策划编辑：刘桂君
责任编辑：谭宏微
封面设计：蒋碧君

• 广西普通高等教育专升本考试(文化课) •

| | |
|---|---|
| 专用教材 | 语文 |
| | 数学 |
| | 英语 |
| 决胜好题 | 语文 |
| | **数学** |
| | 英语 |
| 考前冲刺卷 | 语文 |
| | 数学 |
| | 英语 |

扫码获取超值资源

ISBN 978-7-5635-7857-3

定价：49.80元

广西普通高等教育专升本考试决胜好题·数学
华腾新思专升本考试研究中心 主编
北京邮电大学出版社

华腾新思

依据最新版《广西普通高等教育专升本考试大纲与说明》编写

# 广 西

华腾新思专升本考试研究中心 主编

## 普通高等教育专升本考试决胜好题

# 数 学

北京邮电大学出版社
www. buptpress. com

依据最新版《广西普通高等教育专升本考试大纲与说明》编写

# 广西

华腾新思专升本考试研究中心　主编

## 普通高等教育专升本考试决胜好题

# 数学

北京邮电大学出版社
www. buptpress. com

## 内容简介

本书专为参加专升本考试的考生编写。为了使广大考生切实提高实战能力，本书编者研究了普通高等教育专升本考试大纲与说明，参照例题的难度和题型，秉持精益求精的态度，精心编写了《广西普通高等教育专升本考试决胜好题·数学》。本书将各考点下面的试题按照难度分为“刷基础”和“刷提升”两部分，并结合考试特点配备了详细且实用的解析，以帮助考生掌握答题角度和做题方法，积累备考材料。

本书既可作为参加普通高校专升本考试的考生的复习资料，也可作为广大专科学校学生的学习资料。

**图书在版编目（CIP）数据**

广西普通高等教育专升本考试决胜好题. 数学 / 华腾新思专升本考试研究中心主编. -- 北京 : 北京邮电大学出版社, 2026. -- ISBN 978-7-5635-7857-3

Ⅰ. G724.4

中国国家版本馆 CIP 数据核字第 2026SY4439 号

**策划编辑**：刘桂君　**责任编辑**：谭宏微　**封面设计**：蒋碧君

**出版发行**：北京邮电大学出版社
**社　　址**：北京市海淀区西土城路 10 号
**邮政编码**：100876
**发 行 部**：电话：010-62282185　传真：010-62283578
**E-mail**：publish@bupt.edu.cn
**经　　销**：各地新华书店
**印　　刷**：三河市骏杰印刷有限公司
**开　　本**：880 mm×1 230 mm　1/16
**印　　张**：10
**字　　数**：293 千字
**版　　次**：2026 年 4 月第 1 版
**印　　次**：2026 年 4 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5635-7857-3　　定　价：49.80 元

# 前言

专升本考试，即普通高等学校专升本考试，是以省（区、市）为单位组织的选拔性考试。普通高等学校应、往届专科毕业生参加该考试，通过后即可进入本科院校继续深造。近年来，随着我国职业教育改革的不断深化，专升本考试受到越来越多考生的青睐，成为他们提升学历、拓宽就业渠道、增强职业竞争力的重要途径。

为帮助广大考生高效复习、快速提分，我们组织专升本领域具有丰富经验的专家，精心编写了这套“广西普通高等教育专升本考试决胜好题”。

本书是专门针对专升本考试数学科目编写的，具有以下显著特色。

### ◎高标准选题

我们精研考纲考情，依托培训及教学的丰富经验，广泛收集海量试题，坚持高标准、严要求，选好题，选常考题，选有代表性的题，确保把高质量的精品试题呈现给考生。

### ◎分层次布局

我们遵循考生的学习规律，按照先易后难、先基础后提升的思路组织内容，将各部分的试题分为“刷基础”“刷提升”两个板块，帮助考生循序渐进地实现突破。

### ◎容量足够大

本书内容丰富，涵盖数学科目考试的各种常见题型和常考知识点，题目总量近 2 000 道。“一本在手，训练足够”，充分满足考生的刷题需求。

### ◎解析超实用

本书附赠独立的“参考答案及解析”册，便于考生检测刷题效果；其从答案、考查点、答题思路、作答技巧等角度对试题进行全方位解析，能够真正提升考生的考试能力。

做决胜好题，共圆本科梦！

伙伴们，拿起这本书，向着目标，一起冲冲冲！

**华腾新思专升本考试研究中心**

# 目录

# 第一章 函数、极限与连续

## 第一节 函　　数

### 刷基础

试题难度：★★　　刷题用时：______分钟　　答案索引：P1

#### 一、单项选择题

1. 函数 $y=\sqrt{1-x}+\sqrt{x}$ 的定义域是(　　).

A. $\{x\mid x\leqslant 1\}$　　B. $\{x\mid x\geqslant 0\}$　　C. $\{x\mid x\geqslant 1$ 或 $x\leqslant 0\}$　　D. $\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 1\}$

2. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{\ln(x-1)}+\sqrt{9-x}$ 的定义域为(　　).

A. $(1,9)$　　B. $(1,9]$　　C. $(1,2)\cup(2,9)$　　D. $(1,2)\cup(2,9]$

3. 函数 $f(x)=\sqrt{x-3}+\arctan\dfrac{1}{x}$ 的定义域是(　　).

A. $(-\infty,+\infty)$　　B. $[0,3]$　　C. $(-\infty,0)\cup(0,3)$　　D. $[3,+\infty)$

4. 函数 $y=\sqrt{x-1}+\lg(2-x)$ 的定义域是(　　).

A. $(1,2)$　　B. $[1,4]$　　C. $[1,2)$　　D. $(1,2]$

5. 函数 $f(x)=\sqrt{2^x-1}+\dfrac{1}{x-1}$ 的定义域为(　　).

A. $[0,1)$　　B. $(1,+\infty)$

C. $[0,1)\cup(1,+\infty)$　　D. $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$

6. 函数 $f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}, & 0\leqslant x<1,\\ 1+x, & |x|\geqslant 1\end{cases}$ 的定义域是(　　).

A. $(-\infty,-1)\cup[0,1)$　　B. $(-\infty,-1]\cup[0,+\infty)$

C. $[-1,1]$　　D. $[0,+\infty)$

7. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 1,\\ x+\dfrac{6}{x}-6, & x>1,\end{cases}$ 则 $f[f(-3)]=$(　　).

A. $\dfrac{11}{3}$　　B. 9　　C. $\dfrac{2}{3}$　　D. 6

8. 下列函数中，定义域和值域分别与函数 $y=10\lg x$ 的值域和定义域相同的是(　　).

