章

向量与空间几何

- 向量与空间几何
  - 空间直角坐标系与向量
    - 空间直角坐标系
    - 向量的概念
    - 向量的线性运算
    - 向量的坐标表示
  - 向量的点积、叉积、混合积
    - 向量的点积
    - 向量的叉积
    - 向量的混合积
  - 平面与直线的方程
    - 平面的方程
    - 直线的方程
    - 点到平面的距离
    - 两平面的夹角及位置关系
    - 两直线的夹角及位置关系
    - 直线与平面的夹角及位置关系
  - 曲面方程与空间曲线及其表示
    - 曲面方程
    - 空间曲线及其表示

学习目标

(1)理解空间直角坐标系,理解向量的概念及其表示法,掌握向量的线性运算,会求单位向量.

(2)会求向量的点积与叉积、向量在坐标轴上的投影、方向余弦.

(3)会求两个非零向量的夹角,掌握两个向量平行、垂直的条件.

(4)会求平面的点法式方程、一般式方程,会判断两平面的位置关系(垂直、平行).

(5)会求点到平面的距离.

(6)会求直线的对称式方程、一般式方程、参数式方程,会判断两直线的位置关系(平行、垂直).

(7)会判断直线与平面的位置关系(垂直、平行、直线在平面上).

(8)了解曲面方程的概念,理解旋转曲面、柱面和二次曲面的特征.

本章导语

我们在中学时曾学习过平面解析几何,它是通过建立一个平面直角坐标系,将平面上的点与一个有序数组对应起来,从而将平面上的曲线或图形与代数方程对应起来,这样就可以用代数方法来研究几何问题.而空间解析几何是平面解析几何从二维平面向三维空间的进一步拓展.本章中首先介绍向量的概念及线性运算,并由此建立空间坐标系,然后利用坐标讨论向量的运算,并介绍空间解析几何的相关内容.

数学文化

《九章算术》与中国数学文化传承

《九章算术》是“算经十书”中最重要的著作之一.魏晋时期,刘徽为《九章算术》作注时说:“周公制礼而有九数,九数之流则九章是矣.”又说:“汉北平侯张苍、大司农中丞耿寿昌皆以善算命世.苍等因旧文之遗残,各称删补.故校其目则与古或异,而所论者多近语也.”据研究,西汉张苍、耿寿昌曾对其有增补,成书最迟不晚于东汉前期,其基本内容于西汉后期已大致定型.

《九章算术》确立了中国古代数学的框架,形成了以计算为核心、密切联系实际、以解决生产生活中的数学问题为目的的特点.其影响深远,以致后世中国数学著作大体呈现两种形态:或为其作注,或仿其体例撰写.甚至在西算传入中国之后,相关著述仍常将有关数学知识纳入《九章算术》的框架之中.

据新华社 2020 年 12 月 4 日报道《最快!我国量子计算机实现算力全球领先》及同日中国科学院量子信息与量子科技创新研究院网站文章《中国科学家实现“量子计算优越性”里程碑》,中国科学技术大学潘建伟等人成功构建了 76 个光子的量子计算原型机“九章”,其名取自《九章算术》.

我国学者任继愈在有关总序中指出:“中国古代的科学思想和科技成就,是中华优秀传统文化的重要组成部分,曾在世界文明史上放射过光辉,对后世影响深远,值得深入挖掘与整理.”

1.1 空间直角坐标系与向量

1.1.1 空间直角坐标系

过空间一个定点 O,作三条互相垂直的数轴,它们都以 O 为原点且具有相同的长度单位,这三条轴分别叫作 x 轴(横轴)、y 轴(纵轴)、z 轴(竖轴),三条数轴统称为坐标轴.它们的正方向符合右手定则,即以右手握住 z 轴,并拢的四个手指从 x 轴的正方向旋转 $90°$指向 y 轴的正方向,竖起的大拇指指向就是 z 轴的正方向,如图 1-1 所示.这样的三条坐标轴就组成了空间直角坐标系,点 O 叫作坐标原点(简称原点).

在空间直角坐标系中,任意两条坐标轴所确定的平面称为坐标面.三个坐标轴确定了三个坐标面,分别叫作 xOy 坐标面、yOz 坐标面、zOx 坐标面.三个坐标面将整个空间分成八个部分,每一部分称为一个卦限,八个卦限分别用Ⅰ,Ⅱ,…,Ⅷ表示(见图 1-2).

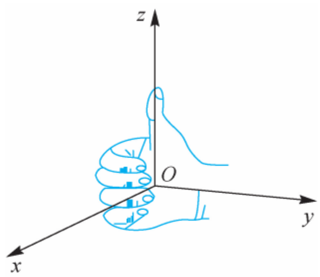


图 1-1

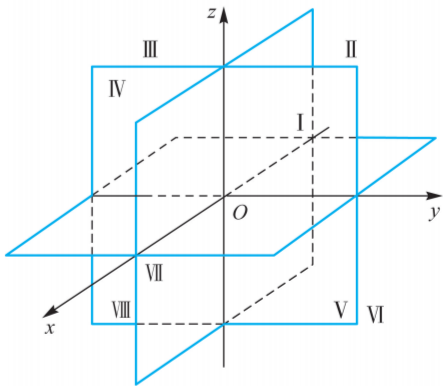


图 1-2

有了空间直角坐标系,就可以建立空间中的点和有序数组之间的对应关系.

设 M 为空间中一已知点,过点 M 作三个平面分别垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴,交点分别为 P,Q,R(见图 1-3).设这三个点在 x 轴、y 轴和 z 轴上的坐标依次为 x,y,z,则点 M 唯一确定了一个三元有序数组 (x,y,z).反过来,给定了一个三元有序数组 (x,y,z),则可分别在 x 轴、y 轴和 z 轴上分别取坐标依次为 x,y,z 的三个点 P,Q,R,然后过这三个点分别作一个与 x 轴、y 轴和 z 轴垂直的平面,这三个平面有唯一的交点,设为 M,则一个三元有序数组 (x,y,z) 就唯一地确定了空间一点 M.这样,利用空间直角坐标系,就在三元有序数组 (x,y,z) 与空间中任意一点 M 之间建立了一一对应关系.称这个三元有序数组 (x,y,z) 为点 M 的直角坐标,并依次称 x,y,z 为点 M 的横坐标、纵坐标、竖坐标,坐标为 (x,y,z) 的点 M,记为 $M(x,y,z)$.

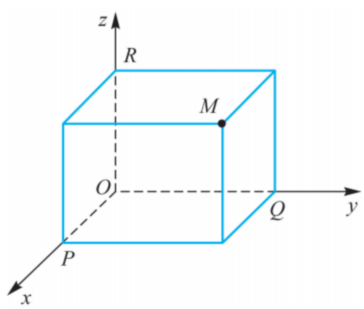


图 1-3

显然，坐标原点 O 的坐标为(0,0,0)；x 轴、y 轴和 z 轴上任意一点的坐标分别为 $(x,0,0)$,$(0,y,0)$,$(0,0,z)$；xOy 坐标面、yOz 坐标面、zOx 坐标面上任意一点的坐标分别为 $(x,y,0)$,$(0,y,z)$,$(x,0,z)$.

例 1 求点 (a,b,c) 关于各坐标面、各坐标轴、坐标原点的对称点的坐标.

解 (1)点 (a,b,c) 关于 xOy 坐标面的对称点是 $(a,b,-c)$，关于 yOz 坐标面的对称点是 $(-a,b,c)$，关于 zOx 坐标面的对称点是 $(a,-b,c)$.

(2)点 (a,b,c) 关于 x 轴的对称点是 $(a,-b,-c)$，关于 y 轴的对称点是 $(-a,b,-c)$，关于 z 轴的对称点是 $(-a,-b,c)$.

(3)点 (a,b,c) 关于坐标原点的对称点是 $(-a,-b,-c)$.

如图 1-4 所示，对空间中两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$，可用其坐标表示它们之间的距离 d. 过点 M_1,M_2 各作三个平面分别垂直于三条坐标轴，这六个平面围成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体. 线段 M_1P,M_1Q,M_1R 是它的三条棱，它的对角线 M_1M_2 的长度设为 d，则

$$d^2=|M_1M_2|^2=|M_1P|^2+|M_1Q|^2+|M_1R|^2.$$

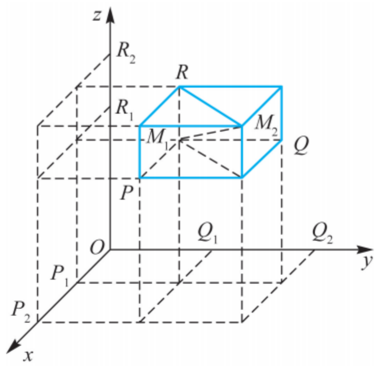


图 1-4

因为

$$|M_1P|=|P_1P_2|=|x_2-x_1|,$$
$$|M_1Q|=|Q_1Q_2|=|y_2-y_1|,$$
$$|M_1R|=|R_1R_2|=|z_2-z_1|,$$

所以

$$d^2=|M_1M_2|^2=|x_2-x_1|^2+|y_2-y_1|^2+|z_2-z_1|^2,$$

即

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \qquad ①$$

式①称为**两点间距离公式**.

特别地，空间任一点 $M(x,y,z)$ 与坐标原点 $O(0,0,0)$ 的距离为

$$d=|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}. \qquad ②$$

例 2 已知一动点 $M(x,y,z)$ 到两个点 $A(1,2,3)$ 和 $B(-1,-3,0)$ 的距离相等，求点 M 的坐标满足的方程.

解 由已知条件得 $|MA|=|MB|$，根据式①，有

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2}=\sqrt{(x+1)^2+(y+3)^2+z^2},$$

整理得

$$2x+5y+3z-2=0.$$

1.1.2　向量的概念

在物理学中，我们已经遇到过既有大小又有方向的量，如力、力矩、速度等。这一类量称为向量。

在数学上，常用一条有方向的线段（有向线段）来表示向量。有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向。例如，以 M_1 为起点、M_2 为终点的向量记作 $\overrightarrow{M_1M_2}$（见图 1-5）。有时也用一个黑体字母（或书写时在字母上面加箭头）来表示向量，如 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{F}$（或 $\vec{a}, \vec{v}, \vec{F}$）。以坐标原点 O 为起点，向一个点 M 引向量 $\overrightarrow{OM}$，这个向量叫作点 M 对于 O 的**向径**，常用粗体字母 $\boldsymbol{r}$ 表示。

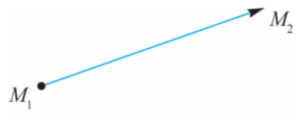


图 1-5

向量的大小称为向量的**模**。向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$，$\boldsymbol{a}$ 的模依次记为 $|\overrightarrow{M_1M_2}|$，$|\boldsymbol{a}|$。模等于 1 的向量称为**单位向量**。模为零的向量称为**零向量**，记作 $\boldsymbol{0}$（或 $\vec{0}$）。零向量的起点与终点重合，其方向可视为任意方向。

在许多涉及向量的实际问题中，可以不考虑向量的起点位置，只考虑其大小和方向，称这样的向量为**自由向量**。下面讨论的向量一般都指自由向量。

如果两个向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 的模相等、方向相同，那么称向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 是相等的，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$。也就是说，经过平移后能完全重合的向量是相等的。

如果两个非零向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 的方向相反或者相同，那么称两个向量平行，记作 $\boldsymbol{a} /\!/ \boldsymbol{b}$。由于零向量的方向是任意的，因此可以认为零向量与任何向量都平行。

1.1.3　向量的线性运算

1. 向量的加减法

在力学中，求作用于同一质点的两个不同方向的力的合力 $\boldsymbol{F}$ 时，采用平行四边形或三角形法则（见图 1-6）。

由此，我们给出向量加法的法则。

法则 1（平行四边形法则）　设有两个非零向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$，任取一点 A，作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，以 AB, AD 为邻边作平行四边形，其对角线向量 $\overrightarrow{AC}$（见图 1-7）称为向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 的和，记为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$。

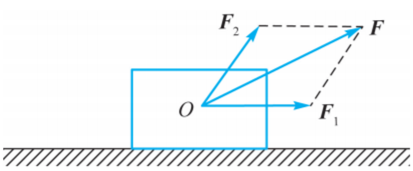


图 1-6

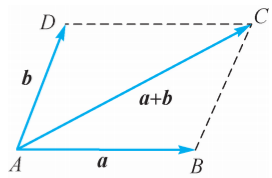


图 1-7

从图 1-7 可得三角形法则。

法则 2（三角形法则）　以向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点作为向量 $\boldsymbol{b}$ 的起点，则由 $\boldsymbol{a}$ 的起点到 $\boldsymbol{b}$ 的终点的向量是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和向量。

从图 1-7 和 1-8 可以看出，向量的加法满足以下运算律：

（1）交换律：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

（2）结合律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$。

由向量加法的三角形法则及交换律、结合律得 n 个向量相加的法则如下：以前一个向量的终点作

为下一个向量的起点，相继作向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$，再以第一个向量的起点为起点，最后一个向量的终点为终点作一向量，这个向量即为所求的和. 如图 1-9 所示，有

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4+\boldsymbol{a}_5.$$

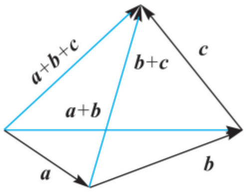


图 1-8

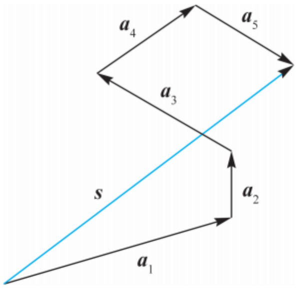


图 1-9

设 $\boldsymbol{a}$ 为一向量，与 $\boldsymbol{a}$ 的模相等而方向相反的向量叫作 $\boldsymbol{a}$ 的**负向量**，记作 $-\boldsymbol{a}$（见图 1-10）. 由此，我们规定两个向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差

$$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a}).$$

即把向量 $-\boldsymbol{a}$ 加到向量 $\boldsymbol{b}$ 上，便得 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$，如图 1-11 所示.

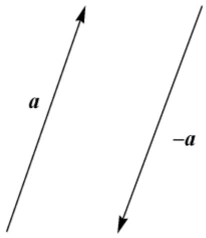


图 1-10

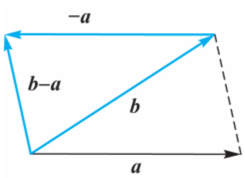


图 1-11

特别地，当 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$ 时，有

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}.$$

2. 向量与数的乘法

向量 $\boldsymbol{a}$ 与实数 λ 的乘积记作 $\lambda\boldsymbol{a}$，规定它为一个向量，它的模

$$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|.$$

它的方向当 $\lambda>0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相同，当 $\lambda<0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相反（见图 1-12）. 当 $\lambda=0$ 时，$|\lambda\boldsymbol{a}|=0$，即 $\lambda\boldsymbol{a}$ 为零向量，这时它的方向可以是任意的.

设 λ,μ 为实数，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为向量，则向量与数的乘法满足以下运算律：

（1）结合律：$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$；

（2）分配律：$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$，$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

根据向量与数的乘法的定义，有：

（1）向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行的充要条件是 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$ 或 $\boldsymbol{b}=\mu\boldsymbol{a}$；

（2）与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量记作 $\boldsymbol{e}_a$，则 $|\boldsymbol{e}_a|=1$，$\boldsymbol{e}_a=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$，从而

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a.$$

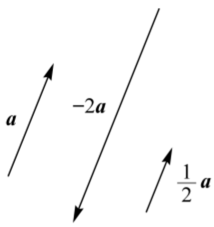


图 1-12

例 3 在△ABC 中，D,E 是 BC 边上的三等分点（见图 1-13），设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，试用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 来表示 $\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}$.