A. $y=x$　　B. $y=\lg x$　　C. $y=2^x$　　D. $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$

9. 设 $f(x-a)=x(x-a)$($a$ 为大于零的常数)，则 $f(x)=$(　　).

A. $x(x-a)$　　B. $x(x+a)$　　C. $(x-a)(x+a)$　　D. $(x-a)^2$

10. 设函数 $f(3x+2)=9x+5$，则 $f(x)$的表达式是(　　).

A. $3x+1$　　B. $3x-1$　　C. $9x+1$　　D. $9x-1$

11. 已知 $f\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=\frac{1-x^2}{1+x^2}$，那么 $f(x)$的解析式可取为(　　).

A. $\frac{x}{1+x^2}$　　B. $\frac{-2x}{1+x^2}$　　C. $\frac{2x}{1+x^2}$　　D. $\frac{-x}{1+x^2}$

12. 下列函数中，在$(-\infty,0)$上单调递增的是(　　).

A. $y=x^2$　　B. $y=\sin x$　　C. $y=x$　　D. $y=|x|$

13. 已知 $f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且当 $x<0$ 时，$f(x)=3^x$，则 $f(1)$的值为(　　).

A. $-3$　　B. 3　　C. $-\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{3}$

14. 已知函数 $f(x)=(x+3)(x-a)$是偶函数，函数 $g(x)=x^3+4\sin x+b+2$ 是奇函数，则 $a+b$ 的值为(　　).

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

15. 设 $f(x)$是周期为 2 的奇函数，且当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f(x)=2x(1-x)$，则 $f\left(-\frac{5}{2}\right)=$(　　).

A. $-\frac{1}{2}$　　B. $-\frac{1}{4}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{1}{2}$

16. 函数 $f(x)=2\cos^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-1$ 是(　　).

A. 最小正周期为 $\pi$ 的偶函数　　B. 最小正周期为$\frac{\pi}{2}$的偶函数

C. 最小正周期为 $\pi$ 的奇函数　　D. 最小正周期为$\frac{\pi}{2}$的奇函数

17. 下列函数中，最小正周期为$\frac{\pi}{2}$，并且图像关于 $y$ 轴对称的是(　　).

A. $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$　　B. $y=\sin\left(4x+\frac{\pi}{2}\right)$

C. $y=\cos\left(4x+\frac{\pi}{2}\right)$　　D. $y=\sin 2x+\cos 2x$

18. 函数 $f(x)=4^x$ 和 $g(x)=\log_4 x$ 的图像(　　).

A. 关于 $x$ 轴对称　　B. 关于 $y$ 轴对称

C. 关于原点对称　　D. 关于直线 $y=x$ 对称

19. 记函数 $f(x)$的反函数为 $f^{-1}(x)$. 若 $f(x)=\log_3 x$，则 $f^{-1}(-1)=$(　　).

A. $-3$　　B. $-\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. 3

20. 设函数 $y=2+\ln(x+3)$，则此函数的反函数是(　　).

A. $y=e^{2x+3}-3$　　B. $y=e^{x-2}-3$　　C. $x=\ln(y-2)-3$　　D. $y=\ln(x-2)-3$

## 二、填空题

1. 函数 $f(x)=\sqrt{1-\log_3 x}$ 的定义域为____________.

2. 函数 $f(x)=\sqrt{\frac{x}{3}-1}$ 的定义域为____________.

3. 设函数 $f(x)$ 的定义域是 $[-2,1]$,则函数 $f(3x-5)$ 的定义域是____________.

4. 设 $f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$,则 $f(9x^2)$ 的定义域是____________.

5. $\lg\sqrt{2}+\lg\sqrt{5}+2^0+(5^{\frac{1}{3}})^2\times\sqrt[3]{5}=$____________.

6. 设函数 $f(x)=\begin{cases}1+\log_2(1-x), & x<1,\\ 2^{x-2}, & x\geqslant 1,\end{cases}$ 则 $f(-1)+f(\log_2 4)=$____________.

7. 若函数 $y=\frac{m-1}{x}(x<0)$ 是减函数,则 $m$ 的取值范围是____________.

8. 已知 $y=f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的周期为 4 的奇函数,且当 $0<x<2$ 时,$f(x)=\ln x+x$,则 $f(2\ 019)=$____________.

9. 设函数 $f(x)$ 是周期为 5 的奇函数,当 $0<x\leqslant 2$ 时,$f(x)=2^x-3$,则 $f(2\ 013)=$____________.

10. 若函数 $f(x)=x(x+a)$ 为偶函数,则 $a=$____________.

11. 函数 $y=a^x(0<a<1)$ 在 $[1,2]$ 上的最大值为 $m$,最小值为 $n$,且 $m+n=\frac{3}{4}$,则 $a$ 的值是____________.

12. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,且当 $x\geqslant 0$ 时,$f(x)=\log_2(x+1)+m+1$,则 $f(-3)=$____________.

## 三、解答题

1. 求函数 $y=\sqrt{x+3}$ 的定义域.

2. 求函数 $y=\frac{1}{x+2}$ 的定义域.

3. 求函数 $y=\ln(x-1)$ 的定义域.

4.已知函数 $f(x)$的定义域为$[-1,3]$,求 $f(x+1)$,$f(x^2)$的定义域.

5.已知 $f(\sqrt{x}+1)=x+2\sqrt{x}$,求 $f(x+1)$的解析式.

6.已知 $f(x)=x^2+2$,$g(x)=\begin{cases}-x+2, & x<1,\\ x, & x\geqslant 1,\end{cases}$ 求 $g[f(x)]$和 $f[g(x)]$的解析式.

7.已知 $f(x)$是一次函数,且 $f[f(x)]=4x+3$,求 $f(x)$的解析式.

8.下列函数是由哪些较简单的函数复合而成的?

(1)$y=\mathrm{e}^{-x}$;　(2)$y=\sin^2(1+2x)$;　(3)$y=\arccos\sqrt{\tan(a^2+x^2)}$.

9.求函数 $y=\dfrac{ax+5}{x+2}$的反函数.

10. 求函数 $y=\frac{3x-5}{2x+1}$ 的反函数.

11. 已知函数 $y=f(x)$ 是增函数,且存在反函数 $y=f^{-1}(x)$. 证明:反函数 $y=f^{-1}(x)$ 是增函数.

12. 判断函数 $f(x)=-x^3+1$ 的单调性.

13. 判断下列函数的奇偶性.

(1) $f(x)=x^2(1+x^2)$;

(2) $f(x)=x(x+1)(x-1)$.

14. 求函数 $y=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$, $x\in[1,+\infty)$ 的反函数.

## 刷提升

试题难度：★★★　　刷题用时：______分钟　　答案索引：P4

### 一、单项选择题

1. 函数 $f(x)=\sqrt{x-3}+\arcsin\dfrac{1}{x}$ 的定义域是(　　).

A. $(-\infty,+\infty)$　　B. $[1,3]$　　C. $(-\infty,0)\cup(0,3)$　　D. $[3,+\infty)$

2. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$ 若 $a\neq b$，则 $\dfrac{a+b+(a-b)f(a-b)}{2}$ 的值是(　　).

A. $a$　　B. $b$　　C. $a,b$ 中较大的数　　D. $a,b$ 中较小的数

3. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，且在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，则(　　).

A. $f(-3)<f(-\log_3 13)<f(2^{0.6})$　　B. $f(-3)<f(2^{0.6})<f(-\log_3 13)$

C. $f(2^{0.6})<f(-\log_3 13)<f(-3)$　　D. $f(2^{0.6})<f(-3)<f(-\log_3 13)$

4. 已知 $f(x)$ 是定义在 $[-2,0]$ 上的增函数，则满足 $f(x^2-x-2)>f(1-x)$ 的 $x$ 的取值范围是(　　).

A. $(-\infty,-\sqrt{3}]\cup[\sqrt{3},+\infty)$　　B. $[1,2]$

C. $[-\sqrt{3},0]$　　D. $(\sqrt{3},2]$

5. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数. 若 $f(x)$ 的最小正周期为 4，且 $f(1)>0$，$f(3)=\dfrac{m-3}{m+1}$，则 $m$ 的取值范围是(　　).

A. $(-3,1)$　　B. $(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$

C. $(-1,3)$　　D. $(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$

6. 已知 $f(x)=\dfrac{a+bx}{c+x}$ ($a,b,c$ 是常数)的反函数为 $f^{-1}(x)=\dfrac{3x+5}{x-2}$，则(　　).

A. $a=2,b=5,c=3$　　B. $a=5,b=2,c=-3$

C. $a=5,b=3,c=-2$　　D. $a=5,b=-2,c=3$

7. 下列关于幂函数的命题中，真命题是(　　).

A. 不存在非奇非偶的幂函数

B. 若一个幂函数是奇函数，则它的图像一定过原点

C. 若幂函数的图像不过点 $(-1,1)$，则它一定不是偶函数

D. 若两个幂函数的图像有 3 个不同的公共点，则这两个函数一定是相同的

8. 若在对称区间上 $f(x)$ 为奇函数，$g(x)$ 为偶函数，则以下函数为奇函数的是(　　).

A. $f(x^4)$　　B. $f(x)+g(x)$　　C. $f(x)g(x)$　　D. $-g(-x)$

9. 函数 $f(x)=\ln(\sqrt{1+x^2}-x)$ 在定义域内是(　　).

A. 不确定奇偶性　　B. 偶函数　　C. 非奇非偶函数　　D. 奇函数

10. 设 $f(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 内的奇函数，则函数 $\sin f(x)+\ln(\sqrt{1+x^2}-x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是(　　).

A. 奇函数　　B. 偶函数　　C. 非奇非偶函数　　D. 无法判断

## 二、填空题

1. 已知函数 $f(x)=x^{a}$ 的图像经过点 $\left(3,\dfrac{1}{3}\right)$，则函数 $g(x)=(2x-1)f(x)$ 在区间 $\left[\dfrac{1}{2},2\right]$ 上的最小值为__________.

2. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，且在 $[0,+\infty)$ 上是单调增加的，$f\left(\dfrac{1}{3}\right)=0$，则不等式 $f(\log_{\frac{1}{8}}x)>0$ 的解集为__________.

3. 若 $f(x)=\lg(10^{x}+1)+ax$ 是偶函数，$g(x)=\dfrac{4^{x}-b}{2^{x}}$ 是奇函数，则 $a+b=$__________.

4. 若 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数，$f(x+2)=-\dfrac{1}{f(x)}$，当 $2\leqslant x\leqslant 3$ 时，$f(x)=x$，则 $f\left(-\dfrac{11}{2}\right)=$__________.

5. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 和偶函数 $g(x)$ 满足 $f(x)+g(x)=a^{x}-a^{-x}+4$ $(a>0$，且 $a\neq 1)$，且 $g(2)=a$，则 $f(2)$ 的值为__________.

6. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=x^{2}$. 若对任意的 $x\in[a,a+2]$，$f(x+a)\geqslant f(\sqrt{2}x)$ 恒成立，则 $a$ 的最小值为__________.

7. $y=\dfrac{2^{x}}{2^{x}+1}$ 的反函数是__________.

## 三、解答题

1. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}2-x^{2}, & |x|\leqslant 1,\\ 2, & |x|>1,\end{cases}$ 求 $f[g(x)]$，$g[f(x)]$.

2. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-1,1]$，求 $f(ax)+f\left(\dfrac{x}{a}\right)$ 的定义域，其中 $a>0$.

3. 求函数 $y=\ln(x+\sqrt{x^{2}+1})$ 的反函数.

4. 已知 $f(x)$是偶函数,$g(x)$是奇函数,且 $f(x)+g(x)=\frac{1}{x-1}$,求 $f(x)$和 $g(x)$的解析式.

5. 判断下列函数的单调性.

(1) $f(x)=\frac{1}{1-x},x\in(-\infty,1)$;

(2) $f(x)=x^2-2x,x\in(1,+\infty)$.

6. 已知函数 $f(x)$是定义域为$[-2,2]$的奇函数,且对定义域内任意满足 $a+b\neq0$ 的实数 $a,b$,有$\frac{f(a)+f(b)}{a+b}>0$成立.

(1)判断 $f(x)$在定义域上的单调性,并给出证明;

(2)解不等式 $f(2x-1)\leqslant f(x^2-1)$.

7. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{3}, & -2<x<1,\\ x^2, & 1\leqslant x\leqslant 2,\end{cases}$求其反函数 $f^{-1}(x)$.

# 广西普通高等教育专升本考试

# 决胜好题·数学

# 参考答案及解析

# 第一章　函数、极限与连续

## 第一节　函　　数

### 刷基础

#### 一、单项选择题

答案速查

1—5. DDDCC　6—10. BACBB
11—15. CCCAA　16—20. CBDCB

1. D　**解析**：使根式 $\sqrt{1-x}$ 有意义的实数 $x$ 的集合是 $\{x\mid 1-x\geqslant 0\}=\{x\mid x\leqslant 1\}$，使根式 $\sqrt{x}$ 有意义的实数 $x$ 的集合是 $\{x\mid x\geqslant 0\}$. 因此，函数 $y=\sqrt{1-x}+\sqrt{x}$ 的定义域是 $\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 1\}$.