解 由三角形法则，有 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$. 再由向量与数的乘法的定义，有

$$\overrightarrow{BD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}),\quad \overrightarrow{EC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}).$$

从△ABD 及△ACE 中可得

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=\frac{1}{3}(\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{a}),$$

$$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{EC}=\boldsymbol{b}-\frac{1}{3}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=\frac{1}{3}(2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}).$$

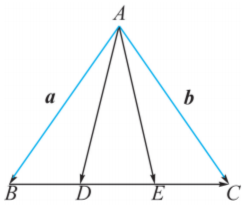


图 1-13

1.1.4　向量的坐标表示

前面已经用几何的方法表示向量和对向量进行运算，这种方法虽然直观，但难以进行精确计算. 更深入地研究向量以及用向量解决实际问题，还须借助代数的方法. 为此，引入向量的坐标概念，并用向量的坐标进行向量的计算.

在空间直角坐标系中，以原点为起点，终点为(1，0，0)，(0，1，0)，(0，0，1)的三个单位向量称为这个坐标系的**基本单位向量**，分别记作 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$.

设向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点为坐标原点 O，终点为 $M(a_x, a_y, a_z)$，即 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}$，如图 1-14 所示.

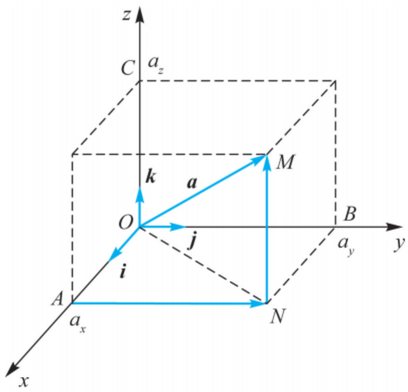


图 1-14

点 M 在 x 轴、y 轴、z 轴上的投影依次为 $A(a_x,0,0)$，$B(0,a_y,0)$，$C(0,0,a_z)$. 根据向量的加法，有

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}.$$

由向量与数的乘法可知

$$\overrightarrow{OA}=a_x\boldsymbol{i},\quad \overrightarrow{OB}=a_y\boldsymbol{j},\quad \overrightarrow{OC}=a_z\boldsymbol{k}.$$

于是

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}, \qquad ③$$

或

$$\boldsymbol{a}=(a_x, a_y, a_z). \qquad ④$$

式③称为向量 $\boldsymbol{a}$ 按基本单位向量的分解式，其中 a_x，a_y，a_z 是向量 $\boldsymbol{a}$ 分别在 x 轴、y 轴、z 轴上的投影，式④称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标表示式.

对一般的向量在坐标轴上的投影,向量平移后保持不变,因此向量按基本单位向量的分解式可以推广到起点不在坐标原点的情形.

对空间中任一向量$\overrightarrow{M_1M_2}$,起点M_1与终点M_2的坐标分别为(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)(见图 1-15),则有

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}, \tag{5}$$

或

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1). \tag{6}$$

由式①和式⑥,可以得到向量模的计算公式

$$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

特别地,起点在原点时

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}.$$

利用向量的坐标表示,可以定义向量的加法、减法以及数乘运算如下.

设$\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$,$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$,$\lambda$为常数,则

$$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z),\quad \lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z).$$

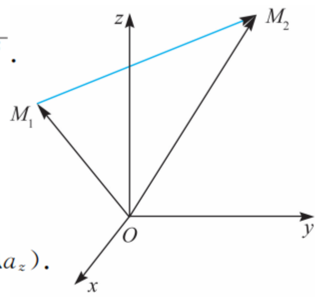


图 1-15

例 4 设$\boldsymbol{a}=(4,3,0)$,$\boldsymbol{b}=(1,-2,2)$,求$\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$及$|\boldsymbol{a}|$.

解 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=(4,3,0)+2(1,-2,2)=(4,3,0)+(2,-4,4)=(6,-1,4)$.

$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{4^2+3^2+0^2}=5$.

例 5 已知两点$A(x_1,y_1,z_1)$和$B(x_2,y_2,z_2)$以及实数$\lambda\neq-1$,在直线AB上求一点M,使$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}$.

解 如图 1-16 所示,由于

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA},\quad \overrightarrow{MB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM},$$

因此$\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}=\lambda(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM})$,从而

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{1+\lambda}(\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}).$$

以$\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{OB}$的坐标(点A,B的坐标)代入,得

$$\overrightarrow{OM}=\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\right), \tag{7}$$

这就是点M的坐标.

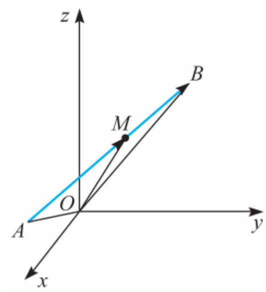


图 1-16

点M称为有向线段$\overrightarrow{AB}$的**定比分点**.特别地,当$\lambda=1$时,点M称为有向线段$\overrightarrow{AB}$的**中点**,其坐标为

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right).$$

例 6 已知三角形ABC的三个顶点分别为$A(x_1,y_1,z_1)$,$B(x_2,y_2,z_2)$,$C(x_3,y_3,z_3)$,求重心的坐标.

解 如图 1-17 所示,设F,E,D分别为边AB,AC,BC的中点,则AD,BE,CF的交点O为三角形ABC的重心.

因为F是AB的中点,所以点F的坐标为

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right).$$

又由式⑦可得三角形重心(点O)的坐标为

$$\left(\frac{x_3+2\cdot\frac{x_1+x_2}{2}}{1+2},\frac{y_3+2\cdot\frac{y_1+y_2}{2}}{1+2},\frac{z_3+2\cdot\frac{z_1+z_2}{2}}{1+2}\right),$$

即$\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3},\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3},\dfrac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$.

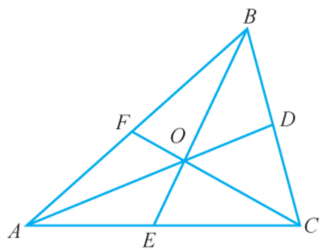


图 1-17

习题 1.1

1. 指出下列各点所在的坐标轴、坐标面和卦限.
$A(2,-3,-5)$,$B(0,4,3)$,$C(0,-3,0)$,$D(2,3,-5)$.
2. 在 yOz 坐标面上,求与 $A(3,1,2)$,$B(4,-2,-2)$,$C(0,5,1)$三点等距离的点.
3. 已知两点 $M_1(0,1,2)$和 $M_2(1,-1,0)$,试用坐标表示向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 及 $-3\overrightarrow{M_1M_2}$.
4. 求下列向量的模.
(1)$\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$;　　(2)$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$.
5. 化简 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+5\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{a}}{5}\right)$.
6. 已知 $\boldsymbol{a}=(2,-3,5)$,$\boldsymbol{b}=(-3,1,-4)$,求 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$,$|\boldsymbol{a}|$,$8\boldsymbol{a}$.
7. 求解以向量为未知元的线性方程组$\begin{cases}5\boldsymbol{x}+3\boldsymbol{y}=\boldsymbol{a},\\3\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b},\end{cases}$其中 $\boldsymbol{a}=(2,1,2)$,$\boldsymbol{b}=(-1,1,-2)$.
8. 在平行四边形 $ABCD$ 中,设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$,试用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{MA}$,$\overrightarrow{MB}$,$\overrightarrow{MC}$,$\overrightarrow{MD}$,其中 M 是平行四边形对角线的交点.
9. 求点 $A(2,-3,-1)$关于 xOy 坐标面、zOx 坐标面及原点 O 的对称点.
10. 求点 $M(4,-3,5)$与原点及各坐标轴、坐标面间的距离.
11. 设点 P 在 x 轴上,它到点 $P_1(0,\sqrt{2},3)$的距离为到点 $P_2(0,1,-1)$的距离的 2 倍,求点 P 的坐标.
12. 在 z 轴上求一点 M,使该点到点 $A(1,0,2)$和到点 $B(1,-3,1)$的距离相等.
13. 一边长为 a 的正方体被放置在 xOy 坐标面上,其底面的中心在坐标原点,底面的顶点在 x 轴和 y 轴上,求它各顶点的坐标.
14. 试证明以 $A(4,1,9)$,$B(10,-1,6)$,$C(2,4,3)$三点为顶点的三角形是等腰直角三角形.

1.2 向量的点积、叉积、混合积

1.2.1 向量的点积

向量与向量的运算一定是向量吗? 回顾高中物理中有关恒力做功的问题. 设一质点在恒力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下,沿直线从点 M_1 移动到点 M_2,产生的位移$\overrightarrow{M_1M_2}$用 $\boldsymbol{s}$ 表示. 力 $\boldsymbol{F}$ 可分解为沿位移方向的分量 $\boldsymbol{F}_1$ 和垂直于位移方向的分量 $\boldsymbol{F}_2$(见图 1-18),其中仅 $\boldsymbol{F}_1$ 对质点做功. 若记 θ 为 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{s}$ 的夹角,则$|\boldsymbol{F}_1|=|\boldsymbol{F}|\cos\theta$,于是力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功为

$$W=|\boldsymbol{F}_1||\boldsymbol{s}|=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos\theta.$$

显然,这里 W 是一个数量,但它由两个向量 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{s}$ 的运算得到. 类似的情形在其他问题中也常出现. 将这种运算形式抽象出来,便得到两个向量的点积.

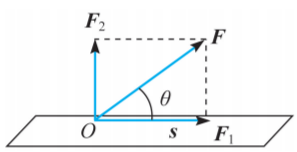


图 1-18

1. 点积的定义

对于两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$,它们的模$|\boldsymbol{a}|$,$|\boldsymbol{b}|$及它们夹角 θ 的余弦的乘积称为向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的**点积**(也称**数量积**或**内积**),记为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$,即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta.$$

由点积的定义容易得出如下运算性质:

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2.$$

对于任意两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，则 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$；反之，若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$. 因此

$$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0.$$

注意

当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 中含有零向量时，由于零向量的方向可视为任意方向，故可以认为零向量与任何向量都垂直，因此上述结论仍然成立.

例 1 已知基本单位向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 是三个相互垂直的单位向量，求证

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1,$$
$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0.$$

证明 因为

$$|\boldsymbol{i}|=|\boldsymbol{j}|=|\boldsymbol{k}|=1,$$

所以

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=|\boldsymbol{i}|\,|\boldsymbol{i}|\cos\theta=1\quad(\theta=0).$$

同理可知，$\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1$.

又因为 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 之间的夹角皆为 $\frac{\pi}{2}$，故有

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=|\boldsymbol{i}|\,|\boldsymbol{j}|\cos\frac{\pi}{2}=1\times1\times0=0.$$

同理可知，$\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0$.

2. 向量在 u 轴上的投影

向量在轴上的投影是一个数，它反映该轴与向量之间的相对位置关系，与向量的大小和方向密切相关. 设点 O 及单位向量 $\boldsymbol{e}$ 确定 u 轴(见图 1-19). 对任意向量 $\boldsymbol{a}$，作 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{a}$. 过点 M 作垂直于 u 轴的平面，该平面与 u 轴交于点 M'. 向量 $\overrightarrow{OM'}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 在 u 轴上的摄影向量. 设 $\overrightarrow{OM'}=\lambda\boldsymbol{e}$，则数 λ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 在 u 轴上的投影，记为 $\mathrm{Pr}_u\boldsymbol{a}$ 或 $(\boldsymbol{a})_u$. 其中点 M' 称为点 M 在 u 轴上的投影.

按此定义，向量 $\boldsymbol{a}$ 在直角坐标系 $Oxyz$ 中的坐标 a_x,a_y,a_z 分别是 $\boldsymbol{a}$ 在三条坐标轴上的投影，即

$$a_x=\mathrm{Pr}_x\boldsymbol{a},\quad a_y=\mathrm{Pr}_y\boldsymbol{a},\quad a_z=\mathrm{Pr}_z\boldsymbol{a}.$$

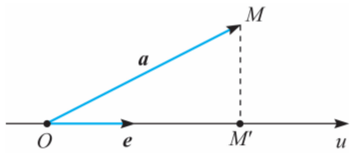


图 1-19

由此可知，向量的投影具有与坐标相同的性质：

$$\mathrm{Pr}_u\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos\varphi,$$

其中 φ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 u 轴的夹角.

$$\mathrm{Pr}_u(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\mathrm{Pr}_u\boldsymbol{a}+\mathrm{Pr}_u\boldsymbol{b},$$
$$\mathrm{Pr}_u(\lambda\boldsymbol{a})=\lambda\mathrm{Pr}_u\boldsymbol{a}.$$

例 2 设正四面体的两条棱分别为 $\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{AB}$，且 $|\overrightarrow{OA}|=a$，求 $\overrightarrow{OA}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 方向上的投影 $\mathrm{Pr}_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{OA}$.

解 如图 1-20 所示，记 $\angle OAB=\varphi$，则 $\cos\varphi=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$. 因此

$$\mathrm{Pr}_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{OA}=|\overrightarrow{OA}|\cos\varphi=\frac{a}{2}.$$

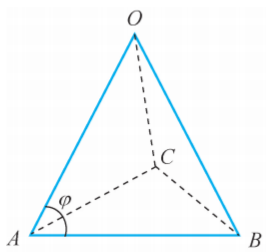


图 1-20

由此可见，两个非零向量的点积等于其中一个向量的模与另一个向量在该向量方向上的投影的乘积.

事实上，当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 时，$|\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 即为向量 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 方向上的投影. 因此可得

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\mathrm{Pr}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}.$$

同理，当 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ 时，

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\mathrm{Pr}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}.$$

3. 点积的运算律

交换律：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$. ①

分配律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$. ②

证明 由点积的定义，设 θ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$. 故有

$$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{a}|\cos\theta=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}.$$

当 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$ 时，式②显然成立；当 $\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{0}$ 时，如图 1-21 所示.

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{c}|\mathrm{Pr}_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{c}|(\mathrm{Pr}_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{a}+\mathrm{Pr}_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{c}|\mathrm{Pr}_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{a}+|\boldsymbol{c}|\mathrm{Pr}_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}.$$

设 λ,μ 为实数，则

$$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}),$$
$$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot(\mu\boldsymbol{b})=\lambda\mu(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}).$$

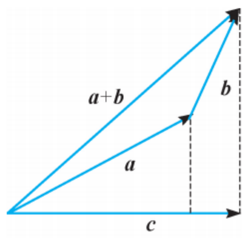


图 1-21

例 3 设 $|\boldsymbol{a}|=5$，$|\boldsymbol{b}|=2$，$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\pi}{3}$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 及向量 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 的模.

解 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=5\times2\times\cos\frac{\pi}{3}=5$，

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{u}|^2&=\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}=(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}\\&=|\boldsymbol{a}|^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4|\boldsymbol{b}|^2=5^2-4\times5+4\times2^2=21.\end{aligned}$$

所以 $|\boldsymbol{u}|=\sqrt{21}$.

例 4 设 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{7}$，$|\boldsymbol{b}|=2$，若 $(\boldsymbol{a}+\sqrt{m}\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}-\sqrt{m}\boldsymbol{b})$，试求 m 的值.

解 因为 $(\boldsymbol{a}+\sqrt{m}\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}-\sqrt{m}\boldsymbol{b})$，所以

$$(\boldsymbol{a}+\sqrt{m}\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\sqrt{m}\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2-m|\boldsymbol{b}|^2=7-4m=0.$$

因此 $m=\frac{7}{4}$.

例 5 如图 1-22(a)所示，设液体流过平面 S 上的一块区域，其面积为 A. 液体做匀速流动，速度为常向量 $\boldsymbol{v}$. 设 $\boldsymbol{n}$ 为垂直于 S 的单位法向量，液体的密度为常数 ρ. 试求单位时间内通过该区域沿 $\boldsymbol{n}$ 方向的液体质量.