名师点拨

函数的定义域通常由问题的实际背景确定，如果只给出解析式 $y=f(x)$，而没有指明它的定义域，那么函数的定义域就是指能使这个式子有意义的所有实数的集合.

2. D　**解析**：使 $\dfrac{1}{\ln(x-1)}$ 有意义的实数 $x$ 的集合是 $\{x\mid \ln(x-1)\neq 0\}=\{x\mid x-1>0$ 且 $x-1\neq 1\}=\{x\mid x>1$ 且 $x\neq 2\}$，使根式 $\sqrt{9-x}$ 有意义的实数 $x$ 的集合是 $\{x\mid 9-x\geqslant 0\}=\{x\mid x\leqslant 9\}$，因此，函数 $f(x)$ 的定义域是 $\{x\mid 1<x\leqslant 9$ 且 $x\neq 2\}$，即 $(1,2)\cup(2,9]$.

3. D　**解析**：使根式 $\sqrt{x-3}$ 有意义的实数 $x$ 的集合是 $\{x\mid x-3\geqslant 0\}=\{x\mid x\geqslant 3\}$，使 $\arctan\dfrac{1}{x}$ 有意义的实数 $x$ 的集合是 $\{x\mid x\neq 0\}$. 因此，函数 $f(x)$ 的定义域是 $\{x\mid x\geqslant 3$ 且 $x\neq 0\}$，即 $[3,+\infty)$.

4. C　**解析**：使根式 $\sqrt{x-1}$ 有意义的实数 $x$ 的集合是 $\{x\mid x-1\geqslant 0\}=\{x\mid x\geqslant 1\}$，使对数 $\lg(2-x)$ 有意义的实数 $x$ 的集合是 $\{x\mid 2-x>0\}=\{x\mid x<2\}$. 因此，函数 $y=\sqrt{x-1}+\lg(2-x)$ 的定义域是 $\{x\mid 1\leqslant x<2\}$，即 $[1,2)$.

5. C　**解析**：使根式 $\sqrt{2^x-1}$ 有意义的实数 $x$ 的集合是 $\{x\mid 2^x-1\geqslant 0\}=\{x\mid x\geqslant 0\}$，使分式 $\dfrac{1}{x-1}$ 有意义的实数 $x$ 的集合是 $\{x\mid x\neq 1\}$. 因此，函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x\mid x\geqslant 0$ 且 $x\neq 1\}$，即 $[0,1)\cup(1,+\infty)$.

6. B　**解析**：函数 $f(x)$ 的定义域是 $\{x\mid 0\leqslant x<1$ 或 $|x|\geqslant 1\}=\{x\mid x\leqslant -1$ 或 $x\geqslant 0\}$，即 $(-\infty,-1]\cup[0,+\infty)$.

7. A　**解析**：由题意知，$f(-3)=(-3)^2=9$，$f[f(-3)]=f(9)=9+\dfrac{6}{9}-6=\dfrac{11}{3}$.

8. C　**解析**：函数 $y=10\lg x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，值域为 $\mathbf{R}$. 选项中只有 C 项函数 $y=2^x$ 满足定义域为 $\mathbf{R}$，值域为 $(0,+\infty)$.

9. B　**解析**：令 $t=x-a$，则 $f(t)=t(t+a)$，从而 $f(x)=x(x+a)$.

10. B　**解析**：令 $t=3x+2$，则 $f(t)=3t-1$，从而 $f(x)=3x-1$.

11. C　**解析**：令 $t=\dfrac{1-x}{1+x}$，则 $x=\dfrac{1-t}{1+t}$，于是 $f(t)=\dfrac{1-\left(\frac{1-t}{1+t}\right)^2}{1+\left(\frac{1-t}{1+t}\right)^2}=\dfrac{2t}{1+t^2}$，从而 $f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$.

名师点拨

已知复合函数 $f[g(x)]$ 和内函数 $g(x)$ 的解析式，求外函数 $f(x)$ 的解析式，通常令 $g(x)=t$，由此能解出 $x=\varphi(t)$，将 $x=\varphi(t)$ 代入 $f[g(x)]$ 中，求得 $f(t)$ 的解析式，再用 $x$ 替换 $t$，便得到 $f(x)$ 的解析式.

12. C　**解析**：$y=x^2$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减；$y=\sin x$ 在 $(-\infty,0)$ 上没有单调性；$y=x$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增；$y=|x|$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减.

13. C　**解析**：由题意可知，$f(1)=-f(-1)=-3^{-1}=-\dfrac{1}{3}$.

14. A　**解析**：因为函数 $f(x)=(x+3)(x-a)$ 是偶函数，所以 $f(3)=f(-3)$，即 $6(3-a)=0$，解得 $a=3$. 因为函数 $g(x)=x^3+4\sin x+b+2$ 是奇函数，所以 $g(0)=b+2=0$，解得 $b=-2$. 综上，$a+b=3-2=1$.

15. A　**解析**：由 $f(x)$ 的奇偶性和周期性，得 $f\left(-\frac{5}{2}\right)=f\left(-\frac{5}{2}+2\right)=f\left(-\frac{1}{2}\right)=-f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$.

16. C　**解析**：因为 $f(x)=2\cos^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-1=\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=\sin 2x$，$\frac{2\pi}{2}=\pi$，所以函数 $f(x)$ 是最小正周期为 $\pi$ 的奇函数.

17. B　**解析**：函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{2}=\pi$，A 项错误；函数 $y=\sin\left(4x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos 4x$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，且图像关于 $y$ 轴对称，B 项正确；函数 $y=\cos\left(4x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin 4x$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，但图像不关于 $y$ 轴对称，C 项错误；函数 $y=\sin 2x+\cos 2x=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{2}=\pi$，D 项错误.

18. D　**解析**：函数 $f(x)=4^x$ 与 $g(x)=\log_4 x$ 互为反函数，它们的图像关于直线 $y=x$ 对称.

19. C　**解析**：令 $f(x)=\log_3 x=-1$，解得 $x=3^{-1}=\frac{1}{3}$，所以 $f^{-1}(-1)=\frac{1}{3}$.

20. B　**解析**：由 $y=2+\ln(x+3)$，得 $x=e^{y-2}-3$，交换 $x,y$，得 $y=e^{x-2}-3$，即为所求反函数.

**名师点拨**

求函数 $y=f(x)$ 的反函数，通常是把解析式 $y=f(x)$ 变形为 $x$ 关于 $y$ 的等式 $x=g(y)$，然后互换 $x$ 与 $y$ 的位置，得到 $y=g(x)$，函数 $y=g(x)$ 即为函数 $y=f(x)$ 的反函数.

## 二、填空题

**答案速查**

1. $(0,3]$　2. $[3,+\infty)$　3. $[1,2]$
4. $\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]$　5. $\frac{13}{2}$　6. 3
7. $(1,+\infty)$　8. $-1$　9. $-1$
10. 0　11. $\frac{1}{2}$　12. $-2$

1. $(0,3]$　**解析**：函数 $f(x)=\sqrt{1-\log_3 x}$ 的定义域为 $\{x\mid x>0$ 且 $1-\log_3 x\geqslant 0\}=\{x\mid 0<x\leqslant 3\}$，即 $(0,3]$.

2. $[3,+\infty)$　**解析**：使 $\sqrt{\frac{x}{3}-1}$ 有意义的实数 $x$ 的取值范围是 $\left\{x\middle|\frac{x}{3}-1\geqslant 0\right\}=\{x\mid x\geqslant 3\}$，即 $[3,+\infty)$，故函数 $f(x)$ 的定义域为 $[3,+\infty)$.

3. $[1,2]$　**解析**：根据题意，令 $-2\leqslant 3x-5\leqslant 1$，解得 $1\leqslant x\leqslant 2$，所以复合函数 $f(3x-5)$ 的定义域为 $[1,2]$.

4. $\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]$　**解析**：根据题意，令 $0\leqslant 9x^2\leqslant 1$，解得 $-\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant\frac{1}{3}$，所以函数 $f(9x^2)$ 的定义域为 $\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]$.

5. $\frac{13}{2}$　**解析**：$\lg\sqrt{2}+\lg\sqrt{5}+2^0+(5^{\frac{1}{3}})^2\times\sqrt[3]{5}=\lg\sqrt{10}+1+\sqrt[3]{5^3}=\frac{1}{2}+1+5=\frac{13}{2}$.

6. 3　**解析**：由题可得，$f(-1)=1+\log_2 2=2$，$f(\log_2 4)=f(2)=2^{2-2}=1$，所以 $f(-1)+f(\log_2 4)=3$.

7. $(1,+\infty)$　**解析**：由反比例函数 $y=\frac{m-1}{x}(x<0)$ 的图像可知，$m-1>0$，即 $m>1$，从而 $m$ 的取值范围是 $(1,+\infty)$.

8. $-1$　**解析**：由题意可知，$f(2\,019)=f(-1+4\times 505)=f(-1)=-f(1)=-(\ln 1+1)=-1$.

9. $-1$　**解析**：由题意可知，$f(2\,013)=f(-2+403\times 5)=f(-2)=-f(2)=-(2^2-3)=-1$.

10. 0　**解析**：因为 $f(x)=x(x+a)$ 是偶函数，所以 $f(a)=f(-a)$，即 $2a^2=0$，于是 $a=0$.

11. $\frac{1}{2}$　**解析**：因为 $0<a<1$，所以指数函数 $y=a^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递减，从而函数在 $[1,2]$ 上的最大值为 $m=a$，最小值为 $n=a^2$. 于是 $m+n=a+a^2=\frac{3}{4}$，解得 $a=\frac{1}{2}$（负值舍去）.

12. $-2$　**解析**：由题意知，$f(0)=m+1=0$，所以 $m=-1$，从而 $f(-3)=-f(3)=-[\log_2(3+1)-1+1]=-2$.

## 三、解答题

1. **解**：因为二次根式的被开方数不小于 0，所以 $x+3\geqslant 0$，解得 $x\geqslant -3$. 故 $y=\sqrt{x+3}$ 的定义域为 $[-3,+\infty)$.

2. **解**:因为分式的分母不能为 0,所以 $x+2\neq0$,即 $x\neq-2$. 故 $y=\frac{1}{x+2}$的定义域为$(-\infty,-2)\cup(-2,+\infty)$.

3. **解**:因为对数的真数大于 0,所以 $x-1>0$,解得 $x>1$. 故 $y=\ln(x-1)$的定义域为$(1,+\infty)$.

4. **解**:因为 $f(x)$的定义域为$[-1,3]$,所以 $f(x+1)$的定义域为$\{x\mid-1\leqslant x+1\leqslant3\}=\{x\mid-2\leqslant x\leqslant2\}$, $f(x^2)$的定义域为$\{x\mid-1\leqslant x^2\leqslant3\}=\{x\mid-\sqrt{3}\leqslant x\leqslant\sqrt{3}\}$.

5. **解**:(方法一)令 $t=\sqrt{x}+1$,则 $f(t)=(t-1)^2+2(t-1)=t^2-1$,于是 $f(x+1)=(x+1)^2-1=x^2+2x$.
(方法二)因为 $f(\sqrt{x}+1)=(\sqrt{x}+1)^2-1$,所以 $f(x)=x^2-1$,于是 $f(x+1)=(x+1)^2-1=x^2+2x$.

6. **解**:根据题意,$g[f(x)]=x^2+2$,$f[g(x)]=\begin{cases}x^2-4x+6, & x<1,\\ x^2+2, & x\geqslant1.\end{cases}$

7. **解**:设 $f(x)=ax+b(a\neq0)$,则 $f[f(x)]=a(ax+b)+b=a^2x+ab+b=4x+3$,于是$\begin{cases}a^2=4,\\ ab+b=3,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=2,\\ b=1\end{cases}$或$\begin{cases}a=-2,\\ b=-3.\end{cases}$故 $f(x)$的解析式为 $f(x)=2x+1$ 或$f(x)=-2x-3$.

8. **解**:(1)$y=\mathrm{e}^{-x}$是由 $y=\mathrm{e}^u$ 与 $u=-x$ 复合而成的.
(2)$y=\sin^2(1+2x)$是由 $y=u^2$,$u=\sin v$ 与 $v=1+2x$ 复合而成的.
(3)$y=\arccos\sqrt{\tan(a^2+x^2)}$是由 $y=\arccos u$,$u=\sqrt{v}$,$v=\tan w$,$w=a^2+x^2$ 复合而成的.

**知识拓展**

(1)不是任何两个函数都可以构成复合函数. 例如,函数 $y=\arcsin u$ 与函数$u=2+x^2$ 就不能构成复合函数. 因为函数$y=\arcsin u$ 的定义域为$[-1,1]$,而 $u=2+x^2\geqslant2$,所以两函数不满足复合函数的条件.

(2)复合函数可以有多个中间变量,如 $y=\mathrm{e}^u$,$u=\sqrt{v}$,$v=x+1$ 复合成函数 $y=\mathrm{e}^{\sqrt{x+1}}$,这里 $u,v$ 都是中间变量.

9. **解**:函数 $y=\frac{ax+5}{x+2}=a+\frac{5-2a}{x+2}$的值域为$\{y\mid y\neq a\}$.
由 $y=a+\frac{5-2a}{x+2}$变形,得 $x=\frac{5-2a}{y-a}-2=\frac{5-2y}{y-a}$,交换 $x,y$,得 $y=\frac{5-2x}{x-a}$,
故函数 $y=\frac{ax+5}{x+2}$的反函数为 $y=\frac{5-2x}{x-a}(x\neq a)$.