解 如图 1-22(b)所示，单位时间内流过该区域的液体形成一个斜柱体，其底面积为 A，侧棱长度为 $|\boldsymbol{v}|$. 设 θ 为 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 的夹角，则斜柱体的高为 $|\boldsymbol{v}|\cos\theta$. 因此体积为 $V=A|\boldsymbol{v}|\cos\theta$. 由于 $|\boldsymbol{n}|=1$，有 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}=|\boldsymbol{v}|\cos\theta$，故 $V=A(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})$. 于是单位时间内通过该区域沿 $\boldsymbol{n}$ 方向的液体质量为

$$M=\rho A(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}).$$

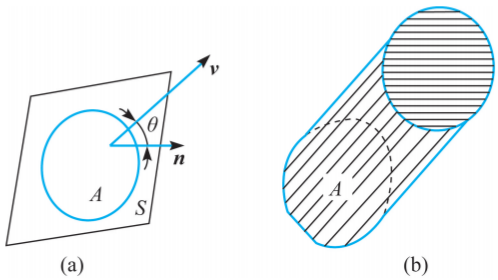


图 1-22

4. 点积的坐标表示

由于向量可以用坐标表示，因此向量的点积也可以用坐标表示.

设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$，则

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z. \tag{③}$$

事实上，式③可由点积的运算律推得：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=a_xb_x(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i})+a_yb_y(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j})+a_zb_z(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k})+a_xb_y(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j})+a_yb_x(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i})+a_xb_z(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k})+\\&\quad a_zb_x(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i})+a_yb_z(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k})+a_zb_y(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j})\\&=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.\end{aligned}$$

由向量点积的坐标表示式可得：

若 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为非零向量，则

$$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0.$$

对于两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，其夹角 θ 满足

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}. \tag{④}$$

这就是两个向量夹角余弦的坐标表示式.

又由于 $\cos\theta=\frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|}\cdot\frac{b_x}{|\boldsymbol{b}|}+\frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|}\cdot\frac{b_y}{|\boldsymbol{b}|}+\frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|}\cdot\frac{b_z}{|\boldsymbol{b}|}$，因此可得

$$\cos\theta=\cos\alpha\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta'+\cos\gamma\cos\gamma'. \tag{⑤}$$

其中 α,β,γ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角，α',β',γ' 为向量 $\boldsymbol{b}$ 的方向角.

例 6 设 $\boldsymbol{a}=(1,1,-4)$，$\boldsymbol{b}=(1,-2,2)$，求：

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$；(2) $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 θ；(3) $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影；(4) $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影.

解 (1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1\times1+1\times(-2)+(-4)\times2=-9$.

(2)因为

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{1^2+1^2+(-4)^2}=3\sqrt{2},\quad |\boldsymbol{b}|=\sqrt{1+(-2)^2+2^2}=3,$$

所以

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{-9}{3\sqrt{2}\times3}=-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

故 $\theta=\frac{3\pi}{4}$.

(3)由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\mathrm{Pr}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$ 可得 $\mathrm{Pr}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{-9}{3}=-3$.

(4)由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\mathrm{Pr}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$ 可得 $\mathrm{Pr}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{-9}{3\sqrt{2}}=-\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

例 7 一质点在力 $\boldsymbol{F}=4\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$ 的作用下，从点 $A(2,1,0)$ 移动到点 $B(5,-2,6)$，求 $\boldsymbol{F}$ 所做的功及 $\boldsymbol{F}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 的夹角.

解 位移向量为 $\boldsymbol{s}=\overrightarrow{AB}=3\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}$. 力所做的功为

$$W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}=(4\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k})\cdot(3\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k})=18.$$

设 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{s}$ 的夹角为 θ，则

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}}{|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|}=\frac{18}{\sqrt{4^2+2^2+2^2}\sqrt{3^2+(-3)^2+6^2}}=\frac{1}{2}.$$

故 $\boldsymbol{F}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$.

5. 方向角与方向余弦

为表达向量的方向，首先引入向量间的夹角.

将两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的起点平移至同一点，则两向量之间的不超过 π 的夹角称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角，记为 $\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\in[0,\pi]$.

由此可以进一步定义向量与坐标轴之间的夹角. 将非零向量的起点平移至坐标原点，它与各坐标轴正向所成的夹角称为该向量的方向角.

设非零向量 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{M_1M_2}$，$|\boldsymbol{r}|\neq 0$，它与三条坐标轴正向所成的夹角分别为 α,β,γ，称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的方向角(见图 1-23).

若 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$，则有

$$x=|\boldsymbol{r}|\cos\alpha,\quad y=|\boldsymbol{r}|\cos\beta,\quad z=|\boldsymbol{r}|\cos\gamma.$$

其中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的**方向余弦**.

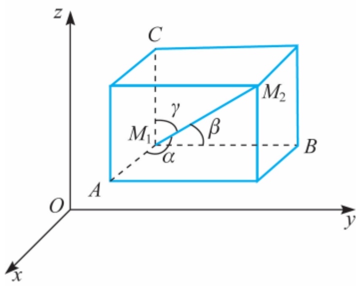


图 1-23

由于 $|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\neq 0$，可得

$$\cos\alpha=\frac{x}{|\boldsymbol{r}|}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{y}{|\boldsymbol{r}|}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{z}{|\boldsymbol{r}|}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

因此，

$$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\frac{1}{|\boldsymbol{r}|}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{e}_r,$$

其中 $\boldsymbol{e}_r$ 为与 $\boldsymbol{r}$ 同向的单位向量.

由此可得

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

这说明三个方向余弦之间存在约束关系，因此已知其中两个方向角，第三个方向角即可确定(但可能存在符号差异).

例 8 已知两点 $A(2,2,\sqrt{2})$ 和 $B(1,3,0)$，计算向量 $\overrightarrow{AB}$ 的模、方向余弦和方向角，以及与 $\overrightarrow{AB}$ 同向的单位向量.

解 因为

$$\overrightarrow{AB}=(1-2,3-2,0-\sqrt{2})=(-1,1,-\sqrt{2}),$$

所以 $\overrightarrow{AB}$ 的模为

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-1)^2+1^2+(-\sqrt{2})^2}=2,$$

$\overrightarrow{AB}$ 的方向余弦为

$$\cos\alpha=-\frac{1}{2},\quad \cos\beta=\frac{1}{2},\quad \cos\gamma=-\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$\overrightarrow{AB}$ 的方向角为

$$\alpha=\frac{2\pi}{3},\quad \beta=\frac{\pi}{3},\quad \gamma=\frac{3\pi}{4}.$$

设 $\boldsymbol{e}$ 为与 $\overrightarrow{AB}$ 同向的单位向量，由于 $\boldsymbol{e}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$，故 $\boldsymbol{e}=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

例 9 设有向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$，已知 $|\overrightarrow{P_1P_2}|=2$，它与 x 轴和 y 轴的夹角分别为 $\frac{\pi}{4}$ 和 $\frac{\pi}{3}$. 如果点 P_1 的坐标为 $(1,0,3)$，求点 P_2 的坐标.

解 设向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的方向角为 α,β,γ. 由于 $\alpha=\frac{\pi}{3}$，$\beta=\frac{\pi}{4}$，故 $\cos\alpha=\frac{1}{2}$，$\cos\beta=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 又因为 $\cos^2\alpha+$

$\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$，所以 $\cos\gamma=\pm\frac{1}{2}$. 于是

$$\overrightarrow{P_1P_2}=|\overrightarrow{P_1P_2}|(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=2\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\pm\frac{1}{2}\right)=(1,\sqrt{2},\pm1).$$

设点 P_2 的坐标为 (x,y,z)，由于 $\overrightarrow{P_1P_2}=(x-1,y,z-3)$，故

$$(x-1,y,z-3)=(1,\sqrt{2},\pm1),$$

即 $(x,y,z)=(2,\sqrt{2},2)$ 或 $(2,\sqrt{2},4)$.

1.2.2　向量的叉积

在学习叉积之前，不妨先回顾一下力学中学过的力矩. 设有杠杆 L，作用在点 P 处的力为 $\boldsymbol{F}$. 关于支点 O 的力矩是一个向量，记为 $\boldsymbol{M}$. 其模为

$$|\boldsymbol{M}|=|\overrightarrow{OP}||\boldsymbol{F}|\sin\theta,$$

其中 θ 为 $\boldsymbol{F}$ 与 $\overrightarrow{OP}$ 的夹角（见图 1-24）. 力矩 $\boldsymbol{M}$ 的方向按右手定则确定，垂直于 $\overrightarrow{OP}$ 与 $\boldsymbol{F}$ 所确定的平面. 将这种运算形式加以抽象，便得到两个向量的向量积（叉积）.

1. 叉积的定义及运算性质

设向量 $\boldsymbol{c}$ 由向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 决定，其中

(1)向量 $\boldsymbol{c}$ 的模为 $|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$，$\theta$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角；

(2)向量 $\boldsymbol{c}$ 的方向垂直于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 所确定的平面；

(3)$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 符合右手定则，即右手四指从 $\boldsymbol{a}$ 转向 $\boldsymbol{b}$，拇指所指方向即为 $\boldsymbol{c}$ 的方向（见图 1-25）.

那么，向量 $\boldsymbol{c}$ 就称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**叉积**，记为

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}.$$

根据叉积的定义，还可以从几何角度来理解：$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的方向既垂直于 $\boldsymbol{a}$ 又垂直于 $\boldsymbol{b}$，叉积的模 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$ 恰好为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 所构成的平行四边形的面积（见图 1-26）. 叉积的物理解释可以理解为力矩，因此，上面的力矩 $\boldsymbol{M}$ 等于 $\overrightarrow{OP}$ 与 $\boldsymbol{F}$ 的叉积，即 $\boldsymbol{M}=\overrightarrow{OP}\times\boldsymbol{F}$.

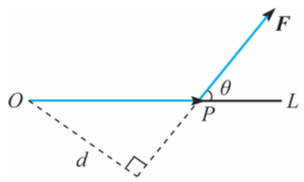


图 1-24

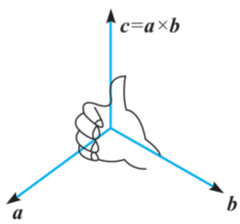


图 1-25

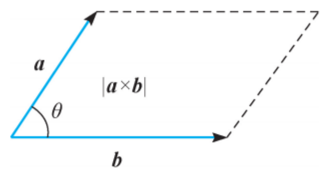


图 1-26

由叉积的定义容易得到如下运算性质：

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}.$$

对于两个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，有 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.

注意

若 $\boldsymbol{a}$ 或 $\boldsymbol{b}$ 中有零向量，则 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$. 此时零向量可视为与任意向量平行，因此上述结论仍然成立.

2. 叉积的运算律

反交换律：$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})$.

证明　由于叉积运算服从右手定则，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的方向为从 $\boldsymbol{a}$ 转向 $\boldsymbol{b}$，而 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$ 的方向为从 $\boldsymbol{b}$ 转向 $\boldsymbol{a}$，两者方向恰好相反.

分配律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$.

结合律：设 λ 为常数，则 $(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$.

例 10 试证：$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{a}\times\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

证明 只证 $\boldsymbol{a}\times\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

因为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}$ 平行（共线），所以其夹角 $\theta=0$ 或 π，从而 $\sin\theta=0$. 因此

$$|\boldsymbol{a}\times\lambda\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{a}||\lambda\boldsymbol{a}|\sin\theta=0.$$

而模为 0 的向量为零向量，所以

$$\boldsymbol{a}\times\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}.$$

3. 叉积的坐标表示

设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$，按上述运算律，可得叉积的坐标表示式：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\times(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=a_xb_x(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i})+a_yb_y(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j})+a_zb_z(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k})+a_xb_y(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j})+a_yb_x(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i})+\\&\quad a_xb_z(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k})+a_zb_x(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i})+a_yb_z(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k})+a_zb_y(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j})\\&=(a_yb_z-a_zb_y)\boldsymbol{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\boldsymbol{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

利用三阶行列式的表示方法，上式还可写成下列形式：

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix},$$

或

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}a_y&a_z\\b_y&b_z\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}a_x&a_z\\b_x&b_z\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}a_x&a_y\\b_x&b_y\end{vmatrix}\boldsymbol{k}.$$

例 11 求与向量 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$ 都垂直的单位向量 $\boldsymbol{e}$.

解 由叉积的定义可知，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 都垂直，而

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\3&-2&4\\1&1&-2\end{vmatrix}=10\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k},$$

又

$$|\boldsymbol{c}|=\sqrt{10^2+5^2}=5\sqrt{5},$$

所以

$$\boldsymbol{e}=\pm\frac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|}=\pm\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\boldsymbol{j}+\frac{1}{\sqrt{5}}\boldsymbol{k}\right).$$

例 12 求以 $A(3,0,2)$，$B(5,3,1)$，$C(0,-1,3)$ 三点为顶点的三角形的面积.

解 由叉积的定义可知，三角形 ABC 的面积为

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin\angle A=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|.$$

由于 $\overrightarrow{AB}=(2,3,-1)$，$\overrightarrow{AC}=(-3,-1,1)$，因此

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&3&-1\\-3&-1&1\end{vmatrix}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k}.$$

于是

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k}|=\frac{1}{2}\times\sqrt{2^2+1^2+7^2}=\frac{3}{2}\sqrt{6}.$$

1.2.3 向量的混合积

1. 混合积的定义

混合积是三个向量的一种乘积运算，其中既包含叉积也包含点积. 若先计算两个向量的点积，再与第三个向量作数乘，则所得结果为向量的数乘，不属于混合积的讨论范围.

设有三个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$，先作叉积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，再将所得向量与 $\boldsymbol{c}$ 作点积：$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$，所得数量称为向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的**混合积**（或**数量三重积**），记为 $[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]$.

由混合积的定义可得

$$[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\,|\boldsymbol{c}|\cos\alpha,$$

其中 α 为 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的夹角.

若向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 构成右手系，即 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 同向，则 $[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]>0$；若构成左手系，即 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 反向，则 $[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]<0$.

2. 混合积的几何意义

设向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为非零向量，则它们的混合积的绝对值 $|[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]|$ 等于以向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体的体积.

事实上，将 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 平移至共同的起点，以它们为棱可构成一个平行六面体，如图 1-27 所示. 设 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b},\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$，并记 $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$. 由叉积的定义可知，$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$ 等于以向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为邻边所作平行四边形 $OADB$ 的面积. 因此平行六面体的底面积为 $S=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$. 平行六面体的高 h 等于向量 $\boldsymbol{c}$ 在 $\boldsymbol{f}$ 方向上的投影的绝对值. 设 $\boldsymbol{f}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的夹角为 α，则

$$h=|\boldsymbol{c}|\,|\cos\alpha|.$$

于是体积为

$$V=Sh=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\,|\boldsymbol{c}|\,|\cos\alpha|=|[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]|.$$

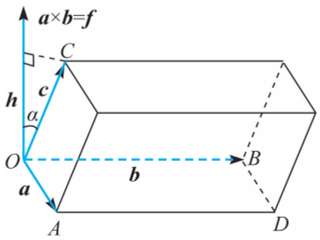


图 1-27

注意

由于 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 可能构成右手系或左手系，因此混合积 $[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]$ 可能为正或负；体积取其绝对值.

3. 混合积的坐标表示

设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z),\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z),\boldsymbol{c}=(c_x,c_y,c_z)$. 由叉积的坐标表示式可写

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}.$$

再由点积的坐标表示式，得三向量混合积

$$[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\\c_x&c_y&c_z\end{vmatrix}.$$

由混合积的几何意义可知，若 $[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]\neq0$，则以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为棱可构成平行六面体，从而 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 不共面；反之，若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 不共面，则 $[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]\neq0$.

因此，三向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ **共面的充要条件**是 $[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]=0$，即

$$\begin{vmatrix}a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\\c_x&c_y&c_z\end{vmatrix}=0.$$

例 13 已知四面体的四个顶点为 $A(-1,0,4)$，$B(3,-2,7)$，$C(0,2,-5)$，$D(2,8,3)$，求该四面体的体积.