10. **解**:在 $y=\frac{3x-5}{2x+1}$两边同时乘 $2x+1$,移项并整理,得 $x(3-2y)=5+y$,等号两边同时除以 $3-2y$,得 $x=\frac{5+y}{3-2y}$.
故函数 $y=\frac{3x-5}{2x+1}$的反函数为 $y=\frac{5+x}{3-2x}\left(x\neq\frac{3}{2}\right)$.

11. **证明**:在 $y=f^{-1}(x)$的定义域内任取两点 $x_1,x_2$,且$x_1<x_2$,记 $y_1=f^{-1}(x_1)$,$y_2=f^{-1}(x_2)$,
则 $f(y_1)=x_1$,$f(y_2)=x_2$.
由于函数 $y=f(x)$是增函数,所以由 $x_1<x_2$ 可知,$y_1<y_2$.
故反函数 $y=f^{-1}(x)$是增函数.

12. **解**:函数 $f(x)=-x^3+1$ 的定义域为 **R**. 任取 $x_1$,$x_2\in\mathbf{R}$,且 $x_1<x_2$,则
$f(x_1)-f(x_2)=(-x_1^3+1)-(-x_2^3+1)=x_2^3-x_1^3$
$=(x_2-x_1)(x_2^2+x_1x_2+x_1^2)$
$=(x_2-x_1)\left[\left(x_2+\frac{1}{2}x_1\right)^2+\frac{3}{4}x_1^2\right]>0$,
即得 $f(x_1)>f(x_2)$.
故函数 $f(x)$是减函数.

13. **解**:(1)因为函数 $f(x)=x^2(1+x^2)$的定义域为 **R**,且 $f(-x)=(-x)^2[1+(-x)^2]=x^2(1+x^2)=f(x)$,所以 $f(x)=x^2(1+x^2)$是偶函数.
(2)因为函数 $f(x)=x(x+1)(x-1)$的定义域为 **R**,且 $f(-x)=(-x)[(-x)+1][(-x)-1]=-x(x+1)\cdot(x-1)=-f(x)$,
所以 $f(x)=x(x+1)(x-1)$是奇函数.

**名师点拨**

在判断函数的奇偶性时,一定要先判断函数的定义域是否关于原点对称,再判断 $f(x)$与$f(-x)$的关系.

14. **解**:由 $y=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$,
解得$\mathrm{e}^y=x+\sqrt{x^2-1}$,$\mathrm{e}^{-y}=x-\sqrt{x^2-1}$,
故 $\mathrm{e}^y+\mathrm{e}^{-y}=2x$,于是 $x=\frac{\mathrm{e}^y+\mathrm{e}^{-y}}{2}$,
故所求反函数为 $y=\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$,$x\geqslant0$.

## 刷提升

### 一、单项选择题

答案速查

1—5. DCCDC　　6—10. BCCDA

1. D　**解析**：使根式 $\sqrt{x-3}$ 有意义的实数 $x$ 的集合是 $\{x|x-3\geqslant 0\}=\{x|x\geqslant 3\}$，使 $\arcsin\dfrac{1}{x}$ 有意义的实数 $x$ 的集合是 $\left\{x\left|-1\leqslant\dfrac{1}{x}\leqslant 1\text{ 且 }x\neq 0\right.\right\}=\{x|x\geqslant 1\text{ 或 }x\leqslant -1\}$. 因此，函数 $f(x)$ 的定义域是 $\{x|x\geqslant 3\}\cap\{x|x\geqslant 1\text{ 或 }x\leqslant -1\}=\{x|x\geqslant 3\}$，即 $[3,+\infty)$. 故本题选 D.

2. C　**解析**：若 $a>b$，则 $a-b>0$，从而 $\dfrac{a+b+(a-b)f(a-b)}{2}=\dfrac{a+b+(a-b)\times 1}{2}=a$；若 $a<b$，则 $a-b<0$，从而 $\dfrac{a+b+(a-b)f(a-b)}{2}=\dfrac{a+b+(a-b)\times(-1)}{2}=b$.
综上，$\dfrac{a+b+(a-b)f(a-b)}{2}$ 的值是 $a$，$b$ 中较大的数.

3. C　**解析**：因为函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，所以 $f(2^{0.6})=f(-2^{0.6})$，又 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，而 $-3=-\log_3 27<-\log_3 13<-\log_3 9=-2<-2^{0.6}$，所以 $f(-2^{0.6})<f(-\log_3 13)<f(-3)$，即 $f(2^{0.6})<f(-\log_3 13)<f(-3)$.

4. D　**解析**：由题意可列不等式组 $\begin{cases}x^2-x-2>1-x,\\-2\leqslant x^2-x-2\leqslant 0,\\-2\leqslant 1-x\leqslant 0,\end{cases}$
解得 $\sqrt{3}<x\leqslant 2$.

5. C　**解析**：由函数 $f(x)$ 的奇偶性和周期性，得 $f(1)=-f(-1)=-f(3)=\dfrac{3-m}{m+1}$. 由于 $f(1)>0$，所以 $\dfrac{3-m}{m+1}>0$，解得 $-1<m<3$.

6. B　**解析**：因为 $f(x)$ 与 $f^{-1}(x)$ 互为反函数，所以 $f^{-1}(x)$ 的反函数即为函数 $f(x)$. 令 $y=\dfrac{3x+5}{x-2}$，则 $y=\dfrac{3x+5}{x-2}=\dfrac{3(x-2)+11}{x-2}=3+\dfrac{11}{x-2}$，从而 $x=2+\dfrac{11}{y-3}=\dfrac{2y+5}{y-3}$，交换 $x,y$，得 $y=\dfrac{2x+5}{x-3}$. 因此，$f(x)=\dfrac{2x+5}{x-3}$，于是 $a=5,b=2,c=-3$.

7. C　**解析**：幂函数 $y=x^{\frac{1}{2}}$ 是非奇非偶函数，A 项命题是假命题；幂函数 $y=x^{-1}$ 是奇函数，但其图像不过原点，B 项命题是假命题；若幂函数 $y=x^a$ 的定义域关于原点对称，且它的图像不过点 $(-1,1)$，则 $(-1)^a\neq 1$，$(-x)^a=(-1)^a\cdot x^a\neq x^a$，从而该幂函数一定不是偶函数，C 项命题是真命题；幂函数 $y=x^3$ 与 $y=x$ 的图像有三个不同的公共点 $(-1,-1)$，$(1,1)$，$(0,0)$，但这两个函数不相同，D 项命题是假命题.

8. C　**解析**：根据题意，在对称区间上 $f(-x)=-f(x)$，$g(-x)=g(x)$，则 $f[(-x)^4]=f(x^4)$，$f(-x)+g(-x)=-f(x)+g(x)$，$f(-x)g(-x)=-f(x)g(x)$，$-g[-(-x)]=-g(x)=-g(-x)$，从而 $f(x)g(x)$ 是奇函数.

9. D　**解析**：因为函数 $f(x)=\ln(\sqrt{1+x^2}-x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且 $f(-x)=\ln(\sqrt{1+x^2}+x)=\ln\dfrac{(\sqrt{1+x^2}+x)(\sqrt{1+x^2}-x)}{\sqrt{1+x^2}-x}=\ln\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}-x}=-\ln(\sqrt{1+x^2}-x)=-f(x)$，所以 $f(x)$ 是奇函数.

10. A　**解析**：因为 $f(x)$ 是奇函数，所以 $\sin f(-x)+\ln[\sqrt{1+(-x)^2}-(-x)]=-\sin f(x)-\ln(\sqrt{1+x^2}-x)=-[\sin f(x)+\ln(\sqrt{1+x^2}-x)]$，即 $\sin f(x)+\ln(\sqrt{1+x^2}-x)$ 是奇函数.

### 二、填空题

答案速查

1. 0　　2. $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)\cup(2,+\infty)$

3. $\dfrac{1}{2}$　　4. $\dfrac{5}{2}$　　5. $\dfrac{255}{16}$　　6. $\sqrt{2}$

7. $y=\log_2\dfrac{x}{1-x},x\in(0,1)$

1. 0　**解析**：因为函数 $f(x)=x^a$ 的图像经过点 $\left(3,\dfrac{1}{3}\right)$，所以 $3^a=\dfrac{1}{3}$，于是 $a=\log_3\dfrac{1}{3}=-1$，从而 $g(x)=(2x-1)x^{-1}=2-x^{-1}$. 显然，$g(x)=2-x^{-1}$ 在区间 $\left[\dfrac{1}{2},2\right]$ 上单调递增，所以 $g(x)$ 在 $\left[\dfrac{1}{2},2\right]$ 上的最小值为 $g\left(\dfrac{1}{2}\right)=2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1}=0$.

2. $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)\cup(2,+\infty)$　**解析**：根据已知条件，结合偶

函数的性质，不等式 $f(\log_{\frac{1}{8}}x)>0$ 的解集为 $\left\{x\middle|\left|\log_{\frac{1}{8}}x\right|>\frac{1}{3}\right\}=\left\{x\middle|0<x<\frac{1}{2}\text{或}x>2\right\}$，即 $\left(0,\frac{1}{2}\right)\cup(2,+\infty)$.

3. $\frac{1}{2}$ **解析**：由 $f(x)$ 是偶函数，得 $f(1)=f(-1)$，即 $\lg 11+a=\lg\frac{11}{10}-a$，整理得 $a=-\frac{1}{2}$；由 $g(x)$ 是奇函数，得 $g(0)=\frac{4^0-b}{2^0}=0$，整理得 $b=1$. 因此，$a+b=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$.

4. $\frac{5}{2}$ **解析**：由 $f(x+2)=-\frac{1}{f(x)}$，得 $f(x)=-\frac{1}{f(x+2)}=f(x+4)$，即 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数. 由于当 $2\leqslant x\leqslant 3$ 时，$f(x)=x$，所以 $f\left(-\frac{11}{2}\right)=f\left(-\frac{11}{2}+4\times 2\right)=f\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{5}{2}$.

5. $\frac{255}{16}$ **解析**：因为 $f(x)$ 是奇函数，$g(x)$ 是偶函数，所以在 $f(x)+g(x)=a^x-a^{-x}+4$ 中，分别令 $x=2$ 和 $x=-2$，得 $\begin{cases}f(2)+g(2)=a^2-a^{-2}+4,\\-f(2)+g(2)=a^{-2}-a^2+4.\end{cases}$ 于是 $a=g(2)=\frac{[f(2)+g(2)]+[-f(2)+g(2)]}{2}=4$，从而 $f(2)=4^2-4^{-2}+4-4=\frac{255}{16}$.

6. $\sqrt{2}$ **解析**：因为当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=x^2$，所以函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是单调增加的，又 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增. 于是，由 $f(x+a)\geqslant f(\sqrt{2}x)$ 知，$x+a-\sqrt{2}x\geqslant 0$ 对任意的 $x\in[a,a+2]$ 恒成立. 令 $g(x)=x+a-\sqrt{2}x$，由于函数 $g(x)$ 在 $[a,a+2]$ 上是单调减少的，所以令 $2a+2-\sqrt{2}(a+2)\geqslant 0$，解得 $a\geqslant\sqrt{2}$. 因此，$a$ 的最小值为 $\sqrt{2}$.

7. $y=\log_2\frac{x}{1-x},x\in(0,1)$ **解析**：由 $y=\frac{2^x}{2^x+1}$，得 $2^x=\frac{y}{1-y}$，等号两边同时取以 2 为底的对数，得 $x=\log_2\frac{y}{1-y}$，交换 $x,y$，得 $y=\log_2\frac{x}{1-x}$，于是 $y=\frac{2^x}{2^x+1}$ 的反函数为 $y=\log_2\frac{x}{1-x},x\in(0,1)$.

## 三、解答题

1. **解**：$f[g(x)]=\begin{cases}1,|g(x)|\leqslant 1,\\0,|g(x)|>1\end{cases}=\begin{cases}1,|x|=1,\\0,|x|\neq 1.\end{cases}$

$g[f(x)]=\begin{cases}2-[f(x)]^2,|f(x)|\leqslant 1,\\2,\quad|f(x)|>1\end{cases}=\begin{cases}1,|x|\leqslant 1,\\2,|x|>1.\end{cases}$

2. **解**：因为 $f(x)$ 的定义域为 $[-1,1]$，所以 $f(ax)$ 的定义域为 $\{x|-1\leqslant ax\leqslant 1\}=\left\{x\middle|-\frac{1}{a}\leqslant x\leqslant\frac{1}{a}\right\}$，

$f\left(\frac{x}{a}\right)$ 的定义域为 $\left\{x\middle|-1\leqslant\frac{x}{a}\leqslant 1\right\}=\{x|-a\leqslant x\leqslant a\}$.