解 四面体的体积等于以向量

$$\overrightarrow{AB}=(4,-2,3),\quad \overrightarrow{AC}=(1,2,-9),\quad \overrightarrow{AD}=(3,8,-1)$$

为棱的平行六面体体积的 $\frac{1}{6}$. 由混合积的几何意义可知，平行六面体的体积为

$$V=|[\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{AD}]|=\left\|\begin{matrix}4 & -2 & 3\\ 1 & 2 & -9\\ 3 & 8 & -1\end{matrix}\right\|=338.$$

故四面体的体积为

$$V'=\frac{1}{6}V=\frac{1}{6}\times 338=\frac{169}{3}.$$

习题 1.2

1. 已知三点 $M(1,2,3)$，$A(2,3,3)$，$B(1,2,4)$，求 $\angle AMB$.
2. 求向量 $\boldsymbol{a}=(4,-3,4)$ 在向量 $\boldsymbol{b}=(2,2,1)$ 上的投影.
3. 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为单位向量，且满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$.
4. 设 $\boldsymbol{a}=(3,5,-2)$，$\boldsymbol{b}=(2,1,4)$，问 λ 与 μ 有怎样的关系，能使得 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$ 与 z 轴垂直？
5. 设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，求 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.
6. 设 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，求：

   (1) $(-2\boldsymbol{a})\cdot 3\boldsymbol{b}$ 及 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$；(2) $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 夹角的余弦.
7. 已知四点 $A(1,2,3)$，$B(5,-1,7)$，$C(1,1,1)$，$D(3,3,2)$，求：

   (1) $\mathrm{Prj}_{\overrightarrow{CD}}\overrightarrow{AB}$；(2) 与 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{CD}$ 同时垂直的单位向量.
8. 向量 $\boldsymbol{d}$ 垂直于向量 $\boldsymbol{a}=(2,3,-1)$ 和 $\boldsymbol{b}=(1,-2,3)$，且与向量 $\boldsymbol{c}=(2,-1,1)$ 的点积为 -6，求向量 $\boldsymbol{d}$.
9. 向量 $7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}$ 与 $7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 分别垂直于向量 $\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}$，求向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.
10. 在顶点为 $A(1,-1,2)$，$B(5,-6,2)$ 和 $C(1,3,-1)$ 的三角形中，求 AC 边上的高 BD.
11. 设 $[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]=2$，试求 $[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})$.
12. 已知 $A(1,2,0)$，$B(2,3,1)$，$C(4,2,2)$，$M(x,y,z)$ 四点共面，求点 M 的坐标 x,y,z 所满足的坐标关系式.
13. 设 $\boldsymbol{m}=3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{n}=2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{p}=5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$，求向量 $\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p}$ 在各轴上的投影及分向量.
14. 设点 A 位于第Ⅴ卦限，向径 $\overrightarrow{OA}$ 与 x 轴、y 轴的夹角依次为 $\frac{\pi}{3}$ 和 $\frac{\pi}{4}$，且 $|\overrightarrow{OA}|=8$，求点 A 的坐标.
15. 一个向量的终点在点 $B(2,-1,7)$，它在 x 轴、y 轴和 z 轴上的投影依次为 $4,-4$ 和 7. 求该向量的起点 A 的坐标.

1.3 平面与直线的方程

平面与直线是空间解析几何中最基本的曲面与曲线. 本节将以向量为工具，讨论平面与直线的方程.

1.3.1 平面的方程

1. 平面的点法式方程

平面可以通过过一定点并与某一向量垂直的条件唯一确定. 与平面垂直的非零向量称为法向量. 容易知道，一个平面可以有正反两个方向的法向量，并且平面内的任意一个向量都与法向量垂直.

设平面 Π 上的一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 和它的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$ 为已知，此时平面 Π 的方程就确定了. 为求平面 Π 的方程，在此平面上任取一点 $M(x,y,z)$，则向量

$$\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$$

与法向量 $\boldsymbol{n}$ 垂直（见图 1-28），即它们的点积为零：

$$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{M_0M}=0.$$

因此有

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \quad ①$$

这就是平面 Π 上任一点 $M(x,y,z)$ 所满足的方程.

反过来，如果 $M(x,y,z)$ 不在平面 Π 上，那么向量 $\overrightarrow{M_0M}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 不垂直，故 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{M_0M}\neq 0$，即不在平面 Π 上的点 $M(x,y,z)$ 不满足方程①. 由此可知，平面 Π 上的任意一点的坐标 (x,y,z) 都满足方程①；不在平面 Π 上的点的坐标 (x,y,z) 都不满足方程①. 这样，平面 Π 的方程就是①，而方程①的图形就是平面 Π.

由于求解平面方程①的过程，是由平面上的一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 和它的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$ 所确定的，所以把方程①称为**平面的点法式方程**.

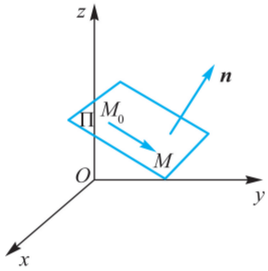


图 1-28

例 1 求过点 $(3,2,1)$，且以 $\boldsymbol{n}=4\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}$ 为法向量的平面方程.

解 根据点法式方程的定义，所求平面方程即为

$$4(x-3)-3(y-2)+6(z-1)=0,$$

整理得

$$4x-3y+6z-12=0.$$

例 2 求过 $M_1(2,-1,4)$，$M_2(1,-3,2)$ 和 $M_3(3,4,5)$ 三点的平面方程.

解 由于法向量 $\boldsymbol{n}$ 与向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$，$\overrightarrow{M_2M_3}$ 都垂直，而 $\overrightarrow{M_1M_2}=(-1,-2,-2)$，$\overrightarrow{M_2M_3}=(2,7,3)$，所以可取

$$\boldsymbol{n}=\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_2M_3}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ -1 & -2 & -2\\ 2 & 7 & 3\end{vmatrix}=8\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$$

为所求平面的法向量. 于是过点 $M_1(2,-1,4)$ 且以 $\boldsymbol{n}=8\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$ 为法向量的平面方程为

$$8(x-2)-(y+1)-3(z-4)=0,$$

即

$$8x-y-3z-5=0.$$

注意

例 2 是法向量未知的情形，对于这样的问题，我们必须先求出法向量，再写出点法式方程.

例 3 一平面通过两点 $M_1(1,2,3)$ 和 $M_2(0,2,5)$，且垂直于平面 $x+2y+2z=0$，求它的方程.

解 设所求平面的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$. 因 $\overrightarrow{M_1M_2}=(-1,0,2)$ 在所求平面上，所以它必与 $\boldsymbol{n}$ 垂直，故有

$$\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\boldsymbol{n}=-A+2C=0. \quad ②$$

又因为所求平面与已知平面 $x+2y+2z=0$ 垂直，所以又有
$$A+2B+2C=0. \tag{③}$$
联立方程②、③，得
$$A=2C,\quad B=-2C.$$
再由平面的点法式方程可知，所求平面方程为
$$A(x-1)+B(y-2)+C(z-3)=0.$$
将 $A=2C,B=-2C$ 代入上式，消去 $C(C\neq0)$，便得
$$2(x-1)-2(y-2)+(z-3)=0,$$
化简为
$$2x-2y+z-1=0.$$

2. 平面的一般方程

将平面的点法式方程 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ 进行整理，可得
$$Ax+By+Cz-(Ax_0+By_0+Cz_0)=0.$$
令 $D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$，则点法式方程可写为一个关于 x,y,z 的三元一次方程
$$Ax+By+Cz+D=0. \tag{④}$$
反之，对于任意三元一次方程 $Ax+By+Cz+D=0$，任取一个满足此方程的数组 (x_0,y_0,z_0)，即有 $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$. 将这两个等式相减，可得
$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0,$$
这恰为过点 (x_0,y_0,z_0) 且以 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$ 为法向量的平面方程.

综上所述，平面方程为一个三元一次方程，而任意三元一次方程 $Ax+By+Cz+D=0$ 的图形总是一个平面. 因此，把三元一次方程 $Ax+By+Cz+D=0$ 称为**平面的一般方程**，其法向量为 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$.

包含 0 系数的三元一次方程表示特殊的平面. 下面讨论它们关于坐标轴的相对位置，以及这样的平面通过的特殊点或线.

(1) 当 $D=0$ 时，方程④成为 $Ax+By+Cz=0$，它表示一个过原点的平面.

(2) 当 $A=0$ 时，方程④成为 $By+Cz+D=0$，其法向量 $\boldsymbol{n}=(0,B,C)$ 垂直于 x 轴，它表示一个平行于(或包含) x 轴的平面；当 $B=0$ 时，方程④成为 $Ax+Cz+D=0$，其法向量 $\boldsymbol{n}=(A,0,C)$ 垂直于 y 轴，它表示一个平行于(或包含) y 轴的平面；当 $C=0$ 时，方程④成为 $Ax+By+D=0$，其法向量 $\boldsymbol{n}=(A,B,0)$ 垂直于 z 轴，它表示一个平行于(或包含) z 轴的平面.

(3) 当 $A=B=0$ 时，方程④成为 $Cz+D=0$，其法向量 $\boldsymbol{n}=(0,0,C)$ 同时垂直于 x 轴和 y 轴，它表示一个平行于(或重合于) xOy 坐标面的平面；当 $B=C=0$ 时，方程④成为 $Ax+D=0$，其法向量 $\boldsymbol{n}=(A,0,0)$ 同时垂直于 y 轴和 z 轴，它表示一个平行于(或重合于) yOz 坐标面的平面；当 $A=C=0$ 时，方程④成为 $By+D=0$，其法向量 $\boldsymbol{n}=(0,B,0)$ 同时垂直于 x 轴和 z 轴，它表示一个平行于(或重合于) zOx 坐标面的平面.

例 4 求过 y 轴和点 $(3,-1,4)$ 的平面方程.

解 这也是一个未知法向量的问题，所以我们要先求出该平面的法向量. 由于平面过 y 轴，所以它的法向量垂直于 y 轴. 于是法向量在 y 轴上的投影为零，即 $B=0$. 又因平面过 y 轴，所以它必通过原点，于是有 $D=0$. 因此可直接设平面的一般方程为 $Ax+Cz=0$. 将点 $(3,-1,4)$ 的坐标代入方程，得
$$3A+4C=0,$$
即
$$A=-\frac{4}{3}C.$$
以此代入方程，并除以 $-\frac{C}{3}$ (其中 $C\neq0$)，便可得所求平面方程为
$$4x-3z=0.$$

3. 平面的截距式方程

例 5 已知平面与三个坐标轴的交点分别为 $P(a,0,0)$，$Q(0,b,0)$，$R(0,0,c)$，其中 $a,b,c\neq0$（见图 1-29），求此平面的方程.

解 这个问题类似于例 2，已知平面内三点的坐标，求平面方程. 但是注意到，这三个点都在坐标轴上，其坐标中零分量较多，在这里我们可以考虑用另外的方法来解决.

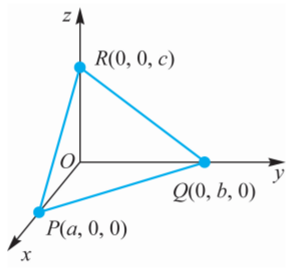


图 1-29

设平面方程为

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

因为点 $P(a,0,0)$，$Q(0,b,0)$，$R(0,0,c)$ 都在平面上，所以代入可得

$$\begin{cases} aA+D=0, \\ bB+D=0, \\ cC+D=0. \end{cases}$$

于是

$$A=-\frac{D}{a},\quad B=-\frac{D}{b},\quad C=-\frac{D}{c}.$$

将它们代入平面方程. 由于该平面与三个坐标轴均有交点，因此 $D\neq0$. 消去 D，得

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

这个形式的方程称为**平面的截距式方程**.

例 5 中用到的先假设平面方程，然后求各系数 A,B,C,D 的方法，我们称为**待定系数法**. 待定系数法比较适合用于法向量不容易求，且题设中点的坐标零分量较多的情形.

例 6 写出平面 $3x-4y+z-5=0$ 的截距式方程.

解 设 $y=z=0$，由方程得

$$3x-5=0,$$

即 $x=\frac{5}{3}$. 从而平面在 x 轴上的截距为 $a=\frac{5}{3}$.

同理可得，平面在 y 轴上的截距为 $b=-\frac{5}{4}$，平面在 z 轴上的截距为 $c=5$.

因此，平面的截距式方程为

$$\frac{x}{\frac{5}{3}}+\frac{y}{-\frac{5}{4}}+\frac{z}{5}=1.$$

4. 平面的三点式方程

已知不共线的三点确定一个平面. 下面由已知不在同一直线上的三点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$，$M_3(x_3,y_3,z_3)$ 来确定平面方程.

设 $M(x,y,z)$ 是平面上的任意一点，则三向量 $\overrightarrow{M_1M}$，$\overrightarrow{M_1M_2}$，$\overrightarrow{M_1M_3}$ 共面. 由向量共面的条件可知

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

这就是所求平面的方程，该方程称为**平面的三点式方程**.

例 7 求过三点 $(2,3,0)$，$(-2,-3,-4)$，$(0,6,0)$ 的平面方程.

解 由平面的三点式方程，得

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-0 \\ -2-2 & -3-3 & -4-0 \\ 0-2 & 6-3 & 0-0 \end{vmatrix}=0,$$

即所求平面方程为 $3x+2y-6z-12=0$.

1.3.2 直线的方程

一般来说，两个不平行的平面会相交，而它们的相交部分是一条直线. 因此，直线可以用两个关于 x,y,z 的三元一次方程所组成的三元一次方程组来表示.

设已知有两个相交的平面 Π_1,Π_2（见图 1-30），它们的方程分别为

$$\Pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$
$$\Pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$$

则它们相交而成的直线 L 的方程为

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases} \quad ⑤$$

方程⑤称为空间直线 L 的**一般方程**.

除此以外，直线方程还有另外一些表示方法.

如果向量 $\boldsymbol{s}$ 平行于直线 L，那么就称向量 $\boldsymbol{s}$ 为直线 L 的方向向量. 任一空间直线都可以由空间中一点及一个方向向量来唯一确定. 下面就讨论这种情形的直线方程.

设直线 L 过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$，其方向向量为 $\boldsymbol{s}=(m,n,p)$. 在直线 L 上任意取除点 P_0 外的一点 $P(x,y,z)$，作向量 $\overrightarrow{P_0P}$，则向量 $\overrightarrow{P_0P}$ 平行于方向向量 $\boldsymbol{s}$（见图 1-31），而向量

$$\overrightarrow{P_0P}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0).$$

于是有向量 $\overrightarrow{P_0P}$ 与向量 $\boldsymbol{s}$ 的对应分量成比例，即

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}. \quad ⑥$$

方程⑥叫作直线 L 的**对称式方程**（或**标准式方程**），其中 m,n,p 为直线 L 的方向向量 $\boldsymbol{s}$ 的坐标.