因此，当 $a\geqslant 1$ 时，$f(ax)+f\left(\frac{x}{a}\right)$ 的定义域为 $\left\{x\middle|-\frac{1}{a}\leqslant x\leqslant\frac{1}{a}\right\}$，即 $\left[-\frac{1}{a},\frac{1}{a}\right]$；

当 $0<a<1$ 时，$f(ax)+f\left(\frac{x}{a}\right)$ 的定义域为 $\{x|-a\leqslant x\leqslant a\}$，即 $[-a,a]$.

3. **解**：分别以 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 的两边为指数，e 为底数，得 $e^y=x+\sqrt{x^2+1}$，

移项并整理，得 $\sqrt{x^2+1}=e^y-x$，

等号两边同时平方，整理得 $x=\frac{e^y-e^{-y}}{2}$.

故函数 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 的反函数为 $y=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$.

4. **解**：因为 $f(x)$ 是偶函数，$g(x)$ 是奇函数，

所以 $f(x)-g(x)=f(-x)+g(-x)=\frac{1}{-x-1}$，

于是 $f(x)=\frac{[f(x)+g(x)]+[f(x)-g(x)]}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)=\frac{1}{x^2-1}$，

$g(x)=\frac{[f(x)+g(x)]-[f(x)-g(x)]}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}\right)=\frac{x}{x^2-1}$.

5. **解**：(1) 任取 $x_1,x_2\in(-\infty,1)$，且 $x_1<x_2$，则 $1-x_1>1-x_2>0$，从而 $\frac{1}{1-x_1}<\frac{1}{1-x_2}$，

即得 $f(x_1)<f(x_2)$.

故 $f(x)=\frac{1}{1-x}$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调增加.

(2) 任取 $x_1,x_2\in(1,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，则 $x_1+x_2>2,x_2-x_1>0$，从而 $f(x_2)-f(x_1)=x_2^2-x_1^2-2(x_2-x_1)=(x_2+x_1-2)(x_2-x_1)>0$，即得 $f(x_1)<f(x_2)$.

故 $f(x)=x^2-2x$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调增加.

6. **解**：(1) $f(x)$ 在定义域上是单调增加的.

证明：在 $[-2,2]$ 上任取两点 $x_1,x_2$，且 $x_1<x_2$，则

$x_1+(-x_2)<0$. 因为 $x_1+(-x_2)\neq 0$，所以 $\dfrac{f(x_1)+f(-x_2)}{x_1+(-x_2)}>0$，又 $f(x)$是奇函数，所以 $f(x_1)-f(x_2)=f(x_1)+f(-x_2)=\dfrac{f(x_1)+f(-x_2)}{x_1+(-x_2)}\cdot[x_1+(-x_2)]<0$，即$f(x_1)<f(x_2)$，

故 $f(x)$在定义域上是单调增加的.

(2)因为 $f(x)$在$[-2,2]$上是单调增加的，所以由

$f(2x-1)\leqslant f(x^2-1)$，得$\begin{cases}-2\leqslant 2x-1\leqslant 2,\\ -2\leqslant x^2-1\leqslant 2,\\ 2x-1\leqslant x^2-1,\end{cases}$

解得$-\dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant 0$.

7. **解**：设 $y=f(x)$，则由反函数的定义，得

$$x=\begin{cases}3y,-2<3y<1,\\ \sqrt{y},1\leqslant\sqrt{y}\leqslant 2\end{cases}=\begin{cases}3y,-\dfrac{2}{3}<y<\dfrac{1}{3},\\ \sqrt{y},1\leqslant y\leqslant 4,\end{cases}$$

将 $x,y$ 互换，得所求反函数为

$$f^{-1}(x)=y=\begin{cases}3x,-\dfrac{2}{3}<x<\dfrac{1}{3},\\ \sqrt{x},1\leqslant x\leqslant 4.\end{cases}$$

# 第二节　极　　限

## 刷基础

### 一、单项选择题

**答案速查**

1—5. CCCAB　6—10. CBBBA
11—15. CADCD　16—20. CCAAB
21—25. BAAAD　26—30. BCDDD
31—35. AACDC　36—37. CA

1. C　**解析**：令 $f(x)=-g(x)$，则$\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]=0$，A项错误；令 $f(x)=g(x)$，则$\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)]=0$，B项错误；由无穷小量与无穷大量的关系知 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f(x)}=0$，C 项正确；令 $f(x)=-g(x)$，则 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f(x)+g(x)}$没有意义，D项错误.

2. C　**解析**：$\lim\limits_{x\to 0}(1+2\sin x)^{\frac{2}{\sin x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(2\sin x\cdot\frac{2}{\sin x}\right)}=e^4$.

3. C　**解析**：根据题意，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x^2)^k-1}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{kx^2}{\frac{1}{2}x^2}=2k=1$，所以 $k=\dfrac{1}{2}$.

**名师点拨**

常用的 $x\to 0$ 时的等价无穷小：

$\sin x\sim x$；　$\tan x\sim x$；

$\arcsin x\sim x$；　$\arctan x\sim x$；

$e^x-1\sim x$；　$\ln(1+x)\sim x$；

$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$；　$a^x-1\sim x\ln a$；

$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x(\alpha\neq 0)$.

4. A　**解析**：因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=3$，所以$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(x)}{x}\cdot x\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}x=3\times 0=0$.

5. B　**解析**：因为 $\lim\limits_{x\to 0}(x+2)=2$，$\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$，$\lim\limits_{x\to 0}(x+1)^2=1$，$\lim\limits_{x\to 0}2^x=1$，所以 $x^2$ 是 $x\to 0$ 时的无穷小量.

6. C　**解析**：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2x}=\dfrac{1}{2}$.

**名师点拨**

等价无穷小因子替换的原理是极限的乘法运算，所以替换的是作乘、除因子的无穷小，对于作加、减因子的无穷小，不能随意替换. 如极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$，如果直接用 $\sin x$ 替换 $x$，就会得到$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-x}{x^3}=0$，但实际上这个结果是错误的.

7. B　**解析**：当 $x\to 0$ 时，$\sin^2x$ 和 $x^2$ 是 $x$ 的高阶无穷小量，$\ln(1+x)$是 $x$ 的等价无穷小量，$2x^2-x$ 是 $x$ 的同阶非等价无穷小量.

8. B　**解析**：因为 $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(2-x)=1$，$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(2x-1)=1$，所以 $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)$，从而 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=1$.

9. B　**解析**：当 $x\to 0$ 时，$e^x-1\sim x$，所以 $e^{2x}-1\sim 2x$.

10. A　**解析**：$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{8^x}{8^x-5^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1-\left(\frac{5}{8}\right)^x}=1$.

11. C　**解析**：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x+1}\right)^x=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\frac{2}{x+1}\cdot x\right)}=e^{-2}$.

12. A　**解析**：$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{3}{x+1}\right)^{2x}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{3}{x+1}\cdot 2x\right)}=e^{-6}$.