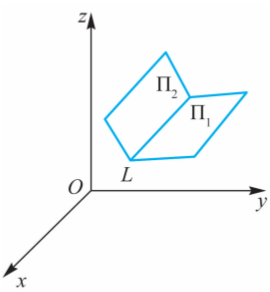


图 1-30

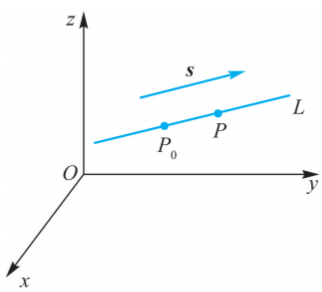


图 1-31

在方程⑥中可设比例常数为 t，即可将方程⑥写成另外的一种形式：

$$\begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+nt, \\ z=z_0+pt, \end{cases} \quad t\in(-\infty,+\infty). \quad ⑦$$

方程组⑦叫作空间直线的**参数方程**，其中 t 为参数. 直线的任一方向向量 (m,n,p) 叫作这一组方向数，而 $\boldsymbol{s}$ 的方向余弦叫作这一直线的方向余弦. 显然，直线的方向数是与它的方向余弦成比例的一组数. 由于直线的方向向量 $\boldsymbol{s}\neq\boldsymbol{0}$，所以 m,n,p 不能同时为零. 特别地，当 m,n,p 中有一个为零时，不妨设 $m=0$，而 $n\neq0,p\neq0$ 时，方程⑥应理解为

$$x-x_0=0,\quad \frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}.$$

当 m,n,p 中有两个为零时，不妨设 $m=0,n=0,p\neq0$. 此时方程⑥应理解为

$$x-x_0=0,\quad y-y_0=0.$$

例 8 求过点(1,2,3)且与平面 $2x+3y-z+2=0$ 垂直的直线方程.

解 因为所求直线与已知平面垂直，所以该直线的方向向量必与该平面的法向量平行. 而平面 $2x+3y-z+2=0$ 的法向量为 $(2,3,-1)$. 取其为直线的一个方向向量，则可写出直线的对称式方程为

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{-1}.$$

例 9 用对称式方程和参数方程表示直线

$$\begin{cases}x-y+z+1=0,\\3x-2y+z+2=0.\end{cases}$$

解 先找出直线上的一个点 (x_0,y_0,z_0). 为此，取 $x=0$，代入原方程组，有

$$\begin{cases}-y+z+1=0,\\-2y+z+2=0.\end{cases}$$

解得 $y=1,z=0$，即 $(0,1,0)$ 为所求直线上的一个点.

再求出所求直线的方向向量. 因为原方程组的两个平面的法向量为

$$\boldsymbol{n}_1=(1,-1,1),\quad \boldsymbol{n}_2=(3,-2,1),$$

不平行，所以可取

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&-1&1\\3&-2&1\end{vmatrix}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}.$$

于是所求直线的对称式方程为

$$\frac{x}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{1}.$$

参数方程为

$$\begin{cases}x=t\\y=1+2t,\\z=t,\end{cases}\quad t\in(-\infty,+\infty).$$

1.3.3 点到平面的距离

下面讨论平面外一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离 d，如图 1-32 所示.

首先在平面上任取一点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$，并设 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$ 为平面的法向量，则 P_0 到该平面的距离为向量 $\overrightarrow{P_1P_0}$ 在 $\boldsymbol{n}$ 上的投影的绝对值，即

$$d=|\mathrm{Pr}_{\boldsymbol{n}}\overrightarrow{P_1P_0}|.$$

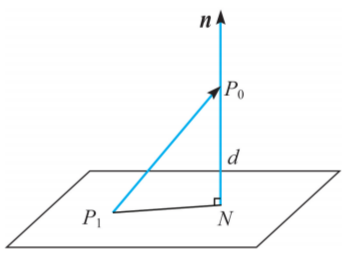


图 1-32

由点积与投影的关系可得

$$\overrightarrow{P_1P_0}\cdot\boldsymbol{n}=|\boldsymbol{n}|\,|\mathrm{Pr}_{\boldsymbol{n}}\overrightarrow{P_1P_0}|.$$

其中

$$\overrightarrow{P_1P_0}=(x_0-x_1,y_0-y_1,z_0-z_1),\quad |\boldsymbol{n}|=\sqrt{A^2+B^2+C^2}.$$

于是

$$\mathrm{Pr}_{\boldsymbol{n}}\overrightarrow{P_1P_0}=\frac{1}{|\boldsymbol{n}|}(\overrightarrow{P_1P_0}\cdot\boldsymbol{n})=\frac{(x_0-x_1,y_0-y_1,z_0-z_1)\cdot(A,B,C)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$
$$=\frac{A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)+C(z_0-z_1)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \tag{8}$$

又由于点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 在平面上，故有 $Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$. 因此，式⑧可化为

$$\mathrm{Pr}_{\boldsymbol{n}}\overrightarrow{P_1P_0}=\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

于是，平面外一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离为

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \tag{9}$$

例 10 求两平行平面 $\Pi_1:Ax+By+Cz+D_1=0$ 和 $\Pi_2:Ax+By+Cz+D_2=0$ 的距离 d（其中 A,B,C 不全为零）.

解 如图 1-33 所示，在平面 Π_1 上任取一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$，则点 P_0 到 Π_2 的距离就是两平行平面间的距离. 于是

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D_2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \tag{10}$$

又由于 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 是平面 $\Pi_1:Ax+By+Cz+D_1=0$ 上的点，因此 $Ax_0+By_0+Cz_0+D_1=0$，即 $Ax_0+By_0+Cz_0=-D_1$. 代入式⑩，得

$$d=\frac{|D_2-D_1|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

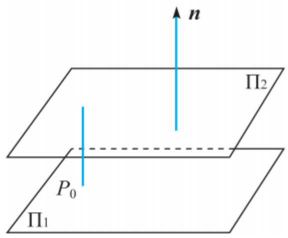


图 1-33

1.3.4 两平面的夹角及位置关系

设有两平面 $\Pi_1:A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ 和 $\Pi_2:A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$，下面探讨两平面的位置关系.

两平面的位置关系只有两种：平行（包括重合）或相交（包括正交，即垂直）. 若相交，则存在夹角问题. 把两平面的法向量的夹角 θ 称为**两平面的夹角**. 由于法向量有两个方向，这里约定 $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. 其中，两平面平行时 $\theta=0$，两平面垂直时 $\theta=\frac{\pi}{2}$，其余情况下两平面的夹角为锐角.

平面 Π_1 和 Π_2 的法向量分别为

$$\boldsymbol{n}_1=(A_1,B_1,C_1),\quad \boldsymbol{n}_2=(A_2,B_2,C_2),$$

则 $(\widehat{\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2})$ 和 $(\widehat{-\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2})=\pi-(\widehat{\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2})$ 之一必属于 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，取其为平面 Π_1 和 Π_2 的夹角 θ（见图 1-34）. 于是

$$\cos\theta=|\cos(\widehat{\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2})|.$$

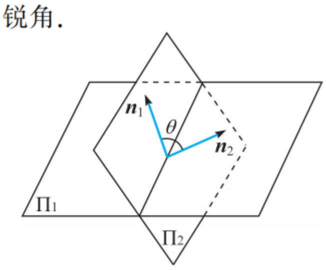


图 1-34

由两向量夹角余弦的坐标表示式，可得

$$\cos\theta=|\cos(\widehat{\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2})|=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}. \tag{11}$$

例 11 求两平面 $x-y-11=0$ 和 $3x+8=0$ 的夹角.

解 由式⑪得

$$\cos\theta=\frac{|1\times3+(-1)\times0+0\times0|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+0^2}\cdot\sqrt{3^2+0^2+0^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

故所求夹角 θ 为 $\frac{\pi}{4}$.

例 12 平面过 z 轴，且与平面 $2x+y-\sqrt{5}z=0$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$，求此平面方程.

解 平面过 z 轴，则方程可设为 $Ax+By=0$. 由题意知，两平面的法向量分别为 $\boldsymbol{n}_1=(A,B,0)$，$\boldsymbol{n}_2=(2,1,-\sqrt{5})$. 由平面夹角公式得

$$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\frac{|2A+B|}{\sqrt{A^2+B^2}\cdot\sqrt{2^2+1^2+5}}=\frac{|2A+B|}{\sqrt{A^2+B^2}\cdot\sqrt{10}}.$$

由于 $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$，故 $\frac{1}{2}=\frac{|2A+B|}{\sqrt{10}\sqrt{A^2+B^2}}$，即

$$|2A+B|=\frac{\sqrt{10}}{2}\cdot\sqrt{A^2+B^2}.$$

解得 $A=\frac{B}{3}$ 或 $A=-3B$. 因此，所求平面方程为

$$x+3y=0 \quad 或 \quad -3x+y=0.$$

两平面位置关系中比较特殊的情形是平行和垂直. 两平面平行相当于其法向量相互平行，两平面垂直相当于其法向量相互垂直. 设两平面 Π_1 和 Π_2 的法向量分别为 (A_1,B_1,C_1) 和 (A_2,B_2,C_2)，则

(1) 平行条件：$\Pi_1/\!/\Pi_2\Leftrightarrow\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}(A_2,B_2,C_2\neq0)$.

特别地，当 $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}(A_2,B_2,C_2,D_2\neq0)$ 时，平面 Π_1 与 Π_2 重合.

(2) 垂直条件：$\Pi_1\perp\Pi_2\Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$.

注意

两平面相交的充要条件是：它们既不平行，也不重合.

例 13 求通过 x 轴，且垂直于平面 $5x+4y-2z+14=0$ 的平面方程.

解 设所求平面的法向量为 $\boldsymbol{n}$. 已知平面 $5x+4y-2z+14=0$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(5,4,-2)$. 由题意知，$\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{n}_1$，且因所求平面通过 x 轴，故 $\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{i}$. 于是

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{i}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\5&4&-2\\1&0&0\end{vmatrix}=(0,-2,-4).$$

又所求平面过原点，故其方程为

$$0\cdot x-2y-4z=0,$$

即 $y+2z=0$.

1.3.5 两直线的夹角及位置关系

如果已知两条直线的方程，或者一条直线和一个平面的方程，那么就可以讨论它们之间的夹角.

任意两条直线，它们的方向向量的夹角称为两直线的夹角(通常取两角中的较小者). 于是，设直线 L_1 与 L_2 的方向向量分别为 $\boldsymbol{s}_1=(m_1,n_1,p_1)$，$\boldsymbol{s}_2=(m_2,n_2,p_2)$，按两向量夹角的余弦公式，直线 L_1 与 L_2 的夹角 θ 的余弦为

$$\cos\theta=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}.$$

由此即可确定夹角 θ.

特别地，两条直线垂直的条件为

$$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0.$$

两条直线平行的条件为

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}\quad(m_2,n_2,p_2\neq 0),$$

或者等价地，$\boldsymbol{s}_1$ 与 $\boldsymbol{s}_2$ 成比例.

例 14 求直线 $L_1:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z}{-1}$ 与直线 $L_2:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-1}{4}$ 的夹角.

解 直线 L_1 的方向向量为 $\boldsymbol{s}_1=(2,2,-1)$，直线 L_2 的方向向量为 $\boldsymbol{s}_2=(1,1,4)$. 设直线 L_1 与 L_2 的夹角为 θ，则

$$\cos\theta=\frac{|2\times1+2\times1-1\times4|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}\sqrt{1^2+1^2+4^2}}=0.$$

所以 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$，即直线 L_1 与 L_2 相互垂直.

1.3.6 直线与平面的夹角及位置关系

如果已知直线 L 与平面 Π 不垂直，直线 L 和它在平面 Π 上的投影直线的夹角 $\varphi\left(0\leqslant\varphi<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 称为直线 L 与平面 Π 的夹角(见图 1-35). 如果已知直线 L 与平面 Π 垂直，那么它们之间的夹角为 $\dfrac{\pi}{2}$.

设直线 L 的方向向量为 $\boldsymbol{s}=(m,n,p)$，平面 Π 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$. 设 $\boldsymbol{s}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 的夹角为 $\dfrac{\pi}{2}-\varphi$ 或 $\dfrac{\pi}{2}+\varphi$，又因为

$$\sin\varphi=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\left|\cos\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)\right|,$$

所以

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

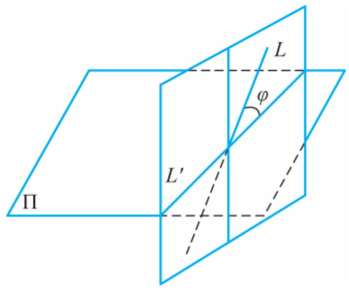


图 1-35

因为直线与平面平行相当于直线的方向向量与平面的法向量垂直，所以直线与平面平行相当于

$$Am+Bn+Cp=0.$$

因为直线与平面垂直相当于直线的方向向量与平面的法向量平行，所以直线与平面垂直相当于

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}.$$

例 15 设直线 $L:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+1}{2}$，平面 $\Pi:x-y+2z=3$，求直线与平面的夹角.

解 直线 L 的方向向量为 $\boldsymbol{s}=(2,-1,2)$，平面 Π 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,-1,2)$，则 L 与 Π 的夹角 φ 满足

$$\sin\varphi=\frac{|1\times2+(-1)\times(-1)+2\times2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}\cdot\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=\frac{7}{3\sqrt{6}}.$$

因此，L 与 Π 的夹角 φ 为 $\arcsin\dfrac{7}{3\sqrt{6}}$.

例 16 求过点 $(1,2,3)$ 且与平面 $x-3y+2z+1=0$ 垂直的直线方程.

解 因为所求直线垂直于已知平面，所以直线的方向向量与平面的法向量平行. 而 $(1,-3,2)$ 为已知平面的法向量，故所求直线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z-3}{2}.$$

习题 1.3

1. 求过点 $(1,0,-1)$ 且平行于平面 $x+2y-z+8=0$ 的平面方程.

2. 指出下列平面的特殊性质，并作图.

(1) $3x-2=0$；　(2) $4y-7z=0$；　(3) $2x+3y-6=0$；　(4) $x+2y-z=0$.

3. 求过 $A(1,1,-1)$，$B(-2,-2,2)$，$C(1,-1,2)$ 三点的平面方程，并求其在各坐标轴上的截距.

4. 求过 x 轴和点 $(4,-3,-1)$ 的平面方程.

5. 求平面 $2x+y+2z-9=0$ 与各坐标面的夹角的余弦.

6. 试确定 k 的值，使平面 $kx+y+z+k=0$ 与 $x+ky+kz+k=0$：

(1)互相垂直；　(2)互相平行；　(3)重合.

7. 讨论以下各组中两平面的位置关系.

(1) $-x+2y-z+1=0$，$y+3z-1=0$；

(2) $2x-y+z-1=0$，$-4x+2y-2z-1=0$；

(3) $2x-y-z+1=0$，$-4x+2y+2z-2=0$.

8. 试求系数 k，使平面 $x+ky-2z=9$ 适合下列条件之一.

(1)经过点 $(5,-4,-6)$；

(2)与原点相距 3 个单位；

(3)与平面 $2x-3y+z=0$ 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$.

9. 求点 $(2,3,-2)$ 到平面 $2x-3y+5z-8=0$ 的距离.

10. 用对称式方程及参数方程表示直线 $\begin{cases}x+y+z+1=0,\\2x-y+3z+4=0.\end{cases}$

11. 求过点 $(-3,2,5)$ 且与两平面 $x-4z=3$ 和 $2x-y-5z=1$ 的交线平行的直线方程.

12. 求过点 $P(2,-1,3)$ 且与直线 L：$\frac{x}{3}=\frac{y+7}{5}=\frac{z-2}{2}$ 垂直相交的直线方程.

13. 求直线 L_1：$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-4}=\frac{z+3}{1}$ 与 L_2：$\frac{x}{2}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z}{-1}$ 的夹角.

14. 求点 $P(3,-1,2)$ 到直线 $\begin{cases}x+y-z+1=0,\\2x-y+z-4=0\end{cases}$ 的距离.

15. 试确定下列各组中的直线和平面的位置关系.

(1) $\frac{x+3}{-2}=\frac{y+4}{-7}=\frac{z}{3}$ 和 $4x-2y-2z=3$；

(2) $\begin{cases}x+3y+2z+1=0,\\2x-y-10z+3=0\end{cases}$ 和 $4x-2y+z=0$；

(3) $\frac{x-2}{3}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-3}{-4}$ 和 $x+y+z=3$.

16. 求过点 $(2,0,-3)$ 且与直线 $\begin{cases}x-2y+4z-7=0,\\3x+5y-2z+1=0\end{cases}$ 垂直的平面方程.

17. 求直线 $\begin{cases}x+y-z-1=0,\\x-y+z+1=0\end{cases}$ 在平面 $x+y+z=0$ 上的投影的直线方程.

18. 求点 $(-1,2,0)$ 在平面 $x+2y-z+1=0$ 上的投影.

1.4 曲面方程与空间曲线及其表示

1.4.1 曲面方程

空间解析几何实际上就是研究动点的几何轨迹. 仅在一个条件下运动的空间点的轨迹，一般来说是一个曲面，如到两定点距离和为常值的点的轨迹是椭球；而同时在两个条件下运动的空间点的轨迹往往是空间曲线，如当有三个不共线的点 M_1, M_2, M_3，与 M_1 的距离为定值，且与 M_2 和 M_3 的距离相等的点的轨迹是圆. 本节将通过分析动点的轨迹特征，建立关于动点坐标 (x,y,z) 的曲面或曲线的方程.

1. 曲面方程的概念

如果曲面 S 上每一点的坐标都满足方程 $F(x,y,z)=0$，而不在曲面 S 上的点的坐标都不满足这个方程，那么称方程 $F(x,y,z)=0$ 为**曲面 S 的方程**，而称曲面 S 为此**方程的图形**.

下面举例说明怎样从曲面上点的特征得出曲面方程.

例 1 如图 1-36 所示，求球心在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$、半径为 R 的球面方程.

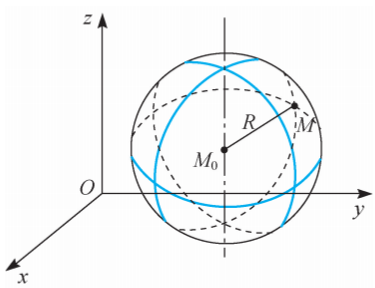


图 1-36

解 点 $M(x,y,z)$ 在以 M_0 为球心、R 为半径的球面上的充要条件是

$$|M_0M|=R,$$

即

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=R.$$

两边平方，得

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2. \qquad ①$$

显然，球面上的点的坐标都满足此方程，不在球面上的点的坐标都不满足该方程. 因此，方程①即为球心在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$、半径为 R 的球面方程.

一般地，设有三元二次方程

$$Ax^2+Ay^2+Az^2+Dx+Ey+Fz+G=0.$$

该方程有两个特点：一是缺少 xy, yz, zx 项（交叉项），二是平方项系数相同. 一般来说，具有上述特点的三元二次方程的图形是一个球面. 需要注意的是，该方程经配方后能化为方程①的形式；否则，可能表示虚球面.

例 2 求与原点 O 及点 $M_0(2,3,4)$ 的距离之比为 $1:2$ 的全体点所组成的曲面方程.

解 设 $M(x,y,z)$ 是曲面上的任一点，根据题意，有 $\dfrac{|MO|}{|MM_0|}=\dfrac{1}{2}$，即

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2}}=\frac{1}{2},$$

整理得

$$\left(x+\frac{2}{3}\right)^2+(y+1)^2+\left(z+\frac{4}{3}\right)^2=\frac{116}{9}.$$

这就是所求曲面上点的坐标所满足的方程，而不在该曲面上的点的坐标不满足此方程，所以该方程即为所求曲面的方程.

以上说明，作为点的几何轨迹的曲面，可以用其点的坐标间的方程来表示. 反之，变量 x,y,z 间的方程通常表示一个曲面. 下面将以旋转曲面为例讨论如下问题：已知一曲面作为点的几何轨迹时，如何建立该曲面的方程？再以柱面和二次曲面为例讨论如下问题：已知坐标 x,y,z 间的一个方程时，研究该方程所表示曲面的形状.

2. 旋转曲面的方程

设平面内有一条定直线和一条曲线，则该曲线绕定直线旋转一周所生成的曲面称为**旋转曲面**，其中定直线称为旋转曲面的**轴**. 旋转的动曲线称为旋转曲面的**母线**.

下面只讨论母线在某一坐标面上，绕某一坐标轴旋转所生成的旋转曲面.

设在 yOz 坐标面上有一已知曲线 C，其方程为

$$f(y,z)=0,$$

求曲线 C 绕 z 轴旋转一周所生成的旋转曲面（见图 1-37）的方程.

设 $M_1(0,y_1,z_1)$ 为曲线 C 上的一点，则必有 $f(y_1,z_1)=0$. 当曲线 C 绕 z 轴旋转时，点 M_1 绕 z 轴旋转到另一点 $M(x,y,z)$. 此时，点 M 与 z 轴的距离等于点 M_1 到 z 轴的距离，且二者有相同的 z 坐标，即 $|y_1|=\sqrt{x^2+y^2}$，$z=z_1$. 将其代入 $f(y_1,z_1)=0$，得

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0,$$

即为所求旋转曲面的方程.

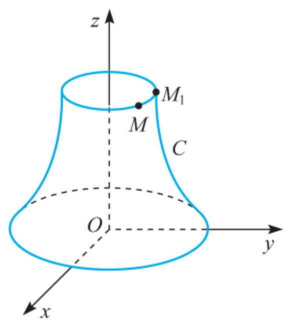


图 1-37

综上所述，当已知母线 C 的方程为 $f(y,z)=0$ 时，保持 z 不变，将 y 改为 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$，便得曲线 C 绕 z 轴旋转所生成的旋转曲面的方程

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0.$$

同理，曲线 C 绕 y 轴旋转所生成的旋转曲面的方程为 $f(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0$.

对于其他坐标面上的曲线绕坐标轴旋转生成的旋转曲面，其方程可用上述类似方法求得.

例 3 如图 1-38 所示，取两条相交且夹角 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 的直线，其中一条直线绕另一条直线旋转一周所得旋转曲面称为**圆锥面**. 两直线的交点称为圆锥面的**顶点**，两直线的夹角 α 称为圆锥面的**半顶角**. 当将坐标原点 O 设在圆锥面的顶点处，并以 z 轴为旋转轴时，试建立圆锥面的方程.

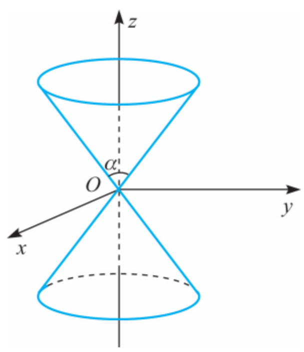


图 1-38

解 在 yOz 坐标面内，直线 L 的方程为

$$z=y\cot\alpha. \tag{②}$$

由于旋转轴为 z 轴，因此将方程②中的 y 改为 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$，便得到圆锥面的方程

$$z=\pm\sqrt{x^2+y^2}\cot\alpha.$$

整理得

$$z^2=a^2(x^2+y^2),$$

其中 $a=\cot\alpha$.

事实上，之前学习过的椭圆、抛物线及双曲线都是由圆锥面截得的. 用一个平面去截圆锥面：若截面与所有母线都相交，则截线为椭圆；若截面与某条母线平行，则截线为抛物线；若截面与轴线平行，则截线为双曲线的一支.

例 4 将 zOx 坐标面上的双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 分别绕 x 轴和 z 轴旋转一周，求所生成的旋转曲面的方程.

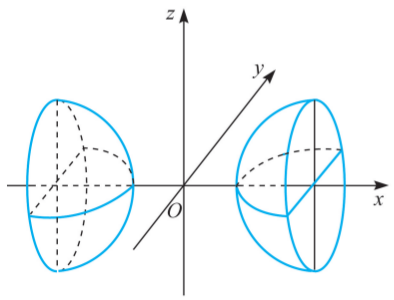
解 绕 x 轴旋转所生成的旋转曲面的方程为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{c^2}=1.$$

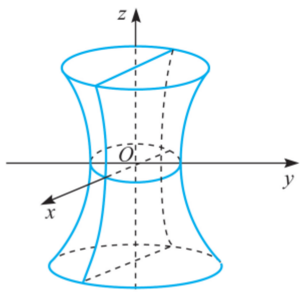
绕 z 轴旋转所生成的旋转曲面的方程为

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

这两种曲面分别称为**旋转双叶双曲面**和**旋转单叶双曲面**(见图 1-39).



(a)旋转双叶双曲面



(b)旋转单叶双曲面

图 1-39

3. 柱面的方程

给定一条定直线 l 和定曲线 C，取平行于定直线 l 的动直线 L，使动直线 L 沿定曲线 C 移动，由此动直线 L 形成的轨迹称为**柱面**，其中定曲线 C 称为柱面的**准线**，动直线 L 称为柱面的**母线**，如图 1-40 所示.

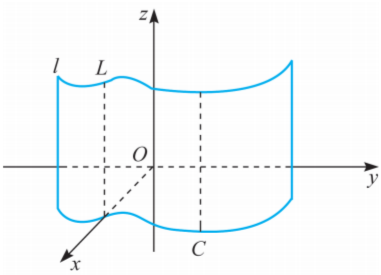


图 1-40

例 5 试讨论方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$表示怎样的曲面.

解 方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$在平面解析几何中表示 xOy 坐标面上以原点 O 为中心的椭圆曲线. 但在空间直角坐标系中，该方程表示的应是一个曲面.

由于方程中不含 z，所以对任意动点 $M(x,y,z)$，无论 z 取何值，只要横坐标 x 与纵坐标 y 满足此方程，这些点都在该曲面上. 于是可知，过 xOy 坐标面上椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$上一点 $M(x,y,0)$，且平行于 z 轴的直线一定在该方程所表示的曲面上. 该曲面相当于 xOy 坐标面上的椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$沿平行于 z 轴的直线移动所形成的曲面，称为**椭圆柱面**（见图 1-41）.

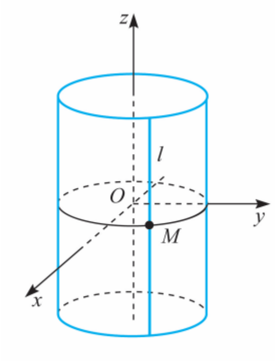


图 1-41

一般地，只含 x,y 而不含 z 的方程 $F(x,y)=0$ 在空间直角坐标系中表示母线平行于 z 轴的柱面，其准线是 xOy 坐标面上的曲线

$$F(x,y)=0.$$

例 6 设 Γ：$\begin{cases}\varphi(x,y)=0,\\ z=0,\end{cases}$求以 Γ 为准线、母线平行于 z 轴的柱面方程.

解 在所求柱面上任取一点 $M(x,y,z)$，则点 M 必在某条母线上，该母线与 Γ 的交点为 $M_1(x,y,0)$（见图 1-42）. 因此有 $\varphi(x,y)=0$. 又由于点 M 的任意性，故柱面上任一点都满足 $\varphi(x,y)=0$. 另一方面，若$M(x,y,z)$满足 $\varphi(x,y)=0$，则点 M 必在经过$(x,y,0)$的母线上. 于是所求柱面方程为

$$\varphi(x,y)=0.$$

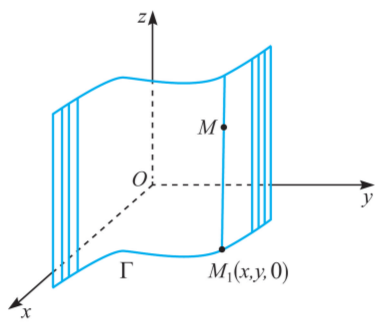


图 1-42

类似地，只含 x,z 而缺 y 的方程 $G(x,z)=0$ 和只含 y,z 而缺 x 的方程 $H(y,z)=0$ 分别表示母线平行于 y 轴和 x 轴的柱面.

例如，$x^2+y^2=4$ 在平面解析几何中表示圆心在原点、半径为 2 的圆，在空间解析几何中表示母线平行于 z 轴、准线为$\begin{cases}x^2+y^2=4,\\ z=0\end{cases}$的圆柱面. 又如，$y=x+1$ 在平面解析几何中表示斜率为 1、截距为 1 的直线，在空间解析几何中表示平行于 z 轴的平面. 该平面实际上也是一种柱面，其母线平行于 z 轴，准线为$\begin{cases}y=x+1,\\ z=0\end{cases}$.

4. 二次曲面的方程

在空间直角坐标系中，若 $F(x,y,z)=0$ 是一次方程，则其图形是一个平面，该平面也称为一次曲

面. 若 $F(x,y,z)=0$ 为二次方程,则其图形称为二次曲面.

理解方程 $F(x,y,z)=0$ 所表示曲面形状的方法有很多,这里主要介绍两种. 一种方法称为**截痕法**,即用坐标面和与坐标面平行的平面去截曲面,考察其交线的形状,然后加以综合,从而理解曲面的空间形状. 另一种方法称为**伸缩变形法**. 设 S 是一个曲面,其方程为 $F(x,y,z)=0$. 假如 S' 是将曲面 S 沿 x 轴方向伸缩 λ 倍所得的曲面,则显然,若 $(x,y,z)\in S$,则 $(\lambda x,y,z)\in S'$;若 $(x,y,z)\in S'$,则 $\left(\frac{1}{\lambda}x,y,z\right)\in S$. 因此,对于任意 $(x,y,z)\in S'$,有 $F\left(\frac{1}{\lambda}x,y,z\right)=0$,因此,曲面 S' 的方程为 $F\left(\frac{1}{\lambda}x,y,z\right)=0$.

从几何角度分类,二次曲面共有九种. 适当选取空间直角坐标系,可得它们的标准方程. 下面就其标准方程来讨论它们的形状.

(1)椭圆柱面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. 表示母线平行于 z 轴的柱面(见图 1-41),它的准线是 xOy 坐标面上的椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

(2)双曲柱面 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. 表示母线平行于 z 轴的柱面(见图 1-43),它的准线是 xOy 坐标面上的双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

(3)抛物柱面 $x^2=ay$. 表示母线平行于 z 轴的柱面(见图 1-44),它的准线是 xOy 坐标面上的抛物线 $x^2=ay$.

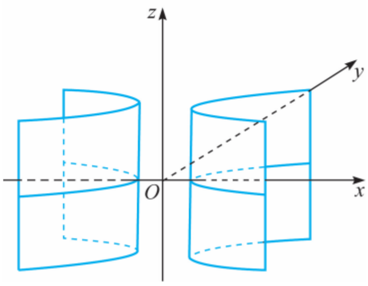


图 1-43

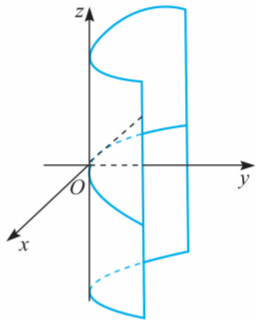


图 1-44

(4)椭圆锥面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2$. 首先应用截痕法了解此曲面的特征. 用与 xOy 坐标面平行的平面 $z=t$ 截此曲面,得一椭圆

$$\frac{x^2}{(at)^2}+\frac{y^2}{(bt)^2}=1 \quad (t\neq 0).$$

该式表示一族椭圆,且它们的长短轴比不变. 当 $t=0$ 时,得一点 $(0,0,0)$. 当 $|t|$ 由大逐渐减小至 0 时,这族椭圆将由大变小,直至缩为一点. 因此,椭圆锥面的形状如图 1-45 所示.

当然,也可以用伸缩变形法来分析. 把圆锥面 $\frac{x^2+y^2}{a^2}=z^2$ 沿 y 轴方向伸缩 $\frac{b}{a}$ 倍,所得曲面为椭圆锥面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2$.

(5)椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. 用截痕法来讨论此曲面的形状. 用 xOy 坐标面 $z=0$ 及与 xOy 坐标面平行的平面 $z=h$ $(|h|\leqslant c)$ 去截曲面,其截痕为椭圆,且当 $|h|$ 由 0 逐渐增大到 c 时,椭圆由大变小,逐渐缩为一点. 同样,用 zOx 坐标面及与 zOx 坐标面平行的平面去截曲面,以及用 yOz 坐标面及与

yOz 坐标面平行的平面去截曲面，所得结论与上述相同. 综上所述，椭球面的形状如图 1-46 所示.

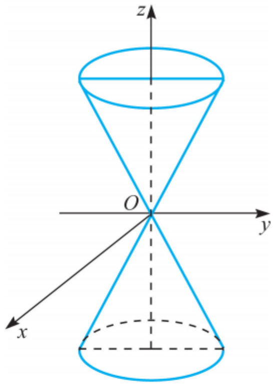


图 1-45

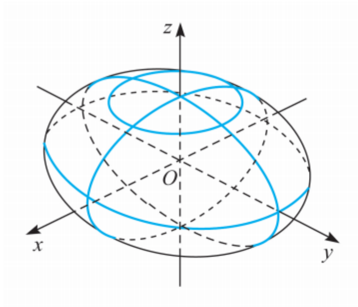


图 1-46

(6)单叶双曲面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$. 可通过伸缩变形法得到. 先取 zOx 坐标面上的双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$，绕 z 轴旋转，得旋转单叶双曲面$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$[见图 1-39(b)]；再沿 y 轴方向伸缩$\frac{b}{a}$倍，即得单叶双曲面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

(7)双叶双曲面$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$. 同理，先取 zOx 坐标面上的双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$，绕 x 轴旋转，得旋转双叶双曲面$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2+y^2}{c^2}=1$[见图 1-39(a)]；再沿 y 轴方向伸缩$\frac{b}{c}$倍，即得双叶双曲面$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

(8)椭圆抛物面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$. 用截痕法分析其形状. 用 xOy 坐标面截该曲面，截痕为一点 $(0,0)$，称为椭圆抛物面的顶点. 用平面 $z=h\ (h>0)$ 截该曲面，截痕为椭圆，且椭圆的半轴随 h 的增大而增大. 若用平面 $x=h$ 或 $y=h$（h 为常数）截曲面，交线分别为抛物线. 综上所述，椭圆抛物面的几何形状如图 1-47 所示.

(9)双曲抛物面$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$. 用截痕法分析. 用平面 $x=t$ 截该曲面，得抛物线 $z=\frac{t^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$，其顶点坐标为$\left(t,0,\frac{t^2}{a^2}\right)$，开口向下. 随着 t 的变化，抛物线形状不变，但顶点沿曲线 $z=\frac{x^2}{a^2}(y=0)$移动. 由此可见，该曲面呈马鞍形，其几何形状如图 1-48 所示.

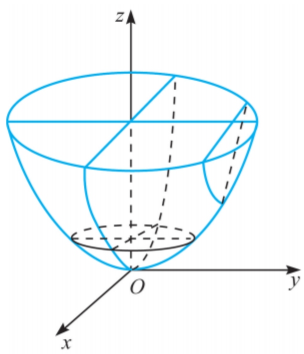


图 1-47

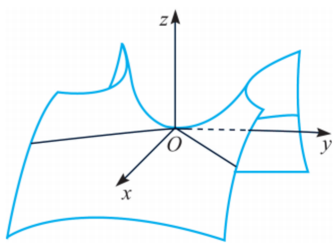


图 1-48

前面所述的旋转曲面中也包含一些二次曲面，如圆锥面、旋转双叶双曲面和旋转单叶双曲面，它们分别为椭圆锥面、双叶双曲面和单叶双曲面的特殊情形.

1.4.2 空间曲线及其表示

1. 空间曲线及其方程

(1)空间曲线的一般方程. 若要确定空间曲线的方程，最简单的方法是把它看作两个曲面的交线. 设

$$F(x,y,z)=0,\quad G(x,y,z)=0$$

是两个曲面方程. 交线 C 上点的坐标都应同时满足这两个方程，不在 C 上的点的坐标不能同时满足这两个方程. 因此联立方程组

$$\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\G(x,y,z)=0,\end{cases}\tag{③}$$

即为空间曲线 C 的方程. 方程组③称为**空间曲线的一般方程**.

例 7 方程组 $\begin{cases}z=\sqrt{4a^2-x^2-y^2},\\x^2+y^2=z^2\end{cases}$ 表示怎样的曲线?

解 方程组中第一个方程表示球心在坐标原点 O、半径为 $2a$ 的上半球面. 第二个方程表示以 z 轴为旋转轴的圆锥面. 方程组就表示上述半球面与圆锥面的交线，交线图形为圆，圆心在点$(0,0,\sqrt{2}a)$，半径为 $\sqrt{2}a$.

(2)空间曲线的参数方程. 空间曲线 C 的方程也可以用参数形式表示. 若动点的坐标 x,y,z 均是参数 t 的函数

$$\begin{cases}x=x(t),\\y=y(t),\\z=z(t),\end{cases}$$

则此方程组称为**空间曲线的参数方程**.

例 8 若空间一点 M 在圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 上以角速度 ω 绕 z 轴旋转，同时又以线速度 v 沿平行于 z 轴的正方向上升(其中 ω,v 均为常数)，则点 M 所形成的图形称为**螺旋线**(见图 1-49). 试建立其参数方程.

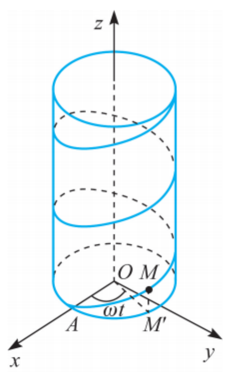


图 1-49

解 取时间 t 为参数. 设当 $t=0$ 时，动点位于 x 轴上的一点 $A(a,0,0)$. 经过时间 t，动点由 A 运动到 $M(x,y,z)$. 记 M 在 xOy 坐标面上的投影为 M'，M'的坐标为$(x,y,0)$. 由于动点在圆柱面上以角速度 ω 绕 z 轴旋转，所以经过时间 t，有$\angle AOM'=\omega t$. 从而

$$x=OM'\cos\angle AOM'=a\cos\omega t,$$
$$y=OM'\sin\angle AOM'=a\sin\omega t.$$

由于动点同时以线速度 v 沿平行于 z 轴的正方向上升，所以

$$z=MM'=vt.$$

因此，螺旋线的参数方程为

$$\begin{cases}x=a\cos\omega t,\\y=a\sin\omega t,\\z=vt.\end{cases}$$

也可以用其他变量作为参数，如令 $\theta=\omega t$，则螺旋线的参数方程可写为

$$\begin{cases}x=a\cos\theta,\\y=a\sin\theta,\\z=b\theta,\end{cases}$$

其中 $b=\dfrac{v}{\omega}$，参数为 θ.

下面介绍曲面的参数方程.曲面的参数方程通常含两个参数,形式为

$$\begin{cases}x=x(s,t),\\ y=y(s,t),\\ z=z(s,t).\end{cases}$$

常见的例子是旋转曲面的参数表示.设已知空间曲线 Γ 的参数方程为

$$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t),\quad(\alpha\leqslant t\leqslant\beta),\\ z=\omega(t).\end{cases}$$

若曲线 Γ 绕 z 轴旋转,则所得旋转曲面的参数方程为

$$\begin{cases}x=\sqrt{[\varphi(t)]^2+[\psi(t)]^2}\cos\theta,\\ y=\sqrt{[\varphi(t)]^2+[\psi(t)]^2}\sin\theta,\quad(\alpha\leqslant t\leqslant\beta,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi).\\ z=\omega(t)\end{cases}\qquad④$$

这是因为当 t 固定时,点 $M_1(\varphi(t),\psi(t),\omega(t))$ 绕 z 轴旋转,得到平面 $z=\omega(t)$ 上的圆,其半径为 $\sqrt{[\varphi(t)]^2+[\psi(t)]^2}$.因此,式④即为旋转曲面的参数方程.

例 9 试将球面方程 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 化为参数方程.

解 球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 可看作 zOx 坐标面上的半圆周

$$\begin{cases}x=a\sin\varphi,\\ y=0,\quad(0\leqslant\varphi\leqslant\pi)\\ z=a\cos\varphi\end{cases}$$

绕 z 轴旋转所得,故球面方程为

$$\begin{cases}x=a\sin\varphi\cos\theta,\\ y=a\sin\varphi\sin\theta,\quad(0\leqslant\varphi\leqslant\pi,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi).\\ z=a\cos\varphi\end{cases}$$

2. 空间曲线的投影与投影曲线的方程

以曲线 C 为准线、母线平行于 z 轴的柱面称为曲线 C 关于 xOy 坐标面的投影柱面.其与 xOy 坐标面的交线称为空间曲线 C 在 xOy 坐标面上的**投影曲线**,简称**投影**.类似地,可以定义曲线 C 在其他坐标面上的投影.

在重积分和曲面积分的计算中,常常需要确定这样的投影曲线.事实上,往往通过投影柱面的方程来确定投影曲线.

设空间曲线 C 的一般方程为 $\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\ G(x,y,z)=0,\end{cases}$ 将方程组消去变量 z,得方程 $H(x,y)=0$.该方程表示曲线 C 关于 xOy 坐标面的投影柱面.

一方面,方程 $H(x,y)=0$ 表示一个母线平行于 z 轴的柱面;另一方面,$H(x,y)=0$ 由原方程组消去变量 z 所得.因此,当 (x,y,z) 满足原方程组时,(x,y) 必满足方程 $H(x,y)=0$.这说明曲线 C 上的所有点都在方程 $H(x,y)=0$ 所表示的柱面上,即曲线 C 位于该柱面上.因此,方程 $H(x,y)=0$ 表示的柱面就是曲线 C 关于 xOy 坐标面的投影柱面.

曲线 C 在 xOy 坐标面上的投影曲线的方程为

$$\begin{cases}H(x,y)=0,\\ z=0.\end{cases}$$

类似地，消去方程组中的 x，得到在 yOz 坐标面上曲线的投影方程 $\begin{cases}R(y,z)=0,\\x=0.\end{cases}$ 消去 y，得到在 zOx 坐标面上曲线的投影方程 $\begin{cases}T(x,z)=0,\\y=0.\end{cases}$

例 10 分别求曲线 $\begin{cases}2x^2+y^2+z^2=16,\\x^2-y^2+z^2=0\end{cases}$ 关于 yOz 坐标面和 zOx 坐标面的投影柱面方程.

解 （1）$\begin{cases}2x^2+y^2+z^2=16,\\x^2-y^2+z^2=0\end{cases}$ 中消去 x，得 $3y^2-z^2=16$，这就是所求母线平行于 x 轴且通过该曲线的柱面方程，即为 yOz 坐标面上的投影柱面方程.

（2）$\begin{cases}2x^2+y^2+z^2=16,\\x^2-y^2+z^2=0\end{cases}$ 中消去 y，得 $3x^2+2z^2=16$，这就是所求母线平行于 y 轴且通过该曲线的柱面方程，即为 zOx 坐标面上的投影柱面方程.

例 11 求螺旋线 $\begin{cases}x=a\cos\theta,\\y=a\sin\theta,\\z=b\theta\end{cases}$ 在三个坐标面上的投影曲线方程.

解 （1）由 $\begin{cases}x=a\cos\theta,\\y=a\sin\theta\end{cases}$ 得 $x^2+y^2=a^2$，则螺旋线在 xOy 坐标面上的投影曲线方程为 $\begin{cases}x^2+y^2=a^2,\\z=0.\end{cases}$

（2）由 $\begin{cases}y=a\sin\theta,\\z=b\theta\end{cases}$ 得 $y=a\sin\dfrac{z}{b}$，则螺旋线在 yOz 坐标面上的投影曲线方程为 $\begin{cases}y=a\sin\dfrac{z}{b},\\x=0.\end{cases}$

（3）由 $\begin{cases}x=a\cos\theta,\\z=b\theta\end{cases}$ 得 $x=a\cos\dfrac{z}{b}$，则螺旋线在 zOx 坐标面上的投影曲线方程为 $\begin{cases}x=a\cos\dfrac{z}{b},\\y=0.\end{cases}$

例 12 求上半球 $0\leqslant z\leqslant\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 与圆柱体 $x^2+y^2\leqslant ax\,(a>0)$ 的公共部分在 xOy 坐标面和 zOx 坐标面上的投影（见图 1-50）.

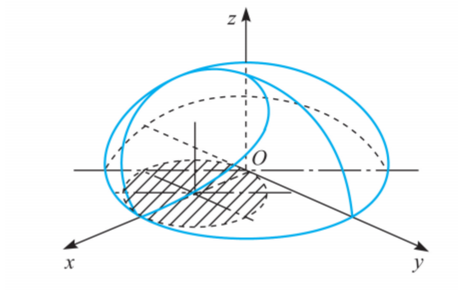


图 1-50

解 （1）由 $\begin{cases}z=\sqrt{a^2-x^2-y^2},\\x^2+y^2=ax\end{cases}$ 可知，在 xOy 坐标面上的投影曲线方程为 $\begin{cases}\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{a^2}{4},\\z=0.\end{cases}$ 而立体在 xOy 坐标面上的投影为 $\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+y^2\leqslant\dfrac{a^2}{4}$，$z=0$.

（2）由$\begin{cases} z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}, \\ x^2+y^2\leqslant ax \end{cases}$可知，在 zOx 坐标面上的投影应满足：存在 y 使得 $x^2+y^2+z^2\leqslant a^2$ 且 $x^2+y^2\leqslant ax$. 因此立体在 zOx 坐标面上的投影为 $x^2+z^2\leqslant a^2, x\geqslant 0, z\geqslant 0, y=0$.

习题 1.4

1. 已知两点 $A(1,2,3)$，$B(2,-1,4)$，求线段 AB 的垂直平分面的方程.

2. 方程 $x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z=0$ 表示何种曲面？

3. 求按下列方式生成的旋转曲面的方程：

（1）将 zOx 坐标面上的抛物线 $z^2=5x$ 绕 x 轴旋转一周；

（2）将 zOx 坐标面上的圆 $x^2+z^2=4$ 绕 z 轴旋转一周；

（3）将 xOy 坐标面上的椭圆 $4x^2+9y^2=36$ 分别绕 x 轴和 y 轴旋转一周.

4. 说明下列旋转曲面是怎样形成的.

（1）$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{4}=1$；　　（2）$x^2+y^2-\dfrac{z^2}{9}=1$；

（3）$x^2-y^2+z^2=1$；　　（4）$(z-2)^2=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{2}$.

5. 画出下列方程所表示的曲面，并指出其名称.

（1）$9x^2+y^2-z^2=9$；　　（2）$x^2-9y^2-z^2=9$；

（3）$\dfrac{z}{2}=\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}$；　　（4）$4x^2-9y^2-16z^2=-25$.

6. 画出下列曲面所围成的区域.

（1）由曲面 $z=2x^2+y^2$ 与 $z=3-x^2$ 围成的封闭区域；

（2）由双曲抛物面 $cz=xy(c>0)$ 与椭圆柱面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 围成的封闭区域.

7. 画出下列方程所表示的曲面，并分别说明在平面解析几何与空间解析几何中的图形意义.

（1）$y=-2$；　　（2）$x^2+(y-6)^2=36$；

（3）$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$；　　（4）$-\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$；

（5）$4z=4-y^2$；　　（6）$y=\dfrac{1}{x}$.

8. 一动点到定点 $(2,3,1)$ 和 $(4,5,6)$ 的距离相等，求该点的轨迹方程.

9. 将 xOy 坐标面上的抛物线 $y^2=5x$ 绕 x 轴旋转一周，求所生成的旋转曲面的方程.

10. 说明下列方程组表示的曲线.

（1）$\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ 2x+3y+3z=6; \end{cases}$　　（2）$\begin{cases} z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}, \\ \left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{a^2}{4}. \end{cases}$

11. 试求螺旋线$\begin{cases} x=a\cos\theta, \\ y=a\sin\theta, \\ z=b\theta \end{cases}$的一般方程.

12. 将下列曲线的一般方程化为参数方程.

（1）$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=9, \\ y=x; \end{cases}$　　（2）$\begin{cases} (x-1)^2+y^2+(z+1)^2=4, \\ z=0. \end{cases}$

13. 求旋转抛物面 $z=x^2+y^2(0\leqslant z\leqslant 4)$ 在三个坐标面上的投影.

14. 求抛物面 $y^2+z^2=x$ 与平面 $x+2y-z=0$ 的截线在三个坐标面上的投影柱面方程.

15. 已知空间曲线 $\begin{cases}y^2+z^2-2x=0,\\ z=3,\end{cases}$ 求其在 xOy 坐标面上的投影曲线方程,并指出该空间曲线的类型.

16. 求曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1,\\ z=\dfrac{1}{2}\end{cases}$ 在三个坐标面上的投影曲线方程.

本章小结

1. 基本内容

(1)本章总结了空间解析几何中的基本概念,包括向量及其方向余弦、向量在坐标轴上的投影,以及直线、平面与曲面的方程. 平面、直线和曲面的常见方程形式如表 1-1 所示.

表 1-1

方程形式		说明
平面方程	点法式方程	$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$,其中$(x_0,y_0,z_0)$为平面上一点,$\boldsymbol{n}=(A,B,C)$为平面的法向量
	一般式方程	$Ax+By+Cz+D=0$,$\boldsymbol{n}=(A,B,C)$为平面的法向量
	截距式方程	$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$,其中 a,b,c 依次为平面在 x,y,z 轴上的截距
	三点式方程	$\begin{vmatrix}x-x_1 & y-y_1 & z-z_1\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}=0$,其中 $M_1(x_1,y_1,z_1)$,$M_2(x_2,y_2,z_2)$,$M_3(x_3,y_3,z_3)$为平面上的三点
直线方程	对称式方程	$\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$,其中$(x_0,y_0,z_0)$为直线上的定点,$\boldsymbol{s}=(m,n,p)$为直线的方向向量
	参数方程	$\begin{cases}x=x_0+mt,\\ y=y_0+nt,\\ z=z_0+pt,\end{cases}$ 其中(x_0,y_0,z_0)为直线上的定点,$\boldsymbol{s}=(m,n,p)$为直线的方向向量,t 为参数
	一般方程	$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,\end{cases}$其中 $\boldsymbol{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$,$\boldsymbol{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$分别为两个平面的法向量
曲面方程	旋转曲面方程	$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$,曲线 $f(y,z)=0$ 绕 z 轴旋转;$f(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0$,曲线 $f(y,z)=0$ 绕 y 轴旋转. 对于其他坐标面上的母线绕坐标轴旋转生成的旋转曲面,可用上述类似方法求得
	柱面方程	$F(y,z)=0$,母线平行于 x 轴;$F(x,z)=0$,母线平行于 y 轴;$F(x,y)=0$,母线平行于 z 轴
	二次曲面方程	二次曲面包括九种

(2)掌握两个平面之间、两条直线之间及平面与直线之间的关系.

①两个平面的关系(见表 1-2). 设平面 Π_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$，平面 Π_2 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$.

表 1-2

平 面 关 系	说 明
两平面相交	$\frac{A_1}{A_2},\frac{B_1}{B_2},\frac{C_1}{C_2}$不成比例($\boldsymbol{n}_1$ 与 $\boldsymbol{n}_2$ 不共线)
两平面垂直	$\boldsymbol{n}_1\perp\boldsymbol{n}_2\Leftrightarrow\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=0\Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$
两平面平行	$\boldsymbol{n}_1=\lambda\boldsymbol{n}_2(\lambda\neq0)\Leftrightarrow\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$
两平面重合	存在 $\lambda\neq0$，使$(A_1,B_1,C_1,D_1)=\lambda(A_2,B_2,C_2,D_2)$

注：比例式中默认分母不为零. 实际应用中，宜优先采用向量条件(点积、叉积)判定，以避免分母为零的讨论.

②两条直线之间的关系(见表 1-3). 设直线 L_1 的方向向量为 $\boldsymbol{s}_1=(m_1,n_1,p_1)$，直线 L_2 的方向向量为 $\boldsymbol{s}_2=(m_2,n_2,p_2)$，分别取直线上的点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$.

表 1-3

直 线 关 系	说 明
异面(不相交且不平行)	$\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2\neq\boldsymbol{0}$，且 $\overrightarrow{M_1M_2}\cdot(\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2)\neq0$
相交但不垂直	$\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2\neq\boldsymbol{0}$，$\overrightarrow{M_1M_2}\cdot(\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2)=0$，且 $\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2\neq0$
相交且垂直	$\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2\neq\boldsymbol{0}$，$\overrightarrow{M_1M_2}\cdot(\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2)=0$，且 $\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2=0$
平行	$\boldsymbol{s}_1/\!/\boldsymbol{s}_2$，即 $\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2=\boldsymbol{0}$
重合	$\overrightarrow{M_1M_2}/\!/\boldsymbol{s}_1/\!/\boldsymbol{s}_2$

③平面与直线的关系(见表 1-4). 设平面 Π：$Ax+By+Cz+D=0$，其法向量为 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$. 设直线 L：$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$，其方向向量为 $\boldsymbol{s}=(m,n,p)$，直线上一点为 $M_0(x_0,y_0,z_0)$.

表 1-4

平面与直线的关系	说 明
相交但不垂直	$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{s}\neq0$
直线与平面垂直	$\boldsymbol{n}/\!/\boldsymbol{s}$，即 $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{s}=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{s}\neq\boldsymbol{0}$
直线与平面平行	$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{s}=0$，且 $Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq0$
直线位于平面上	$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{s}=0$，且 $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$

(3)要会求两平面之间、两直线之间及直线与平面之间的夹角.

①两平面 Π_1，Π_2 的夹角 $\theta\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$满足

$$\cos\theta=|\cos(\widehat{\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2})|=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}},$$

其中 $\boldsymbol{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$，$\boldsymbol{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$分别为平面 Π_1，Π_2 的法向量.

②两直线 L_1, L_2 的夹角 $\varphi\left(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$满足

$$\cos\varphi=|\cos(\widehat{\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2})|=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}},$$

其中 $\boldsymbol{s}_1=(m_1,n_1,p_1)$，$\boldsymbol{s}_2=(m_2,n_2,p_2)$分别为直线 L_1, L_2 的方向向量.

③直线 L 与平面 Π 的夹角 $\varphi\left(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$满足

$$\sin\varphi=|\cos(\widehat{\boldsymbol{s},\boldsymbol{n}})|=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}},$$

其中 $\boldsymbol{s}=(m,n,p)$为直线的方向向量，$\boldsymbol{n}=(A,B,C)$为平面的法向量.

(4)掌握点到平面的距离公式和点到直线的距离公式.

①点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离为

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

②点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$到直线 $L:\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}$的距离为 $d=\frac{|\overrightarrow{M_0M_1}\times\boldsymbol{s}|}{|\boldsymbol{s}|}$，其中 $M_1(x_1,y_1,z_1)$为直线 L 上任意一点，$\boldsymbol{s}=(m,n,p)$为直线 L 的方向向量.

2. 重点

(1)向量的线性运算、点积、叉积的概念及坐标表示.

(2)两个向量垂直和平行的条件.

(3)平面方程和直线方程.

(4)平面与平面、平面与直线、直线与直线之间位置关系的判定条件.

(5)常用二次曲面的方程及其图形.

(6)旋转曲面及母线平行于坐标轴的柱面方程.

3. 难点

(1)叉积的概念及坐标表示.

(2)空间曲线在坐标面上的投影柱面和投影曲线方程.

(3)二次曲面图形.

应用拓展

例 1 求以 $A(3,0,2)$，$B(5,3,1)$，$C(0,-1,3)$三点为顶点的三角形面积.

解 由叉积的定义可知，三角形 ABC 的面积为

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin\angle A=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|.$$

由于

$$\overrightarrow{AB}=(2,3,-1),\quad \overrightarrow{AC}=(-3,-1,1),$$

所以

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&3&-1\\-3&-1&1\end{vmatrix}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k}.$$

于是

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k}|=\frac{1}{2}\sqrt{2^2+1^2+7^2}=\frac{3}{2}\sqrt{6}.$$

例 2 求过点$(-1,0,4)$，且平行于平面$3x-4y+z-10=0$，又与直线$\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{2}$相交的直线方程.

解 设所求直线方程为

$$\frac{x+1}{m}=\frac{y-0}{n}=\frac{z-4}{p}.$$

因为所求直线平行于平面$3x-4y+z-10=0$，所以

$$3m-4n+p=0.$$

又由于所求直线与直线$\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{2}$相交，故有

$$\begin{vmatrix} -1-(-1) & 0-3 & 4-0 \\ 1 & 1 & 2 \\ m & n & p \end{vmatrix}=0,$$

即

$$10m-4n-3p=0.$$

由

$$\begin{cases} 3m-4n+p=0, \\ 10m-4n-3p=0 \end{cases}$$

得

$$\frac{16}{m}=\frac{19}{n}=\frac{28}{p}.$$

故所求直线方程为

$$\frac{x+1}{16}=\frac{y}{19}=\frac{z-4}{28}.$$

例 3 某汽车制造厂使用六轴工业机器人进行车身点焊作业. 机器人末端焊枪需沿车身板件上的一条直线焊缝移动. 已知焊缝起点为$A(1,2,3)$，终点为$B(4,-3,4)$. 焊缝所在平面与板件表面相切，其法向量为$\boldsymbol{n}=(2,1,-1)$.

(1)求过点A且法向量为$\boldsymbol{n}$的平面方程；

(2)验证点B是否在该平面上.

解 (1)由平面点法式方程，得

$$2(x-1)+(y-2)-(z-3)=0,$$

即

$$2x+y-z-1=0.$$

(2)将$B(4,-3,4)$代入平面方程，得$2\times4+(-3)-4-1=0$，等式成立，因此点B在该平面上.

复习题

A 基础题

1. 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为非零向量，判断下列各式在什么条件下成立：

(1) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$； (2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2$；

(3) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$； (4) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}$.

2. 设 $\boldsymbol{a}=(1,4,5)$，$\boldsymbol{b}=(1,1,2)$.

(1)求 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$； (2)求 λ，使 $\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$ 垂直于 $\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b}$.

3. 设 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，其中 $\boldsymbol{a}=(3,-5,8)$，$\boldsymbol{b}=(-1,1,z)$，求 z.

4. 设 $\boldsymbol{a}=(2,-1,-2)$，$\boldsymbol{b}=(1,1,z)$. 问 z 为何值时，$\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$取得最小值？并求该最小值.

5. 已知三角形 ABC 的顶点分别为 $A(1,1,1)$，$B(2,2,1)$，$C(2,1,2)$，求三角形 ABC 的面积.

6. 设 $|\boldsymbol{a}|=4$，$|\boldsymbol{b}|=3$，$\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\frac{\pi}{6}$，求以 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积.

7. 设 $\boldsymbol{a}=(1,1,1)$，$\boldsymbol{b}=(1,2,1)$，$\boldsymbol{c}=(1,1,2)$，$\boldsymbol{h}=(3,2,1)$.

(1)判断 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 是否共面；

(2)求 x,y,z，使 $\boldsymbol{h}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}$.

8. 求顶点在原点、准线为 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{8}+\frac{z^2}{3}=1,\\ y=2\end{cases}$ 的锥面方程.

9. 求曲线 $\begin{cases}x^2+y^2=1,\\ x+y+z=0\end{cases}$ 的参数方程.

10. 求两球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 和 $x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$ 的交线 L 在 xOy 坐标面上的投影.

11. 求过点$(-1,0,4)$，且平行于平面 $3x-4y+z-10=0$，并与直线$\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{2}$相交的直线方程.

12. 求两平行平面 $3x+6y-2z-7=0$ 和 $3x+6y-2z+14=0$ 之间的距离.

13. 直线 $\begin{cases}x=1,\\ y=t,\ (t\in\mathbf{R})\\ z=t\end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周，求旋转曲面的方程.

14. 求过点 $M(1,2,5)$，与直线 L_1：$\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-5}{2}$相交，且与向量 $\boldsymbol{j}=(0,1,0)$ 成$\frac{\pi}{4}$角的直线 L 的方程.

15. 设一平面垂直于平面 $z=0$，且通过从点$(1,-1,1)$向直线$\begin{cases}y-z+1=0,\\ x=0\end{cases}$所作的垂线，求该平面的方程.

16. 求过直线$\begin{cases}x+28y-2z+17=0,\\ 5x+8y-z+1=0\end{cases}$且与球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 相切的平面方程.

17. 已知直线 L：$\frac{x+2}{1}=\frac{y-2}{7}=\frac{z}{5}$，求：

(1)L 在平面 $z=1$ 上的投影 L_1 的方程；

(2)点 $M(1,2,1)$到 L_1 的距离.

B 提高题

1. 设 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$.

(1)若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$,能否推出 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$?

(2)若 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$,能否推出 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$?

(3)若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$ 且 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$,能否推出 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$?

2. 设 $(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\perp(7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b})$,$(\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})\perp(7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$,求 $\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$.

3. 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为非零向量,且 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$,$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$,求 $|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{c}|$.

4. 已知点 $A(1,0,0)$,$B(0,2,1)$,在 z 轴上求一点 C,使三角形 ABC 的面积最小.

5. 求直线 $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{-1}$ 在平面 $x-y+2z-1=0$ 上的投影直线 L_0 的方程,并求 L_0 绕 y 轴旋转一周所生成曲面的方程.

6. 求通过点 $A(3,0,0)$ 和 $B(0,0,1)$,且与 xOy 坐标面成 $\frac{\pi}{4}$ 角的平面方程.

7. 求 λ,使直线 $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{\lambda}$ 与直线 $\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1}$ 相交.

8. 求过直线 L_1:$\frac{x-2}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-3}{2}$ 和 L_2:$\frac{x-1}{-1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{1}$ 的平面方程.

9. 求 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 与 $x^2+y^2+(z-R)^2=R^2$ 所围立体在 xOy 坐标面上的投影.

10. 求直线 $\begin{cases}2x-4y+z=0,\\3x-y-2z-9=0\end{cases}$ 在平面 $4x-y+z=1$ 上的投影直线的方程.

11. 一平面通过 z 轴,且与平面 $2x+y-\sqrt{5}z=0$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$,求该平面的方程.

12. 在一切过直线 L:$\begin{cases}x+y+z+1=0,\\2x+y+z=0\end{cases}$ 的平面中,求平面 Π,使原点到它的距离为最大.

13. 求直线 L_1:$\frac{x-3}{1}=\frac{y-5}{-2}=\frac{z-7}{1}$ 和 L_2:$\begin{cases}x=z,\\y=-6z-7\end{cases}$ 之间的距离.

14. 指出下列旋转曲面的一条母线和旋转轴:

(1)$z=2(x^2+y^2)$;　　　(2)$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{36}=1$.

15. 求以 $\begin{cases}y=x^2,\\z=0\end{cases}$ 为准线,母线平行于向量(1,2,1)的柱面方程.

16. 将空间曲线的方程 $\begin{cases}x^2+y^2=a^2,\\z=x^2-y^2\end{cases}$ 化为参数方程.

17. 将直线的方程 $\begin{cases}x+2y-z-2=0,\\x+y-3z-7=0\end{cases}$ 化为对称式方程.

18. 画出下列曲面所围立体的图形:

(1) $x=0,y=0,z=0,x^2+y^2=R^2,y^2+z^2=R^2$(在第Ⅰ卦限内);

(2)半径为 a 的球面与半顶角为 α 的圆锥面所围成的立体;

(3)球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 与抛物面 $x^2+y^2=3z$ 所围成的在抛物面内的部分;

(4)曲线 $y^2=2x,z=0$ 绕 z 轴旋转一周所得曲面与平面 $z=2,z=8$ 所围成的立体.